

邦銀 18 行のオペレーショナルリスク損失データの分布形状の共通性とそれを利用したオペレーショナルリスクの簡易な計算式について*

2011 年 5 月

長藤 剛**

中田 貴之***

神崎 有吾****

概 要

当論文は、オペレーショナルリスク量のベンチマークとして活用できる簡単な計算式を提案するものである。当計算式は、邦銀主要 18 行のオペレーショナルリスク損失データの分析を基に導かれ、一定の金額以上の損失の年間件数のみを用いてリスク量を計算する。当計算式は、リスク感応的であると同時に、簡便性、計算結果の現実性等の面で、オペレーショナルリスク量のベンチマーク式として優れた性質を備えている。

キーワード：オペレーショナルリスク資本、バーゼル自己資本比率規制、ベンチマークモデル、損失分布手法、極値理論、一般化パレート分布、べき乗則

JEL Codes : G10, G20, G21, G28, G32

* 本稿の執筆に際しては、情報・システム研究機構統計数理研究所 山下智志教授（金融庁特別研究員）、金融庁 氷見野良三 参事官、柳瀬 護 室長以下バーゼル II 推進室の方々、石村幸三 前バーゼル II 推進室長から有益なコメントおよび叱咤激励を頂戴した。ここに記して感謝申し上げます。もちろん、当論文は執筆者の個人的な見解であり、金融庁および金融研究センターの公式見解を示すものではない。

** 金融庁 監督局 総務課 バーゼル II 推進室・課長補佐 (tsuyoshi.nagafuji@fsa.go.jp)

*** 金融庁 監督局 総務課 バーゼル II 推進室・専門調査員 (takayuki.nakata@fsa.go.jp)

**** 金融庁 監督局 総務課 バーゼル II 推進室・課長補佐（前職）

1. はじめに

当論文は、邦銀 18 行のオペレーショナルリスク（以下、オペリスク）損失データを分析し、その分析結果を用いて導いたオペリスク量の簡易な計算式を提案するものである。

バーゼル II¹のもとで、オペリスクの計量方法に「先進的計測手法（AMA）」を選択した銀行では、各行が独自に開発したモデルによる計量結果を規制資本として用いることとされた。これをきっかけに、邦銀を含む世界の銀行でオペリスク計量は大きく進歩している。

しかしながら、オペリスクの計量手法には確立した標準といえるものはいまだ存在せず、モデルの内容や運用の自由度は極めて高い。バーゼル II では、先進的計測手法採用行に対して「1 年間の保有期間のもとで 99.9%の信頼区間に相当する健全性基準を満たす」ことを求めている²が、他のリスク分野とくらべてバックテストによる計量手法の検証、検証結果を踏まえた改善も困難である。このため、「AMA のもとでは、リスクプロファイルが類似している銀行であっても、モデル化手法と仮定が大きく異なれば、リスク資本の水準が異なり得る」³という古くからの問題は未解決のままである。さらには、現状、基礎的手法に用いられているリスク量が、世界の多くの銀行で事実上のベンチマークとして機能している結果、AMA によるリスク資本の多くが過小評価になっている可能性を否定できない⁴。

こうした状況では、オペリスク計量の信頼性はその他のリスク分野にくらべて劣ってしまう。また、銀行間のオペリスク量の横並び比較も難しい。

この事態を改善するには、計量手法の標準化が進むことが望ましいが、それは時期尚早⁵と思われる。とはいうものの、計量結果の妥当性の判断の目安があることは、銀行にとっても規制当局にとっても望ましい。当論文はこうした問題意識を背景に、リスク量の目安となる簡易な計算式を提案するものである。当計算式は、基礎的手法に用いられているリスク量（年間の粗利益に 15%を乗じる）とくらべて、個々の銀行のリスクをはるかによく反映するものとなっている。

当計算式は、あるひとつの損失規模分布（以下、「共通の損失規模分布」）が近似的にどの銀行にも当てはまると仮定して導かれたものである。同計算式は、モンテカルロ・シミュレーションを行うことなく、一定の金額以上の損失の年間件数のみを用い、リスク量を算出する。

当計算式は、ベンチマーク式として優れた性質を備えている。「共通の損失規模分布」の仮定という単純化により、各銀行の損失規模分布の形状の相違は無視されるかわりに、簡

¹ バーゼル銀行監督委員会（2004）

² バーゼル銀行監督委員会（2004）パラグラフ 667

³ バーゼル銀行監督委員会（2009a）

⁴ バーゼル銀行監督委員会（2009b）によれば、損失の頻度、規模の銀行間のばらつきにくらべ、先進的計測手法によるリスク量のばらつきは小さく、各銀行の AMA によるリスク量は、基礎的手法によるリスク量（粗利の 15%）をやや下回る水準に集中している。

⁵ 「AMA における自由度が高いのは、オペレーショナル・リスクがひとつの分野として確立してからあまり日を経っていないこと、バーゼル委員会としても、オペレーショナル・リスクを的確に反映した最善の推計方法を探りたいと考えているためである」（バーゼル銀行監督委員会（2009a））。

便性が高まり、広い範囲の銀行で利用可能なものになっている。各行の年間損失件数をリスク量に反映することでリスク感応性が保たれている。計量結果も実務的な感覚と整合的である。

ここで仮定される共通の損失規模分布は、サンプルとなった邦銀 18 行のオペリスク損失データをひとつのデータセットにまとめ、そのデータセットに適合する損失規模分布を推計（一般化パレート分布）して得られたものである。この共通の損失規模分布をすべての銀行に用いることの妥当性の判断は、最終的には今後のデータの蓄積を待つよりほかないが、ベンチマークとして用いることは妥当と考えている。

当計算式は、邦銀 18 行のデータに基づいて導出されたものだが、筆者らは、他の国内外の銀行のベンチマークとしても大きな変更なしに用いることができると考えている。各種の損失データ収集の集計結果、それらの損失データの分布を推計した先行研究の多くが、邦銀 18 行のデータに対する分析結果と整合的な結果を示していることがそのよりどころである。

もちろん、当論文で提唱する計算式の適用範囲を見定めるためには、オペリスク損失データの蓄積、分析がさらに必要である。当論文がこうした努力に対する刺激となり、当論文で提案する計算式の改善、さらには別の新たなベンチマークの開発につながることを期待したい。

当計算式の考え方はごく簡単なものであり、当論文独自のものではない。筆者らが知る限り、Dutta and Perry (2006)、De Koker (2006) が、ほぼ同様の式を示している。Dutta and Perry (2006) は、各銀行の損失がべき乗法則に従うとの前提で導いた当論文とほぼ同様のオペリスク量の計算式を用いている。De Koker (2006) も、損失規模がべき乗分布に従うとの観察結果をもとに、当論文と似たオペリスク量の計算式を導出し、同式をオペリスクにおける信用リスクの IRB（内部格付手法）に喩えている。De Koker (2006) の損失データに対する観察および導出したオペリスク計算式の基本的な考え方は当論文と共通である。

各銀行の損失規模分布が共通との単純化を行っている点が、これらの先行研究と当論文との違いである。こうした単純化により、損失データが十分に得られない銀行においても損失規模分布を独自に推計することなく、当計算式を用いてオペリスク量の目安を得ることが可能となる。なお、損失規模分布が銀行間で似ているとの指摘には、De Koker (2006)（「損失規模分布が銀行間あるいは景気循環のなかで比較的安定しているようにみえる」）、de Fontnouvelle ら (2005)（「損失規模分布が大規模銀行間で同じであるとの帰無仮説を棄却できない」といったものがある。当論文は、こうした指摘を邦銀 18 行の損失データで検証したのともいえる。

実際の銀行のオペリスク損失データを用いて損失規模分布の推計を行った実証研究はこれまでも数多く報告されている。当論文の分析手法は、これらの先行事例と多くの共通点を持ち、推計された分布形も、従来の分析と整合的である。この点は、「各銀行の損失規模

分布を共通と仮定する」との単純化が、広い範囲の銀行に適用可能であることのひとつのよりどころとなる。先行研究における損失規模分布の推計結果は、「5.2 実証データに基づくオペリスク計量の先行研究」にまとめている。

当論文の概要をあらかじめ示すと以下のとおりとなる。

「2. 分析対象データ」で分析データ（邦銀 18 行の損失データ）の説明と特徴的な観察結果（「当該 18 行の損失規模分布は相互によく似ており、ひとつの共通の分布で近似できそうである」）を示す。この観察結果を受けて、「3. 共通の損失規模分布の推計」で、邦銀 18 行のオペリスク損失をまとめたデータセットに適合する損失規模分布を推計し、同損失規模分布の各行の損失データへの適合度を検証する。つぎに、「4. オペリスク量の簡易な計算式」では、上記の「邦銀 18 行に共通する損失規模分布」を用いて導出したオペリスク量の簡易な計算式を示す。「5. 当論文の分析の他の銀行への適用可能性」では、共通の損失規模分布、オペリスクの簡易な計算式が国内外の他の銀行にも適合する可能性を示唆する他の損失データ収集や先行研究を紹介する。最後に、「6. おわりに」で、当計算式の実務への適用にあたっての課題を整理する。

2. 分析対象データ（邦銀 18 行の損失データ）

2.1 データの概要

分析対象となった損失データは、バーゼル銀行監督委員会が 2008 年に実施したオペリスクの損失データ収集実態調査⁶（以下、LDCE2008）に際して、邦銀 18 行から収集されたものである。このため、データの特徴は LDCE2008 の報告書に記述されているものと共通する点が多いが、以下に当分析に関連する主要点を示す。

- 当分析の対象となったのは邦銀 18 行（証券子会社等、傘下の連結対象子会社等を含む）。そのうち先進的計測手法（AMA）の採用先ないし採用を目指している先が 7 先あった。その他の 11 先は粗利益配分手法を採用していた。
- 当該 18 行から提供された損失データの総数は 324,623 個。うち 2 万ユーロ⁷以上の損失は 2,502 個、損失金額の総計は約 1,500 億円。
- LDCE2008 における調査参加銀行は、最低 3 年間の損失データを提出するよう求められた。銀行によって提出したデータの期間に違いはあるが、当該 18 行は平均で 4 年強のデータを提供した。
- 18 行の大半が 2007 年 12 月 31 日または 2008 年 3 月 31 日までのデータを提供した。
- 各損失データの主要項目は以下のとおり。
 - ✓ 損失に関する 3 つの日付（損失発生日、会計上の処理日、発覚日）

⁶ 同調査の報告書は、バーゼル銀行監督委員会（2009b）。

⁷ 約 316 万円。なお、当論文では、為替換算レートとして 2008 年 3 月末の値（1 円=0.006336486 ユーロ、1 ユーロ=約 157.82 円）を用いている。これは、LDCE2008 の集計に用いられた値である。詳細はバーゼル銀行監督委員会（2009b）を参照。

- ✓ バーゼルの業務区分、損失事象の種類
- ✓ グロス損失、回収額、保険による回収額
- 当論文の分析に用いた損失規模(金額)は、「グロス損失－(回収額－保険による回収額)」。
- 提出された損失データのうち LDCE2008 にいう「統合データセット」⁸に該当するデータを分析対象とした。
- 当論文の分析では、データの時期による制限は行っていない。この結果、5年分のデータを提出した銀行のデータは5年分、3年分のデータを提出した銀行のデータは3年分を用いている。
- 分析の目的に応じ、分析対象とする損失データの最低金額が異なっている。分析する損失データの下限となる金額が高額の場合、一部の銀行で分析対象となる損失データが存在しないことから、分析対象の銀行数が18行を下回ることがある。

2.2 損失データの図示

ここでは、個別行あるいは複数銀行をまとめたグループの損失データを、各銀行の匿名性を損なわない範囲で図示する。図示の方法(x軸、y軸ともに対数表示されることから当論文では両対数グラフと呼ぶ)は、以下のとおりである。

- 1万円以上の全損失を図示している。
- x軸(対数值)：各損失の規模(金額)
- y軸(対数值)：各損失の頻度。ここでは、各損失において、当該損失の金額以上の規模の損失件数が1万円以上の全損失の件数に占める割合^{*}
- ^{*} $F(x)$ を損失規模の分布関数としたときの $1-F(x)$ にあたる。
- x軸、y軸ともに、対数表示。
- 匿名性を保つため各グラフで、最大損失がほぼ同じ位置になるようx軸、y軸の目盛りを変えている。
- ひとつの銀行の損失(図1)あるいは複数の銀行の損失をまとめたもの(図2、図3)を図示している。
- 複数の銀行の損失データをまとめる際には、頻度や規模の調整(ウェイト付けやスケールリング)を行っていない。すなわち、複数の銀行の損失を特に調整せず、あたかもひとつの銀行のさまざまな事業部門や子会社から発生したかのように扱っている。
- (業務区分や損失事象別に分けて)銀行全体あるいは複数の銀行をまとめた損失をひとつのグラフに示している。
- グラフを相互に比較しやすいように、傾き-1の直線をあわせて示している。

⁸ 損失金額をユーロに換算し参照番号が同じ取引を1件の事象にまとめたもの。分析にあたっては、再度円に換算した。なお、LDCE2008で主な分析対象とされた「安定的データセット(各行の安定期間のデータ)」は「統合データセット」から、データが安定的に収集されていると判断された部分を抜き出したもの(詳しくは、バーゼル銀行監督委員会(2009b))。

図 1 は、18 行の損失を上記の方法で個別に図示したものである⁹。これらのグラフをみると、損失規模分布は、ボディ部分で相互に類似しているものが多い一方で、テール部分の形状にはばらつきがみられる。

ところが、複数の銀行の損失データをまとめて同様に両対数グラフで図示すると、両端を除いて傾きが-1 の直線に近くなることが観察される¹⁰。例えば、図 2 は、9 つの中規模の銀行（すべて地銀）の損失をまとめて（9 行の損失があたかもひとつの銀行から発生したかのように扱う）図示したものである。個々の銀行の損失はばらついているが（左図）、9 の銀行の損失をまとめると、傾き-1 の直線に近くなる（右図）。さらに、分析対象全 18 行のデータをまとめて同様に図示すると、図 2 右図と同様、傾きが-1 の直線に近い形になる（図 3）。

このように複数の銀行の損失データをまとめて描かれた損失規模分布の解釈は二通り考えられる。ひとつは、「いくつかの銀行を合成した仮想の大きな銀行」、すなわち、分析対象 18 行のデータをまとめた分布を例にすれば、18 行が合併して誕生した巨大な銀行の損失規模分布との解釈である¹¹。

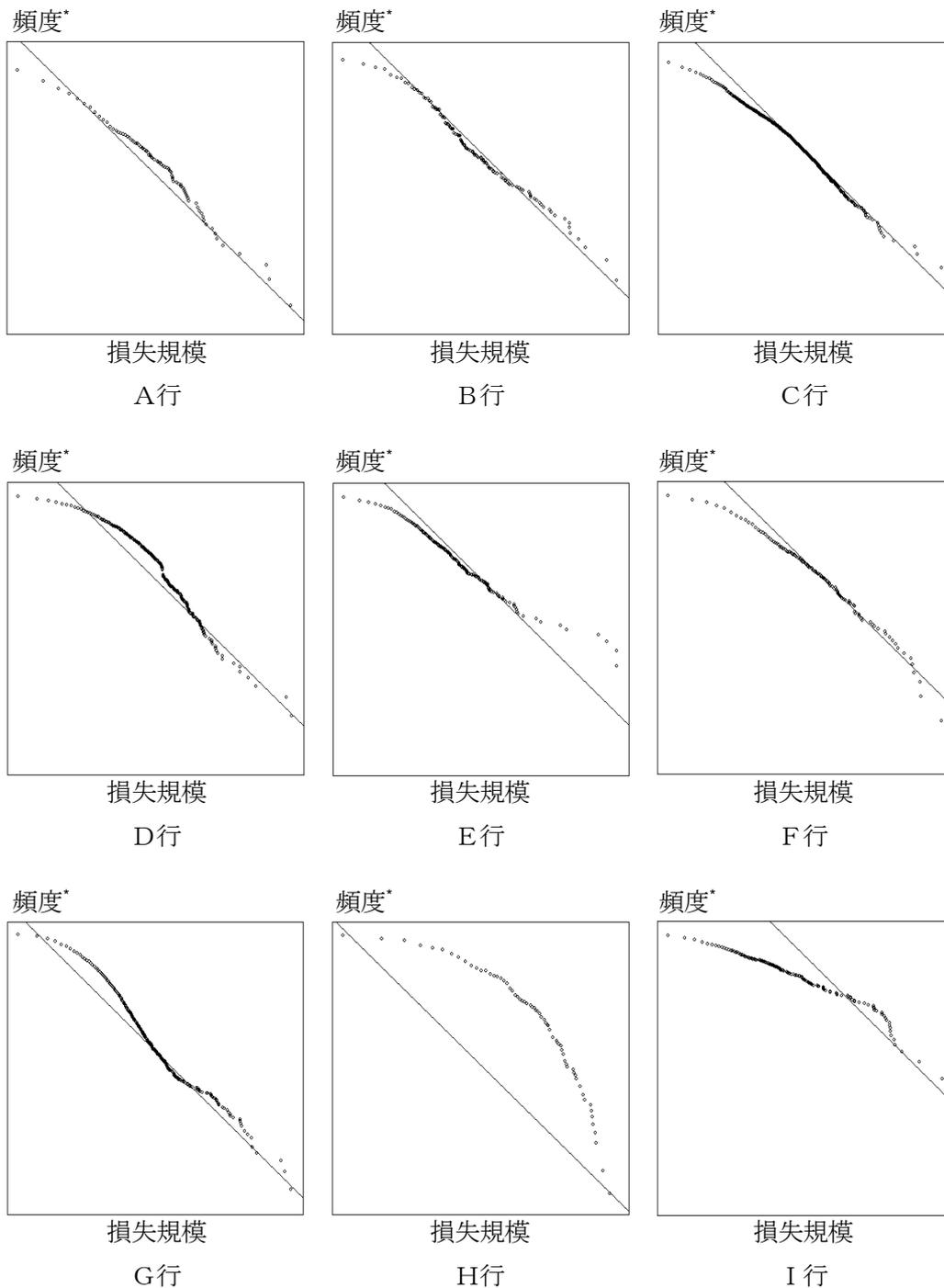
別の解釈は、ひとつの銀行が 1 年間の業務を何回も繰り返した場合に得られる損失規模分布との解釈である。ここでは、18 行が、各行平均 4 年強の損失データを提供しているため、18 行中の平均的な銀行が 1 年間の業務を 70~80 回程度繰り返した（ $18 \times 4 = 72$ ）場合に描かれる損失規模分布と解釈できる。

後者の解釈に立ったとき、「グラフ作成の対象とする銀行を増やしていくと全 18 行のデータをまとめた損失規模分布に近づく」との観察事実は、個々の銀行の損失規模分布が図 3 で示された分布に従っており、損失データが蓄積されれば、個々の銀行の損失規模分布が図 3 で示された分布に近づいていく可能性を示している。

⁹ 銀行によって提出データの期間が異なることから、グラフ上で損失件数が大きい銀行が、単年度でも損失件数が大きいとは限らないことに注意。

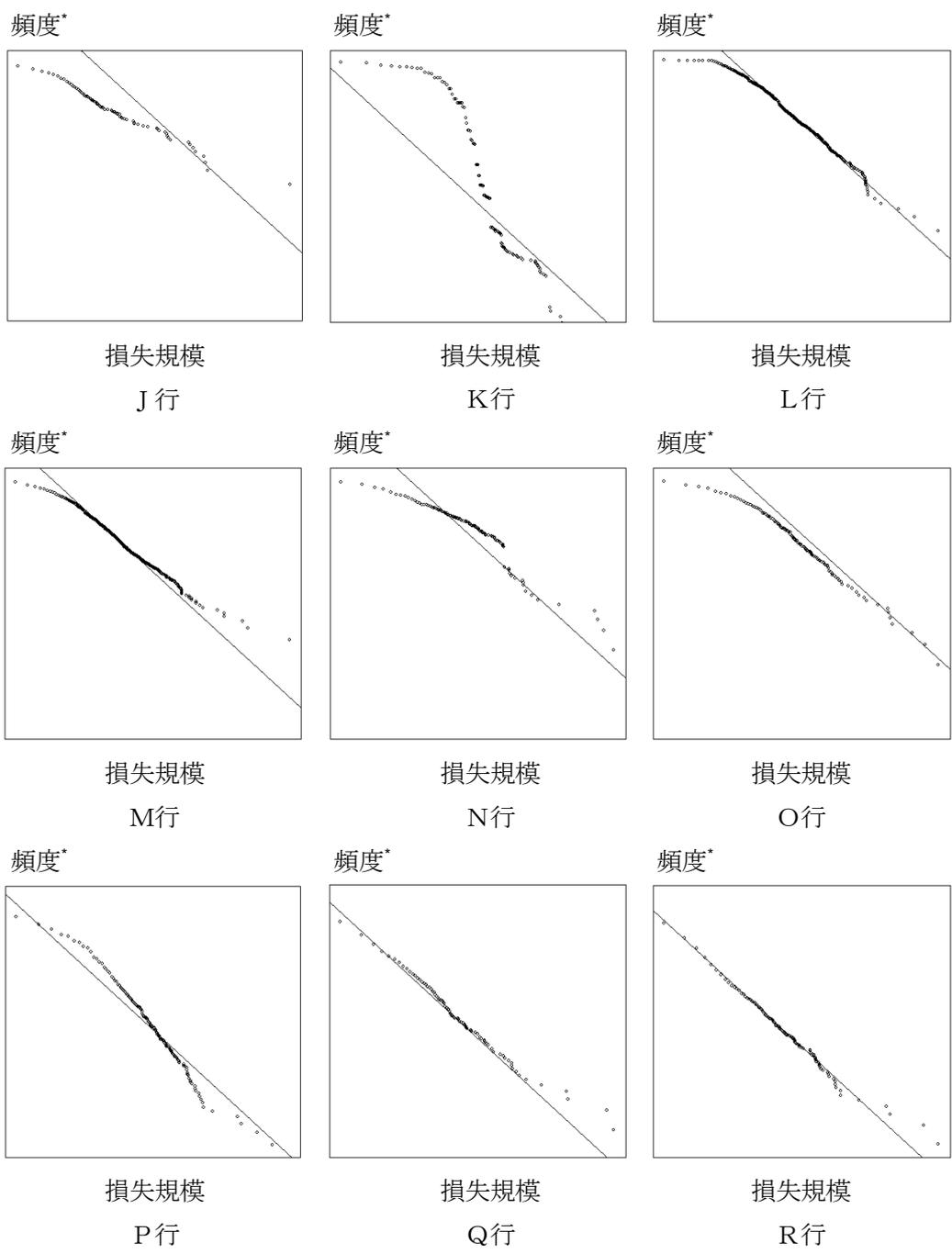
¹⁰ 両対数グラフ上で右下がりの直線となることは、いわゆるべき乗則が成立しており、パレート型の分布形が適合することを示している。同直線の傾きがほぼ-1 であることは、損失の規模が 10 倍になると、その発生件数がほぼ 1/10 になるという関係を示しており、実務家の感覚によく合致していると思われる。

¹¹ 18 行のどの損失も独立であることが前提。損失間の独立性を確保するために、共通の要因（同じ地震や、銀行が共同で使用しているようなシステムの障害等）に起因する損失が複数の銀行で発生している場合、それらの損失をあらかじめひとつにまとめる必要がある。



* 頻度 = (x 軸の損失規模以上の損失の件数) / (1 万円以上の損失件数)
 頻度、損失規模ともに対数表示

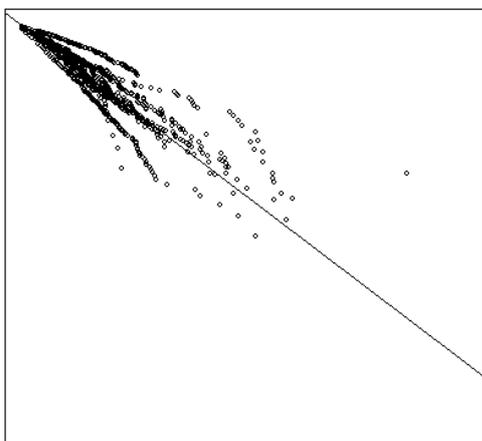
図 1 個々の銀行の損失規模分布の形 (次頁に続く)



* 頻度 = (x 軸の損失規模以上の損失の件数) / (1 万円以上の損失件数)
 頻度、損失規模ともに対数表示

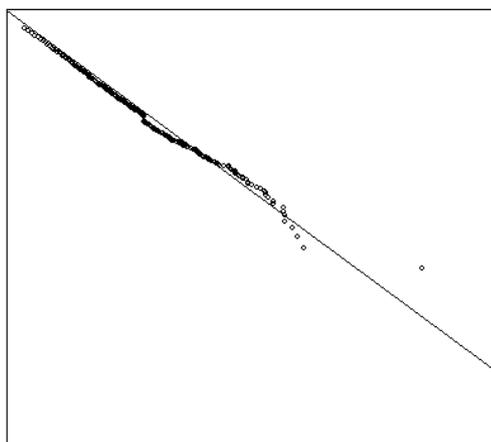
図 1 個々の銀行の損失規模分布の形 (前頁の続き)

頻度* (対数)



損失規模 (対数)

頻度* (対数)

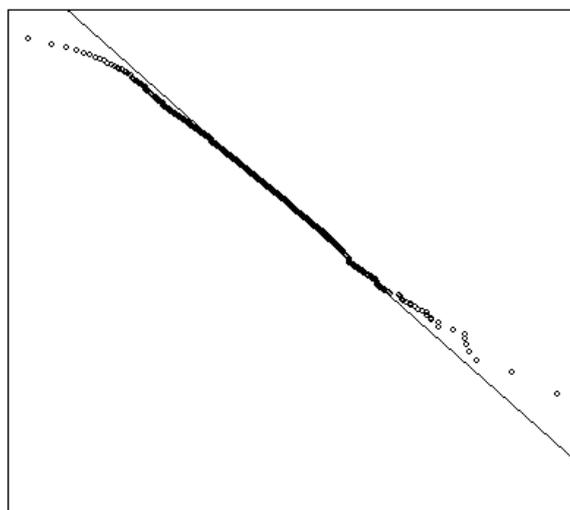


損失規模 (対数)

* 頻度 = (x 軸の損失規模以上の損失の件数) / (1 万円以上の損失件数)

図 2 中規模の銀行 9 行の損失：個別行毎に図示 (左)、全損失をまとめて図示 (右)

頻度* (対数)



損失規模 (対数)

* 頻度 = (x 軸の損失規模以上の損失の件数) / (1 万円以上の損失件数)

図 3 全 18 行の損失

3. 共通の損失規模分布の推計

これまで、データを蓄積することで個々の銀行の損失規模分布が共通の分布形（共通の損失規模分布）に近づく可能性があることを視覚的に確認した。こうした観察結果を踏まえ、当節（「3. 共通の損失規模分布の推計」）では、まず、分析対象 18 の銀行の損失データをまとめたデータセットに適合する分布を共通の損失規模分布として推計し¹²、つぎに個々の銀行に共通の損失規模分布を用いることの妥当性を検証する。

個々の銀行に共通の損失規模分布を用いることの妥当性を検証しているが、これは、個別の銀行の分布が共通の損失規模分布に従っていない場合でも、それらをまとめた損失が図 3 のような分布形状を示す可能性があるためである¹³。

ここでは二種類の検定により、個々の銀行に共通の損失規模分布を用いることの妥当性を検討している。すなわち、補論 1 でノンパラメトリック検定を用いて「18 行の損失規模データセットが、それぞれすべて同一の母集団から抽出されたものである」との帰無仮説（対立仮説：「18 行の損失規模データのすべてが同一の母集団から抽出されたとはいえない」）が棄却されないことを確認している。また、当節の「3.7 共通の損失規模分布の適合度」において、図 3 に適合させて得られた損失規模分布が、各銀行の損失データに対して高い適合度を示している。

3.1 i.i.d. の仮定

各銀行の損失データをまとめたデータセットについて分布形を推計しているが、当該データセットを構成する損失データは、独立に同一分布から得られたものと仮定している（i.i.d. の仮定）¹⁴。

¹² Nešlehová ら（2006）は、「データの汚染（contamination）」の推計上の危険性（サンプルデータのなかに他と異なる分布に従うデータがある場合に推計される分布形が実態を反映しなくなる危険性）を指摘し、それが疑われる場合には特別な注意が必要であるとしている。当推計方法にもこうした危険があるが、以下の理由により、当方法により推計された分布を用いてリスク量の計算式を求めることに大きな問題はないと考えている。（ ） 合成されたデータセットを構成する各銀行のデータセットが「同一の分布」に従っているとの仮定が可能なこと（脚注 14 を参照）、（ ） 共通の損失規模分布によって各銀行の最大損失を予想し実績値とくらべると、非保守的な予想と、保守的な予想とが半々となること（表 2 参照）。

¹³ 例えば、各銀行の損失規模が、それぞれ分散の異なる対数正規分布に従っている場合、合成して得られる分布は図 3 によく似たものになりうる。また、一部の銀行が裾の厚いべき乗分布に従っており、その他の銀行はそれよりも裾の薄い対数正規分布に従っているような場合も同様である。逆に、複数の銀行の損失データが共通の損失規模分布に従っている場合には、それらをまとめたデータセットも共通の損失規模分布に従う。

¹⁴ 当該仮定の合理性に関しては、Moscadelli（2004）と同様の事情が当てはまる。すなわち、同論文はバーゼル委員会によって収集された複数の銀行の損失データをビジネスライン別にまとめて分析しているが、（ ） 独立性に関して、データが比較的短期間（1～2 年）に集められており時系列的な構造を持たないこと、（ ） 同一分布の仮定に関して、分析対象がバーゼル委員会の調査に参加した銀行であり均質性が高いこと、を根拠に i.i.d. を仮定している。当論文のデータも、（ ） 平均 4 年強という比較的短期間に収集されたものであること、（ ） 中規模以上の邦銀という同質性が高いサンプルから集められている点は同様である。さらに、補論 1 の検定で、帰無仮説「18 行の損失規模データセットのすべてが同一の母集団から抽出されたものである」が、1,500 万円以上の閾値のほとんどで棄却されないことも、「同一分布の仮定」の傍証となる。

3.2 計量単位

業務、損失事象で区分することなく、銀行全体を計量単位とした。これは、分布形を推計するためのサンプル数を確保するためと、分析目的（オペリスク量の簡易な計算式を得ること）からみて適切と考えたためである。業務区分別、損失事象別の推定結果は補論 2 を参照。

3.3 分布形

一般化パレート分布（以下、GPD）を、一定の閾値（次項目「3.4 GPD の閾値」を参照）からの超過金額に当てはめた。これは、選択した閾値が十分に大きいとの仮定のもとで、極値理論（POT 法）を適用したものである¹⁵。当論文では、GPD を以下のとおり定式化している（形状パラメータ $\xi=0$ の場合を省略）。

$$G_{\xi,\beta}(x) = 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\beta}x\right)^{\frac{1}{\xi}} \quad \xi \neq 0,$$

ただし $\beta > 0$ 、 $\xi > 0$ のときは $x \geq 0$

$G_{\xi,\beta}(x)$: 分布関数

ξ : 形状パラメータ（一般的な読み方：クシー、グザイ、クサイ）

β : 尺度パラメータ

3.4 GPD の閾値

GPD のパラメータ推計値（図 4 および表 1）は閾値の選択により大きく変動するため、閾値の決定は非常に重要である。しかしながら、閾値の決定に関して絶対的な基準が存在するわけではない。このため、実務では、定量、定性のさまざまな要素を考慮して、設定されることが多い。

当論文では、主に 1,000 万円を閾値とした推計結果を用いている。これは、以下を総合的に勘案した結果である。

- 閾値が高額であるほど損失規模分布の GPD による近似精度が高まるが、サンプル数が少なくなる。一方で、閾値が低い場合、推計に用いるデータ数が大きくなるため推計値のばらつきは小さくなるが、推計結果が偏る可能性が高まる。
- 100 万円から 10 億円の範囲で複数の閾値を設定し、それぞれの閾値についてパラメータを推計した。この結果、二通りの推計方法（最尤法あるいは確率ウェイトモーメント法）で、100 万円以上、3,000 万円程度までの閾値において ξ が安定的な水準で推移した（図 4、表 1）。

¹⁵ Pickands-Balkema-de Haan の定理によれば、損失規模分布が一定の条件を満たすときには、十分に大きな閾値をとれば、閾値からの超過金額は、GPD に従う。

- 図5に示す平均超過プロット¹⁶が、データ数が限られる閾値が1億円以上の範囲を除いて、100万円以上の閾値でほぼ安定した直線となっている。これは100万円以上の範囲で閾値を設定しうることを示している。
- 当論文で提案するオペリスク量の計算式の適用範囲が、GPDの推計に用いた閾値の値が小さいほど広がる¹⁷。

¹⁶ x軸に閾値、y軸に閾値以上の全損失の「超過金額」(損失規模 - 閾値)の平均を図示したグラフ。ここでは、100万円以上の閾値について図示している(上位3データは図示から除いている)。

¹⁷ 当論文で提案するオペリスク量の計算式では、一定金額以上の損失の年間損失件数が変数となる。年間損失件数を測る際に用いる閾値は、GPDの推計に用いた閾値以上にする必要があるため、GPDの推計に用いた閾値が小さいほど小額の損失頻度を同式の入力に使える。このため、大きな金額の損失が少ない金融機関にも同式の適用範囲を広げることができる。

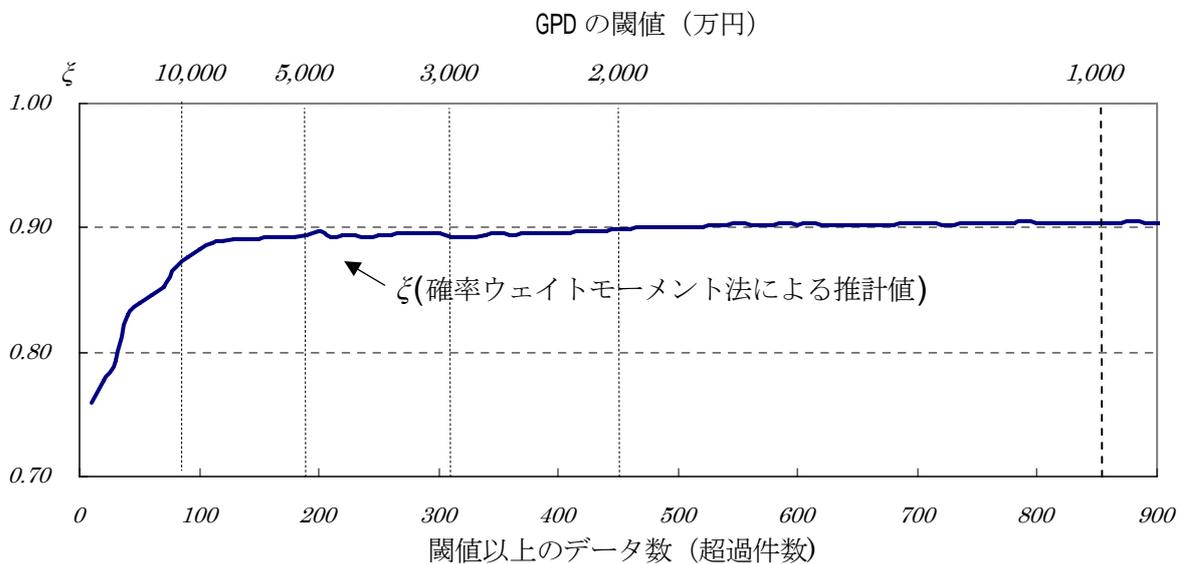
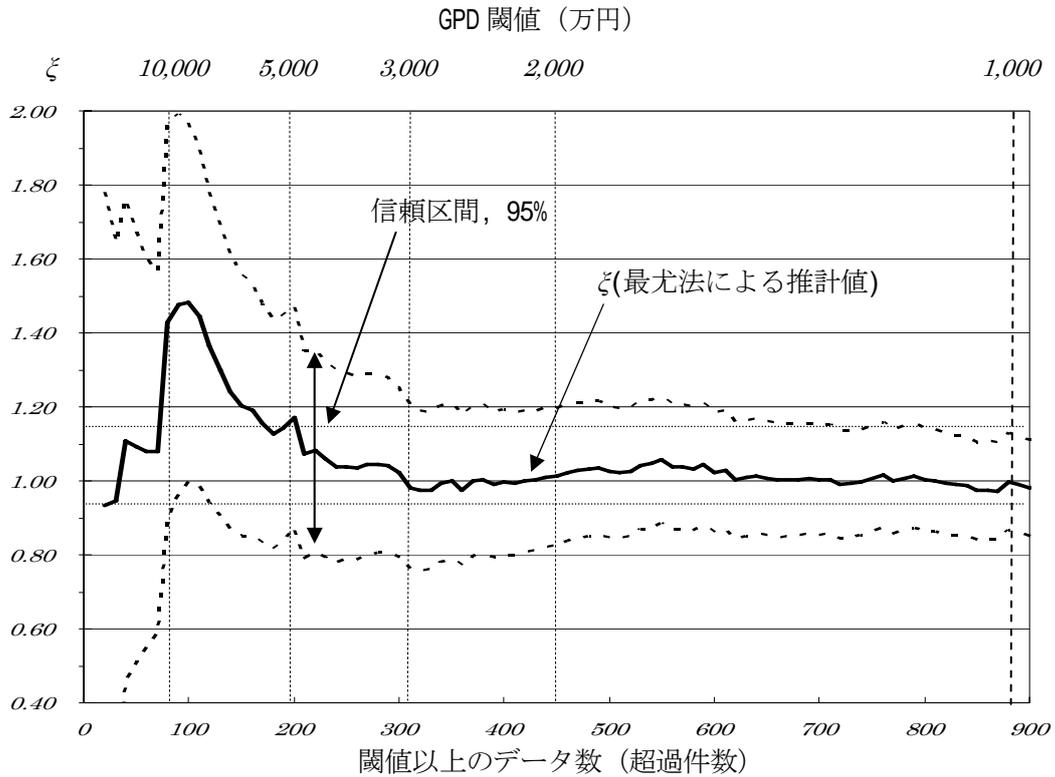


図4 超過件数・閾値毎のξの推計値：
最尤法による推計 (上)、確率ウェイトモーメント法による推計 (下)

平均超過金額

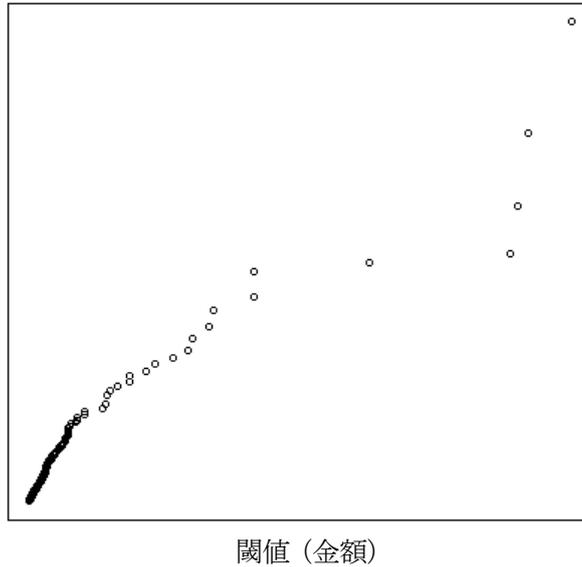


図5 平均超過プロット

3.5 推計手法

最尤法および確率ウェイトモーメント法（以下、PWM法¹⁸）の双方により推計した。推計方法により GPD のパラメータ推計値が大きく異なるため、双方の結果を示している。ただし、1,000 万円を閾値とした場合について、推計に用いたデータ数¹⁹や推計結果の適合性を踏まえ、当論文では主として最尤法による推計値²⁰を用いている。

¹⁸ PWM 法によるパラメータ推計は、以下の方法による。

() 確率加重積率を以下のように定義する。

$$M(p,r,s) = E \left[x^p \{G(x)\}^r \{1-G(x)\}^s \right] \quad (G(x) \text{ は GPD の分布関数})$$

() () で、 $p=1$, $r=0$ とした場合、 $M(1,0,s) = \beta / \{(s+1)(s+1-\zeta)\}$ が成立する。

上記に $s=0$ および $s=1$ を当てはめて、連立方程式をつくりこれを ζ , β について解く。

なお、当論文で用いた PWM 法の計算方法は、 ζ が 1 未満であること（すなわち平均が存在すること）を前提としており、推計値も 1 以上にならない。

¹⁹ Hosking and Wallis (1987) は GPD のパラメータ推計に関して「サンプル数が 500 以上にない限り、PWM 法による推計が（最尤法による推計よりも）信頼性が高い」としている。

²⁰ 最尤法によるパラメータ推計では、サンプル数が少ない場合の頑健性が劣る。一方、母集団の分布形に対する仮定が正しい場合、最尤推定量は、漸近的に望ましい性質（一致性、漸近的正規性、漸近的有効性）すべてを満たすため、好ましい推計方法であるとされることが多い。GPD を最尤法で推計した場合、解析的にパラメータを得られず、数値計算が必要になる。

3.6 推計結果

表 1 は、共通の損失規模分布の推計結果（GPD のパラメータ推計結果）である。前述のとおり当論文では閾値を 1,000 万円としたときの推計値を主に用いているが、ここでは参考までに、閾値を 100 万円、1,000 万円、1 億円、10 億円とした場合それぞれについて二種類の推計方法（最尤法、PMM 法）の結果を示している（閾値別の ξ の推計結果は図 4 も参照）。

最尤法による ξ の推計値はいずれの閾値においても大きな値（1 に極めて近いか、1 を上回る）となっており、共通の損失規模分布の裾が厚いことを示している。とりわけ、閾値を 1 億円とした場合の ξ の推計値は極めて大きく、この値を用いて計算されるリスク量は、Neslehová ら（2006）がいう「途方もなく大きなリスク量」と考えてもよいかもしれない²¹。一方、サンプル数が少なく（88 個）、パラメータ自体が不安定となっている可能性が高いこと、PMM 法による ξ の推計値が 0.877 となっていることをあわせて考えれば、閾値を 1 億円とした場合の ξ の推計値は過大な数値となっている可能性があり、将来、より多くのデータでその妥当性を検証する必要があると考えられる。

一方、閾値を 1,000 万円としたときの ξ も高め（1 に近い）だが、この値を当てはめて得られるリスク量は常識の範囲内に収まっており（この点については、「4.3.2 計量結果の現実性」を参照）、GPD のパラメータ推計値として実務的な感覚の範囲内に収まっていると考えられる。

表 1 GPD のパラメータ推計結果

閾値	100 万円	1,000 万円	1 億円	10 億円
閾値以上のデータ数	7,151	883	88	13
推計結果（最尤法）				
β	131.5	1,145.0	6,477.2	119,538
ξ	0.994	0.973	1.543	1.006
推計結果（PMM 法）				
β	140.5	1,214.2	12,313.5	119,538
ξ	0.924	0.903	0.877	0.781

β : 尺度パラメータ（万円）、 ξ : 形状パラメータ

3.7 共通の損失規模分布の適合度

ここでは、推計された共通の損失規模分布のデータへの適合度を、各種の適合度検定に

²¹ ξ が 1 以上の場合、GPD は平均値を持たず（平均値が無限大となる）、この推計値から計算されるリスク量は極めて大きくなる。Neslehová ら（2006）は、このように高い ξ が得られた分析結果は、特に注意して扱うべきであり、本当にそれだけ裾が厚いのか、推計の仮定に問題はないか（i.i.d の仮定、閾値の仮定等）を吟味すべきとしている。また、Dutta and Perry（2006）は、個別の銀行のデータに GPD を適合させた場合、多くの場合に非現実的なリスク量が算出されることをひとつの理由として、GPD（極値理論）の適用自体に否定的である。

より検証する。共通の損失規模分布には、閾値を1,000万円とし、最尤法によって推計されたGPD²²を用いている。

まず、共通の損失規模分布の18行それぞれの損失データセットに対する適合度を検定する(表2)。検定内容は以下のとおりである。

- 帰無仮説：(各銀行について)1,000万円を閾値とする超過金額(損失規模-閾値)が共通の損失規模分布に従う。対立仮説：(当該銀行の)1,000万円を閾値とする超過金額(損失規模-閾値)は共通の損失規模分布に従わない。
- 1,000万円以上の損失に関する分析であり、一定のサンプル数(5件以上)が確保される銀行、計12行に対する検定を実施した。
- 相対的にボディ部分への適合度が重視される検定手法(Kolmogorov-Smirnov検定、Cramér-von-Mises検定。以下、それぞれKS、CvM)、テール部分の適合度が重視される検定手法(2種類のupper-tail Anderson-Darling検定。以下、それぞれAD_{up}、AD_{up}²²³)の4種類の検定を実施。
- 表2では、上表に各検定のまとめ(帰無仮説が棄却される銀行数、棄却されない銀行数)を示し、下表に各銀行、各検定のP値を示している。
- 下表の最右列には、各行の最大損失データを用いて、実績値と予想値の乖離状況を確認するため、実績値と共通の損失規模分布による予想値の比率を示した²⁴。この値が100%を上回る場合は、共通の損失規模分布による各行の最大損失の予想値は過小評価であり、100%を下回る場合は過大評価ということになる。

検定結果をみると、相対的にボディ部分の適合度が重視される検定手法(KS統計量、CvM統計量)では、最尤法、PMM法いずれの推計による分布でも、すべての銀行について帰無仮説が棄却されなかった。一方、テール部分の適合度が重視される検定手法(AD_{up}、AD_{up}²)では、いくつかの銀行について帰無仮説が棄却された。各行の最大損失について、共通の規模分布による予測精度をみると、半数の銀行で過大評価、半数で過小評価となっているが、過小評価になっている場合の誤差の大きさが目立つ。

にもかかわらず、我々は、「4. オペリスク量の簡易な計算式」において、ここで推計されたパラメータを持つ損失規模分布が、個別の銀行の損失規模分布とみなせると仮定し、

²² ξ (形状パラメータ) = 0.973、 β (尺度パラメータ) = 1,145.0万円のGPD。

²³ 手法の詳細は、Chernobai, Rachev and Fabozzi (2005)。

²⁴ この値は、実際に得られる計数のうちもっともテールに近い計数を用いて、共通の損失規模分布による予測の精度を確認するものである。各行のデータ蓄積期間は、3年から10年程度なので、最大損失といってもリスク量の信頼水準とくらべるとかなり低いパーセンタイル点(最大でも90パーセンタイル点)にしか相当しないことには注意が必要である。

以下の(a)/(b)の値(%)を示している。

(a) 各銀行の最大の損失の規模(金額)

(b) 各行の経験分布における(a)のパーセンタイル点*を共通の損失規模分布に当てはめて得られる予想値

* (a)のパーセンタイル点：1,000万円以上の損失数を n としたとき、 $(100-100/2n)$ %点とする。例： $n=5$ のとき、最大損失は90%点となり、共通の損失規模分布の90%点*が予想損失となる。

リスク量の計算式を導いている。これは、以下の考えによる。

- 当分布形は得られたデータを前提に我々が最善と考えるものであり、今後データが蓄積されても大きくは変わらないと予想していること（今後のデータの蓄積に応じてより良い分布形を推計すべきことはいうまでもない）。
- 当分布はさまざまな銀行の分布の中間的な分布と考えられること。
 - ✓ 各銀行の最大損失の実績値と共通の損失規模分布による予想値の比率をみると、検定対象 12 行のうち最大損失が過小評価されている先が 6 先、過大評価されている先が 6 先となっている。すなわち、各銀行の最大損失に関する限りで、共通の損失規模分布は、各銀行の損失規模分布の中央に位置している。
- テール部分のデータはごく限られており、現時点では確定的な判断を下せないこと。
 - ✓ 表 2 で大きく過小評価されている銀行があるが、これは、データ数が十分ではないことがもっとも大きな要因であり、観測期間が増えデータ数が増加すれば大幅な過小評価は解消すると思われる。この点は、18 行全体の損失をまとめたデータセットの最大損失について同様の計算を行った場合に、予測の誤差が 3 倍程度にとどまる点にもうかがわれる。

**表 2 各銀行のデータに対する「共通の損失規模分布」の適合度検定：
検定結果のまとめ（銀行数）（上表）、各銀行の P 値（下表）**

有意水準		KS	CvM	AD _{up}	AD ² _{up}
5%	棄却されない	12	12	9	6
	棄却される	0	0	3	6
10%	棄却されない	12	12	8	5
	棄却される	0	0	4	7

	KS	CvM	AD _{up}	AD ² _{up}	最大損失 実績/予想
銀行 1	0.51	0.50	0.45	0.40	60%
銀行 2	0.89	0.84	0.52	0.37	45%
銀行 3	0.66	0.64	0.23	0.24	109%
銀行 4	0.68	0.58	0.38	0.22	32%
銀行 5	0.45	0.48	0.57	0.18	36%
銀行 6	0.32	0.35	0.41	0.08	70%
銀行 7	0.68	0.68	0.09	0.03	135%
銀行 8	0.29	0.29	0.67	0.02	24%
銀行 9	0.55	0.55	0.02	0.01	1,435%
銀行 10	0.30	0.31	0.00	0.00	1,283%
銀行 11	0.47	0.48	0.00	0.00	334%
銀行 12	0.44	0.44	0.23	0.00	109%

つぎに、共通の損失規模分布の、分析対象 18 行をまとめたデータセットへの適合度を検定する。この検定は、共通の損失規模分布として GPD を選択した妥当性を確認するために有効であると考えられる（表 3）。

帰無仮説は、「18 行の損失をまとめたデータについて、1,000 万円を閾値とする超過金額（損失規模－閾値）が共通の損失規模分布に従う」、対立仮説は、「18 行の損失をまとめたデータについて、1,000 万円を閾値とする超過金額（損失規模－閾値）が共通の損失規模分布に従わない」である。

結果をみると、KS 検定や CvM 検定の P 値が 70%を超えており、帰無仮説は棄却されない。一方、AD_{up} 検定や AD²_{up} 検定の P 値は低く、ともに帰無仮説は 5%の有意水準では棄却されないが、10%の有意水準では棄却される。

表 3 「共通の損失規模分布」^{*}の 18 行を統合したデータ^{}に対する適合度検定**

	P 値	有意水準	
		5%	10%
KS	0.82	棄却されない	棄却されない
CvM	0.75	棄却されない	棄却されない
AD _{up}	0.07	棄却されない	棄却される
AD ² _{up}	0.08	棄却されない	棄却される

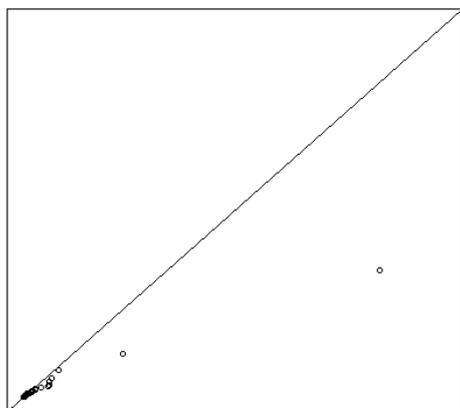
^{*} 「3.6 推計結果」で推計されたもの（閾値 1,000 万円、最尤法による推計）

^{**} 1,000 万円以上の損失に関して検定

共通の損失規模分布の 18 行をまとめたデータセットに対する適合度を QQ プロットで見ると、図 6（左図）になる。ボディ部分での適合度が良い一方、テール部分の適合度は劣り、推計値が実績値を下回る（過小評価する）傾向がみられる。比較のために、対数正規分布²⁵を適合させた場合の QQ プロットを示す（図 6 右図）。対数正規分布を用いた場合、GPD との比較では、特にテール部分の当てはまりが悪いことがみてとれる。

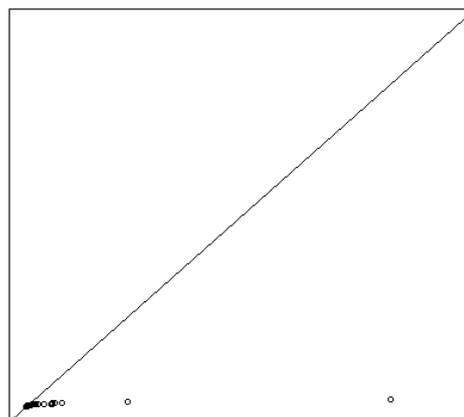
²⁵ 1,000 万円以上の損失データ（単位：万円）の自然対数を取り、最尤法により正規分布を当てはめた。パラメータ推計値は、（対数値の）平均 = 7.948、（対数値の）分散 = 1.072

損失規模（推計値）



損失規模（実績）

損失規模（推計値）



損失規模（実績）

図6 QQプロット：GPD（左）、対数正規分布（右）

3.8 共通の損失規模分布の安定性

3.8.1 少数の巨額損失に対する安定性

ここで推計された共通の損失規模分布の形状は、限られたデータをもとにしている。このため、損失規模分布の形状が、少数の巨額損失（テールデータ）に左右されるのではないか、その場合、分布形が十分に安定しているとはいえないのではないかと、懸念がある。この点を調査するために、全銀行の全データによるデータセットに対して損失規模（損失金額）の大きなデータを除外、あるいは追加した場合に、分布形がどのように変化するか、すなわちGPDのパラメータ（ ξ : 形状パラメータ、 β : 尺度パラメータ）がどのように変化するかをみた。

なお、ここでは、 ξ 、 β 双方の変化を示すが、リスク量の観点からは ξ の変化がより重要であることに留意する必要がある。すなわち、以下に示すように同じデータの変動に対する感応度は ξ の方が β にくらべて大きいという点に、当論文で提案するオペリスクの簡易な計算式を用いて計算すると、リスク量は ξ の変化に対し大きく変化する一方、 β の変化に対してはさほど大きく変化しない²⁶。

図7上図は、損失規模の大きい方から上位20個の損失を順次除いていったときの両パラメータの変動を示している。 ξ の値は大規模なデータを順次除いていくことにより、徐々に小さくなり（より非保守的になる）、上位20個の損失を抜いたときに0.679まで低下する。一方、 β の値は大規模なデータを順次除いていくことにより徐々に大きくなり（保守

²⁶ 例えば、1,000万円以上の損失件数が年間10件の銀行について、「4. オペリスク量の簡易な計算式」で提案するオペリスク量の簡便式でリスク量を計算すると、 ξ (0.973) が1パーセント変化するだけで、リスク量は10パーセント近く変化する。一方、同じ銀行で β (1,145万円) が1パーセント変化しても、リスク量の変化は1パーセント程度にとどまる。

的になる)、上位 20 個の損失を除いたときに約 9%増加し、1,251.8 万円となる。

逆に、巨額の損失を追加（追加する 1 件の損失の金額を 100 億円から 100 億円刻みで 1 兆円まで増加）したときのパラメータの変動を示したものが図 7 下図である。このとき、 ξ は徐々に大きくなるが、追加する損失の規模（金額）が大きくなるにつれて ξ の増加幅は小さくなり、1 兆円の損失を追加しても、1 をわずかに上回る（1.012）程度にとどまる。一方、 β の値は徐々に小さくなるが、変化幅は極めて小さく、1 兆円の損失を追加した場合でも 1,127.4 万円まで減少するにすぎない。

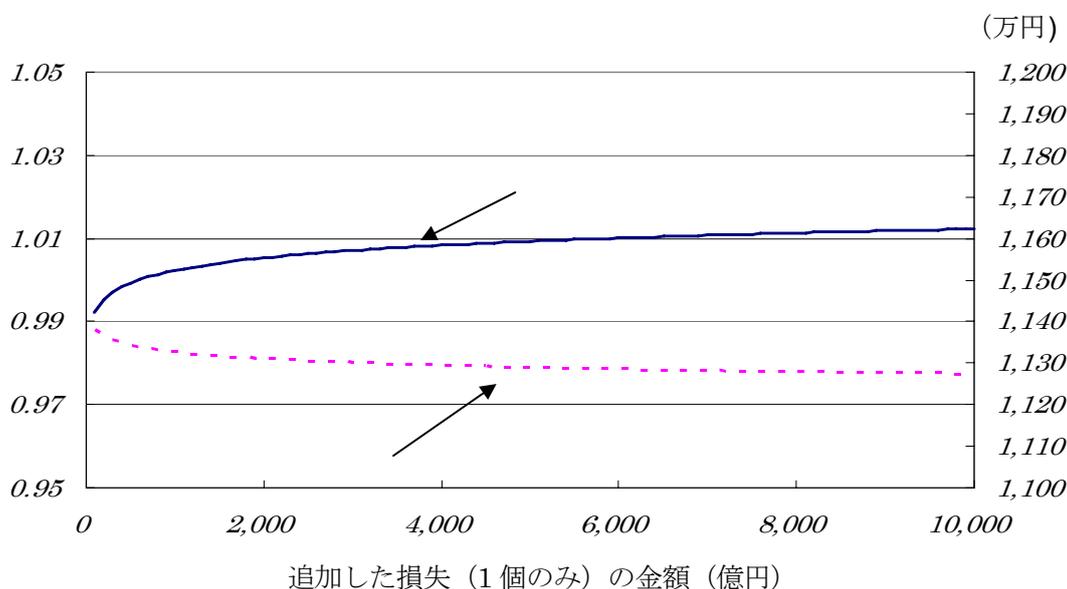
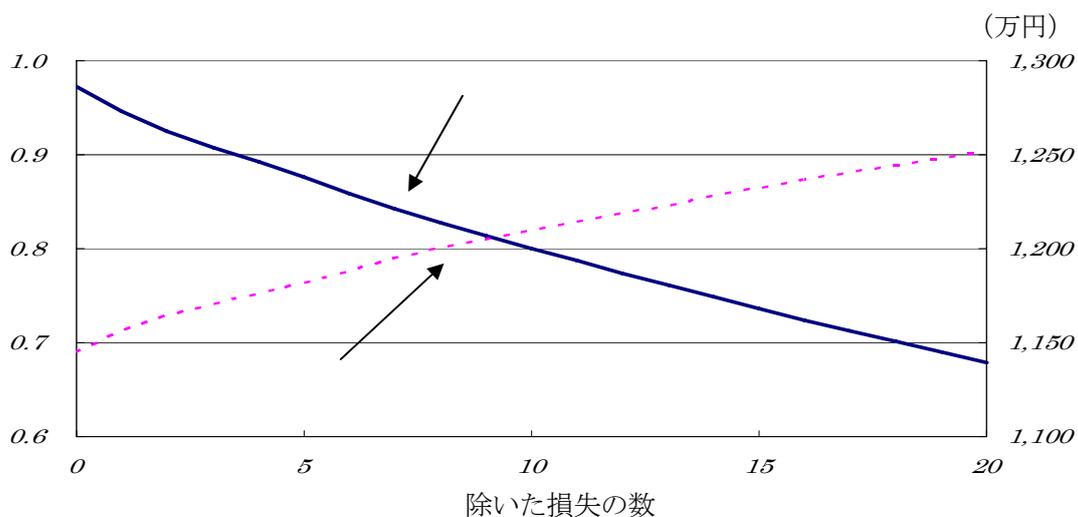


図 7 大規模損失に対する形状パラメータの挙動：
大きな損失から順次除いた場合（上）、巨額の損失を 1 損失のみ追加した場合（下）

3.8.2 損失データ数の大きい銀行の影響

当論文では、LDCE2008における邦銀の損失データを、加工や削除することなくそのままひとつのデータセットに統合し、そのデータセットに対して損失規模分布を当てはめている。このため、一部の規模が大きい銀行（一般的には、損失件数は銀行の規模にほぼ比例する）や、データ収集期間が長い銀行（当論文の分析対象のデータでは、銀行によってデータ収集期間が異なる）の損失データが、 ξ の推計値に大きな影響を与えている可能性がある。

この点に関する参考材料として、サンプル 18 行のうち、地銀 9 行²⁷にサンプルを絞って GPD のパラメータを推計（最尤法、閾値 1,000 万円）した。

推計結果をみると、GPD の形状パラメータ ξ は 0.690、尺度パラメータ β は 1,589 万円となる。これは、18 行全体の推計値（ $\xi=0.973$ 、 $\beta=1,145$ 万円）が示すリスクプロファイルよりもかなり安全なリスクプロファイルを示している。すなわち、18 行全体の推計値を地銀 9 行に当てはめた場合、リスク量の過大評価につながる可能性が高い²⁸。

にもかかわらず、「4. オペリスク量の簡易な計算式」では、リスク量の簡易な計算式を導く際に、18 行全体の推計値（ $\xi=0.973$ 、 $\beta=1,145$ 万円）が、地銀 9 行にも当てはまるものとして扱っている。

これは、地銀 9 行のデータに含まれる 1,000 万円以上の損失が少なく、安定的な結果とは考えにくいこと、以下の感応度分析の結果、18 行全体の推計値を使用することが非現実的とは言い切れないことから、より広い範囲のサンプルに基づく推計値の方が現実に近いと現時点では判断しているためである。感応度分析の内容と結果は以下のとおり。

- 地銀 9 行によるデータセットに 1 件の巨額損失を追加したときのパラメータの推計値（最尤法、閾値 1,000 万円）の変化を調べた。
- 上記パラメータを当論文で提案する簡易な計算式に当てはめてリスク量の変化を調べた。追加する巨額損失を約 20 億円まで増加させ、推計されたパラメータが $\xi=0.947$ 、 $\beta=1,510$ 万円となったときに、当該リスク量がサンプル全体（18 行）から推計したパラメータ（ $\xi=0.973$ 、 $\beta=1,145$ 万円）を用いて計算したリスク量を超えた。
- 地銀 9 行の総資産（データ収集時）は、平均 6.6 兆円、提出された損失データの収集期間は平均 4 年強。すなわち、地銀 9 行によるデータセットに約 20 億円の追加損失を 1 件追加することは、「資産 6.6 兆円の銀行で約 36 年（ $4 \times 9=36$ ）に 1 度、同金額の損失が発生する」ことと解釈可能である²⁹。

²⁷ いずれも総資産は 20 兆円未満と規模が相対的に小さく、これらの銀行の損失件数の全体に占める割合はごく小さい。GPD の推計（閾値 1,000 万円）に用いた地銀 9 行の損失データは 41 件であり、全 18 行の 1,000 万円以上の損失データ（計 883 件）の約 4.6%に相当する。

²⁸ 当論文で提案するオペリスク量の簡易な計算式を用いたリスク量の計算結果は以下のとおり（1,000 万円以上の損失の年間件数を 10 件とし、保有期間 1 年、信頼区間 99.9%のリスク量を計算）。

- 18 行全体で推計されたパラメータによるリスク量：918 億円
- 地銀 9 行で推計されたパラメータによるリスク量：132 億円

²⁹ この仮定の現実性の判断材料となる公表データは筆者らの知る限り存在しないが、銀行関係者との日頃のや

3.8.3 分布形の時間的な安定性

共通の損失規模分布の時間的な安定性を検証するためには、長期的なデータが必要であるが、この点に関する参考材料を提供するために、データセットの時期（年）による形状パラメータ ξ 、尺度パラメータ β の変化を示した（図8）。単年ではいずれの推計値も大きく振れている（破線）。ただ、GPDのパラメータ推計値はデータ数が少なくなると不安定になる傾向がある。推計値の振れは、損失規模分布の形状が各年で変化したというよりは、データ数の少なさが原因と考えている³⁰。

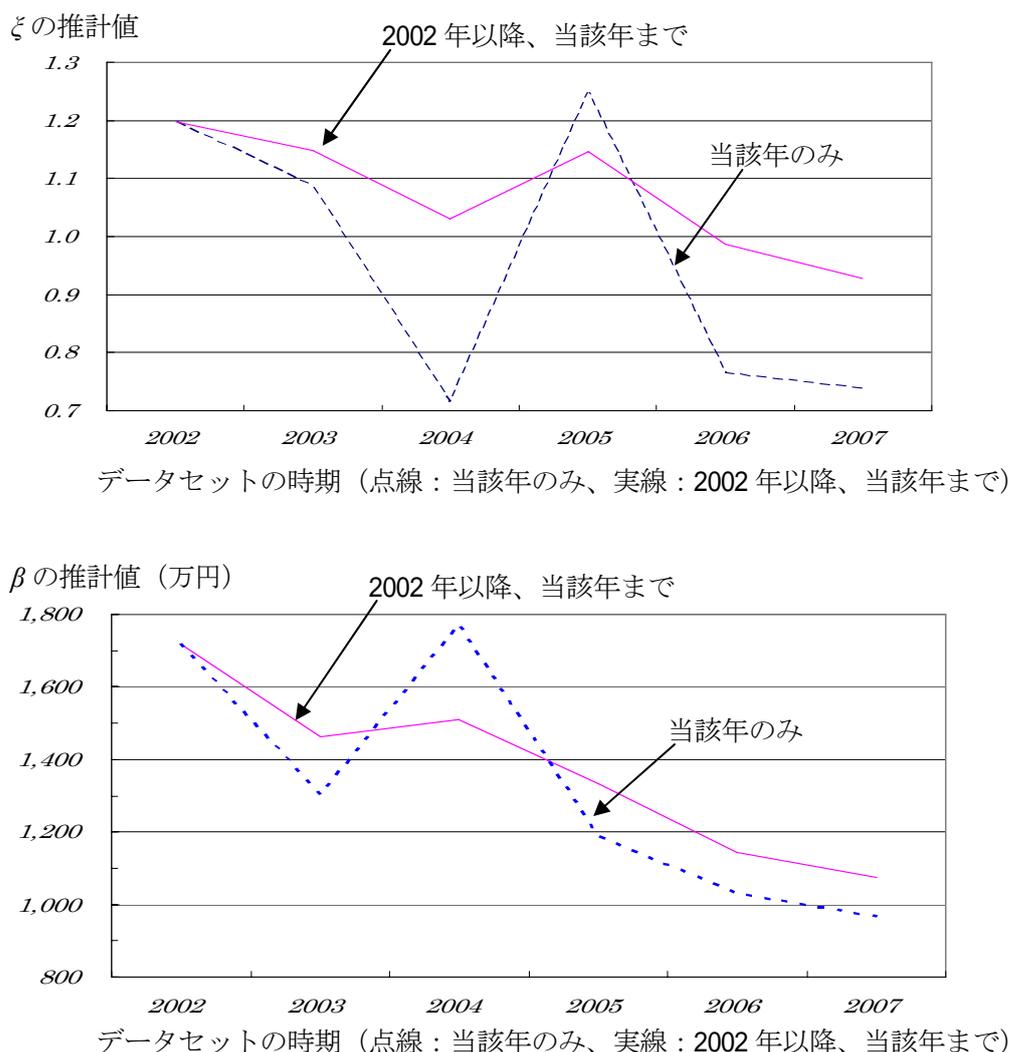


図8 パラメータ推計値の時系列変化：

形状パラメータ ξ の推計値（上）、尺度パラメータ β の推計値（下）

り通りの感触からは上記仮定が過度に保守的とまでは言い切れない。

³⁰ 最尤法による推計におけるパラメータ ξ とデータ数の関係を図4に示している。また、筆者らの経験でも、銀行のリスクプロファイルに影響を与える外部環境や内部統制の状況が年度毎に当推計値が示すほど大きく変化しているとは考えにくい。

4. オペリスク量の簡易な計算式

4.1 オペリスク量の簡易な計算式

ここでは、共通の損失規模分布がサンプルの 18 行に当てはまるという仮定に立ち、損失分布手法³¹に従って 18 行それぞれに用いることができるオペリスク量（年間損失金額の 99.9%VaR 値）の計算式を導く。

損失分布手法を適用してリスク量を算出する際には、モンテカルロ・シミュレーションを行うことが多いが、当論文では、モンテカルロ・シミュレーションを行わず、Böcker and Klüppelberg (2005) の近似式³²（いわゆる「単一の損失による近似」）に、「3. 共通の損失規模分布の推計」で推計された GPD を当てはめることで、リスク量の解析解を求めている。

導出されたリスク量の算出式は枠内のとおりである³³。計算に用いられる変数は一定の金額以上³⁴の損失の年間件数（例：1,000 万円以上の損失の年間件数）だけである。

信頼水準 c のオペリスク量（保有期間 1 年）

$$= (R - u + \beta/\xi) \cdot [1 / (1 - c) \cdot N_R]^\xi - (-u + \beta/\xi)$$

記号の定義：

1. 個別の推計で用いられる変数

c = 信頼水準（例：オペリスクの所要自己資本の場合は 99.9%）

R = 観測対象となる損失の規模（例：1,000 万円）。GPD の推計に用いた閾値（当論文の主たる推計では 1,000 万円）以上とする必要がある。

N_R = 金額 R 万円以上の損失の年間件数

2. 共通の損失規模分布のパラメータ（「3. 共通の損失規模分布の推計」の推計値を用いる）

ξ = GPD の形状パラメータ

β = GPD の尺度パラメータ

u = GPD の推計に用いた閾値

「3. 共通の損失規模分布の推計」で推計されたパラメータの値（ ξ :0.973; β :1,145.0 万円）を適用すると

観測期間1年信頼水準 99.9% のオペリスク量（万円）

$$= (R + 177) \cdot (1000 \cdot N_R)^{0.973} - 177$$

³¹ 推計された頻度分布と損失規模分布から年間損失金額分布を推計する。

³² Böcker and Klüppelberg (2005) は、損失規模分布の裾が十分に厚い場合、リスク量は信頼水準に該当する単一の損失でよく近似できることを示した。

³³ 当計算式の導出は補論 3 を参照。

³⁴ 損失規模分布上で任意の損失の年間発生件数を与えれば、他の損失の件数も定まるため、特定の信頼水準のリスク量を求めることができる。観測対象となる損失の規模は、分布形の推計に用いた閾値以上とする必要がある。これは、損失規模分布の形が、分布形の推計に用いた閾値（当論文の主たる推計では 1,000 万円）以上の部分で特定されているためである。

4.2 「単一の損失による近似」に起因する計測誤差

当計算式では、年間損失金額の VaR を求める際に Böcker らによる近似計算を用いているため、当該近似計算に起因する計測誤差を確認する必要がある。

当誤差の評価は、一般的な損失分布手法によって求めた 99.9%VaR 値と、当計算式で求めた 99.9%VaR 値を比較することで行った³⁵（両計算方法の比較は表 4）。

結果（表 5）をみると、閾値（1,000 万円）を上回る損失の年間件数が 10、100、1,000 件のいずれの場合でも、誤差は 0.6 ～ 1.6%の範囲内に収まっている。邦銀の場合、規模の大きな銀行でも、1,000 万円以上の損失は年間数十件程度、海外の大規模銀行でも年間数百件程度にとどまると想像される³⁶ため、仮に当計算式を広くサンプル銀行以外に適用した場合でも、誤差は実用上差し支えない範囲に収まると思われる。

なお、上記の近似誤差は、「分布のファットテール性（ここで用いた損失規模分布は極端なファットテールである）」、「高水準の信頼水準（当計算式では 99.9%）」を前提としており、これらの条件が整わない場合には、誤差が拡大しうることには注意する必要がある³⁷。

表 4 当論文の計算方法と一般的な損失分布手法との比較

	(A) 当論文の計算方法	(B) 一般的な損失分布手法
概要	Böcker らの近似式を用いて、VaR 値を解析的に直接計算する。	損失頻度分布、損失規模分布を組み合わせた年間損失分布をモンテカルロ・シミュレーションにより求め、VaR 値を計算する。
頻度分布	特定の分布を仮定しない ³⁸ 。年間の損失件数（過去数年分の平均値等）を用いる。	ポアソン分布と仮定。
損失規模分布	1,000 万円を閾値とする超過分布に GPD を適用（共通の損失規模分布、パラメータは最尤法により計算）	
計算方法	Böcker らの近似式（解析解）を用いており、モンテカルロ・シミュレーションは実施していない。	モンテカルロ・シミュレーション（1 億回）
1,000 万円未満の損失	理論的には織りこんでいる。	計算には織りこんでいない（発生しなかったものとして扱っている）。

³⁵ Degen (2010) は、Böcker らの近似式の近似精度を評価する解析的な枠組みを提案している。その結果は、当節における計算結果と整合的である。

³⁶ 18 行における 1,000 万円以上の損失は、総資産 1,000 億円あたり 0.021 件程度（18 行の中央値）、総資産が 100 兆円の銀行では年間 21 件程度となる。また、LDCE2008 では、10 万ユーロ（約 1,600 万円）以上の損失は、総資産 10 億ユーロあたり 0.19 件程度（118 行の中央値）であり、総資産が 1 兆ユーロ（約 160 兆円）の銀行の場合、年間 190 件程度。

³⁷ 「単一の損失による近似」の近似誤差については、Degen (2010) のほか、Böcker and Sprittulla (2008) を参照。また、森ら (2007) でも、各種の分布形について数値計算による誤差の評価がなされている。

³⁸ Böcker らの近似計算では、損失規模分布を特定する必要があるが、頻度分布を特定する必要はない。これは、近似式から、頻度分布の裾に関する情報が消え期待値のみが残るからである。一方、当論文で比較対象とした計算では、頻度分布にポアソン分布を仮定している。

表 5 Böcker らの近似式に起因する計測誤差

年間損失 件数	(A) 当論文の計算方法による リスク量 (単位: 億円)	(B) 一般的な手法によるリ スク量 (単位: 億円)	(A) / (B)
10	918	924	99.4%
100	8,624	8,731	98.8%
1,000	81,039	82,380	98.4%

4.3 当計算式の実用性評価

ここでは Dutta and Perry (2006) の整理に従って当計算式の実用性を評価する。以下の評価結果は主観的なものであり、議論の余地はあるが、少なくともベンチマークや経営管理のツールとして用いることは十分に可能と考える。

Dutta and Perry (2006) のモデルの評価項目は、以下のとおりである。

- データへの適合度: データへの統計的な適合度。
- 計量結果の現実性: 統計的な適合度が高いとしても、それを用いて計算されたオペリスク量の水準が現実的か。
- データの特徴、挙動をきちんと表現していること: 当該モデルが実際のデータの特徴をよく捉えており、モデルの挙動に合理性があるか。
- 柔軟性: 当該モデルが、どの程度広い範囲のデータに適用可能か。
- 簡便性: 実務上の適用が容易か。

4.3.1 データへの適合度

共通の損失規模分布の適合度は「3. 共通の損失規模分布の推計」で示したとおり、完全とはいえないが現実に銀行で用いられているモデルとくらべて遜色はなく、近似値として用いる限りにおいて概ね満足のいくものと考えている。ただし、個別の銀行で用いる場合には、銀行毎に適合度に違いがあることを踏まえて、計算結果を解釈する必要がある。

4.3.2 計量結果の現実性

調査対象 18 行から報告された粗利 1,000 億円あたりの年間損失件数³⁹ (表 6 中段) を当

³⁹ 調査対象先の邦銀 18 行それぞれについて粗利 1,000 億円あたりの年間損失件数を算出し、その値を順番に並べたときの中央値や、4 分位点を用いている。これらの値は、調査対象先 18 行の典型的な損失件数とその幅を示すものと考えられる。

具体的には、集計対象が 18 先あるため、中央値は、9 番目の先と、10 番目の先の平均値、4 分位値は、5 番目と 6 番目の計数間を 1:3 で内分した値 (例えば、5 番目の計数が 40、6 番目の計数が 50 のときには、42.5) としている (すなわち、最小値を 0%値とし、最大値を 100%値として、25%値、75%値を求めている)。

なお、同様の計数は、LDCE2008 で、全地域合計、地域別 (オーストラリア、欧州、日本、北米、ブラジル/インド) について入手可能。

計算式に当てはめることで粗利 1,000 億円あたりのリスク量を計算し、計算結果の現実性を確認した（表 6 下段）。計算結果をみると、18 行の頻度の中央値を用いた場合（調査対象 18 行の典型的な先の計数との解釈が可能）で、リスク量が基礎的手法によるリスク量（1,000 億円×15%=150 億円）の約 3/4 程度となっている⁴⁰。

この結果が、「現実的か否か」は判断がわかれるだろうが、これらは、邦銀が自ら計算しているリスク量と大きく離れたものではない。オペリスク計量モデルの開発過程で、明らかに非現実的と思える結果が得られることは決して珍しくはないことを考えれば、この点では、当計算式には合格点がつくと考えている。なお、仮に邦銀で推計されたパラメータと同水準のパラメータを世界の銀行に当てはめた場合（5. 「当論文の分析の他の銀行への適用可能性」で述べるように、先行研究や各種損失データ収集の結果をみると、邦銀で推計された値と世界の他の銀行で推計された値は大きく変わらないと推定される）、リスク量は基礎的手法によるリスク量の 3~4 倍、粗利の半分から粗利全体の金額に及びうる。この金額は、多くの銀行でオペリスク量として計算されている値とくらべると非常に大きい、それ自体は決して非現実的な計数ではない⁴¹。

表 6 18 行の損失件数を用いた粗利益 1,000 億円あたりのリスク量

損失規模の閾値	1,000 万円	1,578 万円 (10 万ユーロ)	1 億円
上記金額以上の 年間損失件数	1.147 件 (0.777 - 1.682)	0.8789 件 (0.4372 - 1.540)	0 件 (0 - 0.159)
リスク量 (億円) (BIA によるリスク 量は 150 億円)	111 億円 (76 - 162)	128 億円 (65 - 222)	0 億円 (0 - 141)

凡例

0.1147 件 (0.777-1.682 件)	18 先の値の中央値 18 先の値の 25%値および 75%値
-----------------------------	------------------------------------

4.3.3 データの特徴、挙動をしっかりと表現していること

ここでは、当計算式の挙動の特徴を 3 点示し、それらを当基準（モデルがデータの特徴

⁴⁰ 「4.3.3 データの特徴、挙動をしっかりと表現していること」で示すように、当計算式によるリスク量は損失件数に完全には比例しないことに注意する必要がある。すなわち、 ξ が 1 を下回る限りにおいて、閾値を上回る損失件数が 10 倍になったときに、リスク量は 10 倍には達しない。このため、粗利益あたりの損失件数が同じでも、粗利益が大きな銀行の方が、リスク量と粗利益の比率（当式によるリスク量 / 粗利益）は小さい（脚注 42 も参照）。

⁴¹ オペリスクによって破綻した銀行の例は多くはない。この点をもって、当計算式によるリスク量が過度に保守的とする反論も想定できる。しかし、粗利益に相当する損失が発生しても、必ずしも銀行が破綻に至るような金額になるわけではない。

をよく捉えており、モデルの挙動が直感や経験に合致するか) に当てはめて評価する。当基準に絶対的な尺度があるわけではないが、これらの挙動の特徴は、筆者らのオペリスク損失に関する経験を直感的にも論理的にもよく説明しているように見える。また、当計算式はリスク管理上有益な挙動を多く備えているが、この点も当計算式の挙動が直感や経験に合致していることを示している。

() 当計算式によるリスク量は、変数(年間損失件数)にほぼ比例する。

図9、表7に示されるように、 $\xi=0.973$ とした場合、当計算式によるリスク量は年間損失件数にほぼ比例する⁴²(年間損失件数が2倍になったときにリスク量は約2.0倍となり、3倍になったときにリスク量は約2.9倍になる)。

この挙動は、オペリスク量はテール損失によって決まるという通念に一見反するが、当計算式でもテール損失によってリスク量が決まることには違いがない。すなわち、当計算式はボディ部分の計数を求めているわけではなく、テール損失よりもはるかに規模の小さな中規模の損失の年間件数と、テール損失の年間件数との関係が安定的であると仮定してテール損失の大きさを推計し、それをリスク量としている。

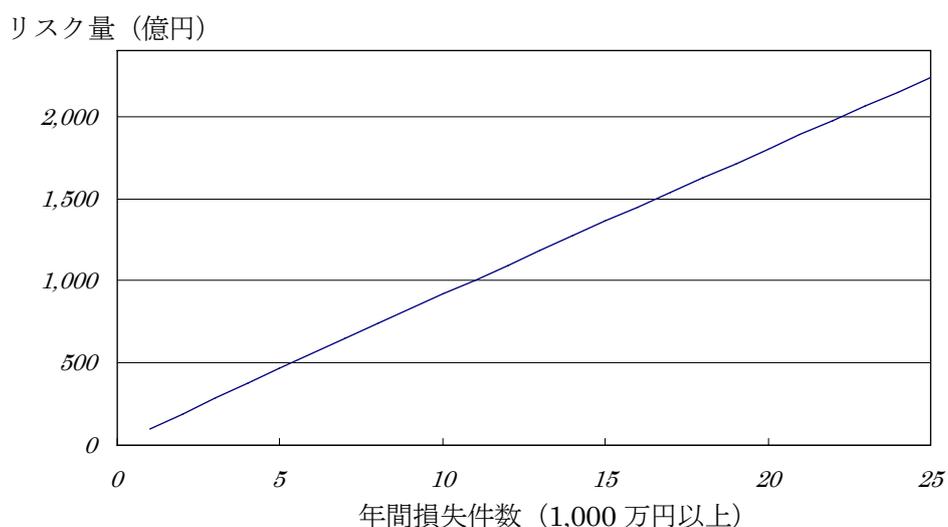


図9 計算式の挙動(損失件数とリスク量の関係)

表7 上記グラフ(図9)の数値例

損失件数	5	10	15	20	25
リスク量(億円)	467	918	1,362	1,801	2,238

⁴² より厳密には、年間損失件数が t 倍になったとき、 $-(-u+\beta/\xi)$ の項(具体的には -177)を無視すれば、リスク量は、 t^ξ 倍になる。

() 当計算式によるリスク量は、少数の巨額損失の発生に対してほとんど変動しない。
 (i) と表裏一体の問題だが、仮に巨額の損失が 1 件発生しても計算に用いる損失件数 (i) は 1 増加するだけで、計算結果は大きく変わらない。リスク量の増加幅は、小額の損失 (ただし、閾値よりは大きい) が 1 件発生した場合と同じである。

() 当計算式によるリスク量は、 ξ の変化に対して極めて高い感応度を有する。
 当計算式によるリスク量は、 ξ の変化に対して極めて高い感応度を有する (図 10)。図 10 では、 ξ の推計値と、当計算式によるリスク量の関係を示している ($\xi=0.973$ としたときのリスク量を 100 として図示)。

例えば、1,000 万円以上の損失が年間 10 件の銀行において、 $\xi=0.973$ が、0.02 ポイント増加 (約 2% の増加) して $\xi=0.993$ となるだけで、リスク量は、約 18% 増加する。一方、 $\xi=0.973$ が、0.02 ポイント減少 (約 2% の減少) して $\xi=0.953$ になるだけで、リスク量は、約 15% 減少する。このように、 ξ に対する感応度が極めて高いために、個別の銀行が内部損失データだけを用いて ξ を決定し、その合理性を説明することは困難と思われる。

オペリスク量 ($\xi=0.973$ のときのリスク量を 100 とする)

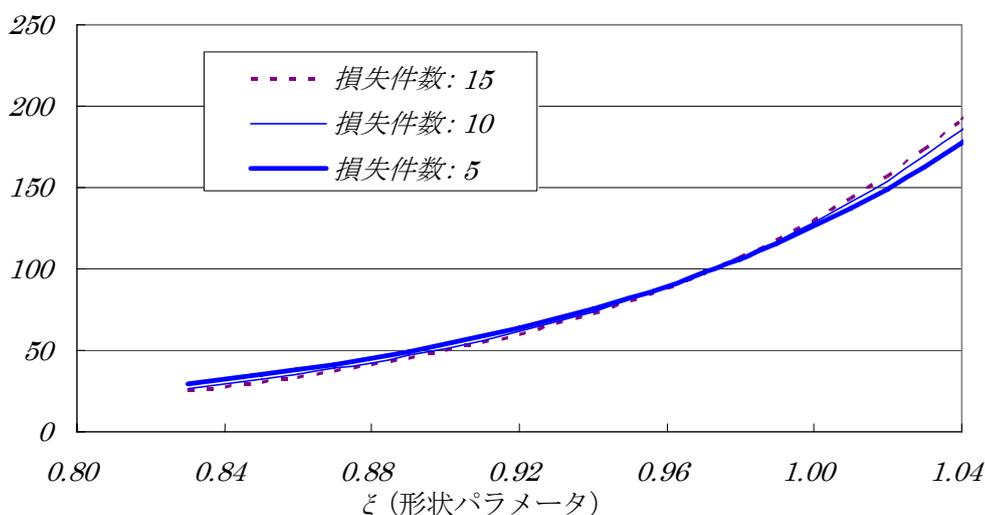


図 10 計算式の挙動 (ξ とリスク量の関係)

当計算式が、論理的かつ直感に合致していると考えられるか否かは、上記、()、() に対する評価に大きく依存する。()、() は、表裏一体のものであり、「オペリスク量はテール損失の頻度と大きさによって決まるが、相対的に小さな損失の件数によってテール損失の頻度、大きさを推計できる。すなわち、オペリスクは、相対的に規模の小さな損失の発生状況に反映される」という考え方と整合的である。

この考え方は、「頻度の小さい巨額損失だけにオペリスクの状況が反映される」との考え方にはなじみにくい。しかし、以下に箇条書きで示す実務家からよく聞かれる見方とは整合的である。

- 「小さな損失の件数を削減することが致命的な損失を抑えることにつながる」(いわゆる「割れ窓理論」と共通する考え方)。
- 仮に1件の巨大損失が発生したからといって、それだけでオペリスクが突然増大したとはいえない。一方、損失件数が大きく変化したときは、業務内容、コントロール、あるいは損失の収集方法が変化していることが多い。
- 損失の発生はコントロールしやすいが、発生した損失の大きさをコントロールすることは難しい(損失が発生したときの大きさは偶然によるところが大きい)。

()、()の特質のために、リスク管理上、便利な点もある。そして、リスク管理に使いやすいという事実自体、当計算式の現実性、直感的な正しさの裏付けのひとつといえる。

第一は、リスク量の安定性である(これは実務的には便利な性質である)。当計算式によるリスク量は、たまたま発生した1件の巨額損失によって大きく振れることがない⁴³。当計算式によるリスク量は損失件数の変化に比例して変化するが、損失件数は、多くの銀行で比較的安定している。

第二に当計算式によるリスク量が、完全ではないものの、実用で想定されるような範囲では、線形性を持つとみなせること。このためリスク量は、実務上、加法性(銀行を分割した場合の各リスク量の合計は分割前の全体のリスク量に等しい)を持つとみなせる。このため、当計算式の考え方に従えば、銀行間の分割や統合の際のリスク量計算が容易に行える。また、部門間でも共通の損失規模分布が適用できるとの前提を置けば(パーゼルの業務区分別の分析結果については、補論2を参照)、リスク量を一定の金額以上の損失件数によって配賦すれば概ね妥当な結果が得られるため部門間のリスク量の配賦も行いやすい。

第三に、日々のリスク管理での使いやすさ。ほとんどの場合においてオペリスク量の大半はテール事象(巨額損失)により決まるため、テール事象の発生を防止することがオペリスクの主眼になる。しかし、当計算式に従えば直接の制御対象は日々、発生する比較的少額の損失となる。このため、当計算式は日々のリスク管理の目標として使いやすい。

4.3.4 柔軟性

当計算式では、共通の損失規模分布が仮定され、銀行毎のリスクプロファイルの違いは、損失件数にのみ反映されていると捉えている。すなわち、共通の損失規模分布が当てはまる限り、どのような銀行にも対応できる柔軟性を備えている。

⁴³ ここでは当該巨額損失によって共通の損失分布の形状が変わらないことを前提としている。「3. 共通の損失規模分布の推計」でみたとおり、巨額損失が1件加わっても共通分布の形状はあまり大きく変化しないため、こうした前提を置くことは十分に現実的と考えられる。

問題は、共通の損失規模分布が、サンプルとなった 18 行以外の銀行に当てはまる範囲だが、この点は別途、「5. 当論文の分析の他の銀行への適用可能性」で検討する。

4.3.5 簡便性

当計算式は簡便であり、そのために透明性が高くなっている。当式は、変数を 1 個しか用いておらず、モンテカルロ・シミュレーションも不要である。唯一の変数は年間損失件数であり、比較的取扱いやすい。また、シミュレーションが不要なために、同じ変数に対して常に同じリスク量になる。

実用にあたっての大きな問題はデータ収集である。当計算式をそのまま当てはめるためには、LDCE2008 と同様のデータ収集基準でデータを収集し、損失件数を数えることが必要となる。

5. 当論文の分析の他の銀行への適用可能性

これまでは、分析対象の邦銀 18 行に当てはまる損失規模分布を推計し、それを用いてリスク量の計算式を導出した。筆者らは、公表されているオペリスク損失データ調査の結果や、それらをもとにしたオペリスク計量の先行研究から判断して、当論文で 18 行の損失データから推計された損失規模分布は、他の邦銀、さらには海外の銀行の損失の多くに適合する可能性が高く、従って当計算式も大きな変更なく、より広い範囲の銀行に適用できる可能性が高いと考えている。

ここでは現時点で得られる公表されている調査結果や先行研究を示すが、筆者らは、この点が今後のデータの集積と分析によって確認されることを期待している。

5.1 損失データ収集の結果

損失規模分布の形状は、各種の損失データ収集で公表された計数から類推することができる。ここでは、LDCE2008、米国の 2004 年調査⁴⁴の計数を用いた損失規模分布の姿を示す。いずれも、形状パラメータ (ξ) がおおよそ 1 程度の GPD との想定と整合的である。

図 11 は、LDCE2008 で世界の 118 行（邦銀 18 行を含む）から報告された、いくつかの閾値毎の損失年間件数（年間の粗利 10 億ユーロあたり）の銀行間の平均値ないし中央値⁴⁵を図 1～3 と同様に図示したものである。

グラフ上ではこれらの点はほぼ直線上に並んでいる。これらを直線で回帰すると傾きは約 -0.97 となる。当直線の傾きは GPD の形状パラメータ ξ を用いて計算した $-1/\xi$ の値とほぼ等しい。これを用いて ξ を求めると約 1.03 となり、邦銀 18 行での推計値 (0.973) に近い。これは、2 万ユーロから 1 億ユーロ（約 158 億円）の損失（LDCE2008 の公表値から頻度が得られる最大の損失）の範囲で、邦銀 18 行から推計された共通の損失規模分布とほぼ同様の分布形を想定しうることを示している。

図 12 は、LDCE2008 の計数から地域別に同様のグラフを描いたものである（出所：LDCE2008 の Table ILD7）。ブラジル/インドを除く他の地域（オーストラリア、ヨーロッパ、日本、北米）で観測された損失規模分布がよく似ており（グラフ上では、ブラジル/インド以外は区別がつかない）、両対数グラフ上で傾きが -1 の直線に近いことがみてとれる。

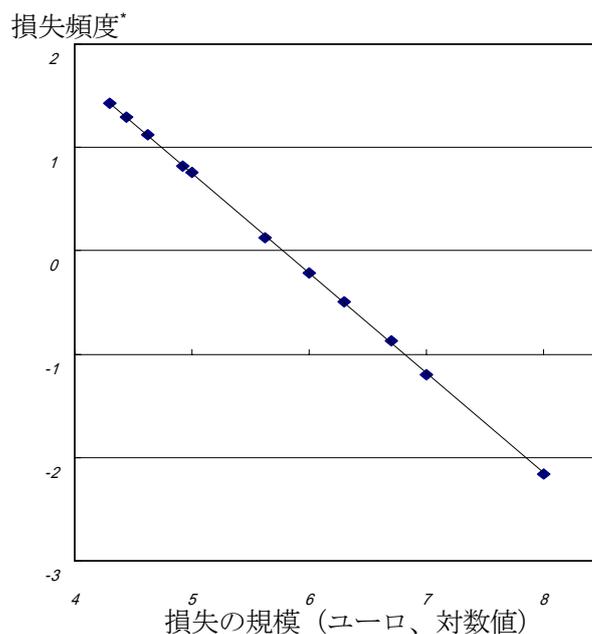
図 13 は、米国の 2004 年調査で公表された計数から同様のグラフを描いたものだが、当グラフもよく似た形となっている。

⁴⁴ Federal Reserve System, Office of the Comptroller of the Currency, Office of Thrift Supervision, Federal Deposit Insurance Corporation (2005)

⁴⁵ 図 11 における銀行間の平均値、中央値とは以下をいう。

平均値： 全銀行のデータをまとめて（あたかもひとつの銀行であるかのように扱って）作成したデータセットについて年間損失件数を計算する。

中央値： 各銀行のデータについて年間損失件数を計算し、それらの中央値を計算する。
平均値が得られる場合は平均値を用い、中央値は平均値が得られない場合にのみ用いている。



* x 軸の金額以上の損失の年間件数 (年間粗利 10 億ユーロあたり、対数値)

図 11 世界 118 の銀行の損失規模分布の形

表 8 上記グラフ (図 11) のデータ (対数をとる前の値)

損失の規模 (ユーロ) (x 軸)	損失 頻度 (y 軸)	データ の出所 (LDCE2008 の表番号)
20,000	26.60	ILD9
27,632	19.95	ILD7
41,916	13.30	ILD7
82,608	6.65	ILD7
100,000	5.84	ILD6
418,400	1.33	ILD7
1,000,000	0.61	ILD6
2,000,000	0.32	ILD6
5,000,000	0.13	ILD6
10,000,000	0.06	ILD6
100,000,000	0.007	ILD6

左記計数の作成手順は以下のとおり。

ILD9 の計数: 粗利 10 億ユーロあたりの損失件数 (銀行間中央値)

ILD6 の計数: 全銀行の損失件数集計値を加工。
() 特定金額 (例: 1 億ユーロ) 以上の損失件数 (例: 41 件) の 2 万ユーロ以上の損失件数 (155,713 件) に対する比率 (例: $41 \div 155,713$) を求める。

() () を粗利 10 億ユーロあたりの 2 万ユーロ以上の年間損失件数 (26.6 件) に乗じて、当該金額に相当する頻度を得る。

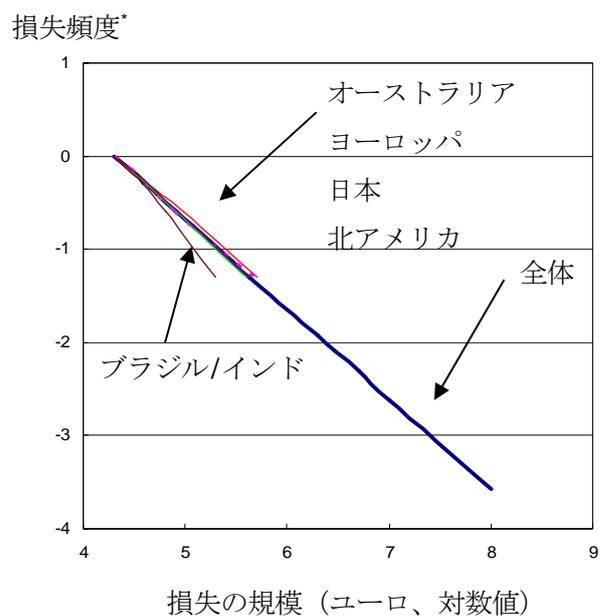
例: $26.6 \text{ 件} \times 41/155,713 = 0.007 \text{ 件}$

ILD7 の計数: ILD7 の銀行間中央値を加工

() ILD7 から特定の%点 (例: 5%点) の金額 (例: 418,400 ユーロ) を得る。

() 当該%を粗利 10 億ユーロあたりの年間損失件数 (26.6 件) に乗じ、当該金額以上の損失の頻度を得る。

例: $418,400 \text{ ユーロ以上の損失の頻度は、} 26.6 \text{ 件} \times 0.05 = 1.33 \text{ 件}$



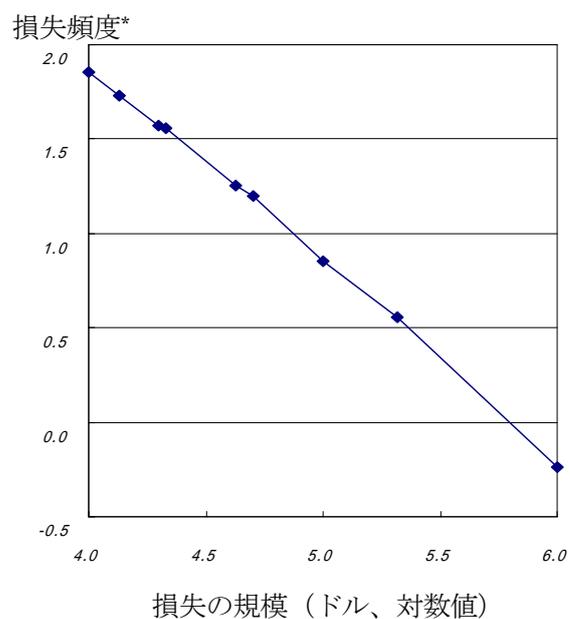
* x 軸の金額以上の損失の 2 万ユーロ以上の損失に対する件数割合 (対数值)

図 12 地域別の損失規模分布の形

表 9 上記グラフ (図 12) のデータ (対数をとる前の値)

パーセンタイル点*	100%	75%	50%	25%	5%
損失頻度	1.00	0.75	0.50	0.25	0.05
オーストラリア	20,000	28,883	41,781	75,966	476,708
ヨーロッパ	20,000	27,341	41,765	82,004	400,000
日本	20,000	27,890	42,357	95,093	511,815
北米	20,000	27,900	43,234	84,462	425,314
ブラジル/インド	20,000	26,472	37,962	65,100	201,416

* 2 万ユーロ以上の損失に対するパーセンタイル点



* x 軸の金額以上の損失の年間件数
(年間粗利 10 億ドルあたり、対数值)

図 13 米銀の損失規模分布の形

表 10 上記グラフ（図 13）のデータ（対数をとる前の値）

損失の規模 (ドル)	損失頻度	データの出所 (米国の 2004 年調査の表番号)
10,000	72.035	Table Appendix 3a, Table 8
13,436	54.026	Table 7a
20,000	37.530	Table 8
21,277	36.017	Table 7a
42,155	18.009	Table Appendix 3a
50,000	15.704	Table Appendix 3a
100,000	7.170	Table 8
206,492	3.602	Table 7a
1,000,000	0.576	Table 8

5.2 実証データに基づくオペリスク計量の先行研究

損失規模分布として GPD を実際のデータに当てはめた先行研究をみると、GPD の形状パラメータとして 1 前後を推計しているものが多く、世界のさまざまな銀行で当論文で推計された損失規模分布と似た分布が推計されることがわかる（表 11）。

**表 11 損失データを用いてオペリスク量を計測した先行研究における ξ の推計値
(各研究について代表的と考えられる計数を例示)**

対象データ	ξ の推計対象	ξ の推計結果	参照
6 銀行（米国）、 各 1 年分	各銀行の全体 で推計	6 行の推計値について 最小値:0.87, 最大値:1.28 平均:1.01, 中央値:0.98	de Fontnouvelle ら (2004)
89 銀行（世界） 各 1 年分	全銀行のデー タをまとめた うえ、8 個のビ ジネスライン 別に推計	8 個のビジネスラインについ て 最小値:0.85, 最大値:1.39 平均:1.13, 中央値:1.18	Moscadelli (2004)
7 銀行（米国）	各銀行全体で 推計	最小値:0.89, 最大値:1.20 平均値:1.02, 中央値:1.01 (GPD 推計時の閾値を全デー タ数の上位 10%のデータとし たとき)	Dutta and Perry (2006)
邦銀（複数）10 年分	全銀行をまと めて推計	データの最小値を閾値とし たとき、 最尤法:1.10、PMM 法:0.98	Mori ら (2007)
オーストラリア のひとつの銀行 9 年分	銀行全体で推 計	最尤法:1.04、 PMM 法:0.81	John Evans SF Fin ら (2008)

6. おわりに

以上、LDCE のデータから導かれた仮説（損失規模分布が広い範囲の銀行に当てはまる）と、その仮説から導かれたオペリスク量の簡易な計算式を示した。当計算式は、簡便でありながら、リスク感応的であり、その他にも、データの特徴・挙動をしっかりと表現している、計算結果が実務的な感覚と整合的である、といった優れた特質を多く備えている。また、当計算式が実務的に使いやすい特徴を備えている点は、逆に、当計算式がよって立つ「共通の損失規模分布」の仮定が銀行の損失規模分布の特徴をうまく捉えていることを示しているといえよう。

もっとも、当計算式にはいくつかの課題があり、そのまま先進的計測手法の計量モデルとして用いることができるようなものではない。まず、当計算式はそもそも過去のデータに基づいて見積もられた分布を用いているので、最新の業務環境やコントロール状況を反映していない、との批判はある程度当てはまる。業務環境やコントロール状況は損失件数に反映される一方で、損失規模分布は安定しているというのが当計算式の考え方である。しかしながら、損失規模分布の安定性の仮定は、近似の簡便性や、個別銀行にとってのデータ制約を回避することを目的としたものであり、より高度なモデルがそれに縛られるようなものではない。

巨額損失事例の発生が、直接、リスク計量結果に反映されない点も、「小さな損失の件数を減らす誘因を与える一方で、巨額損失を直接制御する誘因が働かない」といった形で、リスク管理に偏った誘因を与えかねない点に留意する必要がある。

以上のような課題を踏まえれば、これらを解決するために、個別の銀行が、巨額損失の可能性をシナリオ化する、あるいは、最新の業務環境・内部統制要因を反映する等、きめ細かな枠組みを開発し、より高度なモデルを開発することには十分な意味がある⁴⁶。

実際の運用では損失件数の算定方法が課題になる。まず、損失の年間件数 (N_R) の観測対象となる損失の規模 (R) の問題がある。各銀行の損失規模分布が共通の損失規模分布と完全に同じならば、 R にどのような金額を用いても（ただし、 R は GPD の推計に用いた閾値以上でなければならない）、当計算式のリスク量は変わらない。しかし、実際には各銀行の損失規模分布が共通の損失規模分布と完全に一致することはまれと考えられるため、 R の値によって当計算式によるリスク量が異なってしまう。このため、当計算式の適用にあたっては、 R の決定についての合理的な説明が必要になる。さらに、 R が決定されても、 N_R （計算式に用いる年間損失件数）が自動的に定まるわけではない。計算に用いる N_R に

⁴⁶ こうしたモデルに入力する計数には以下のような例が考えられる。

- 今後発生しうる損失をシナリオとして想定し、その件数を計算式に織りこむ。これはリスク量の保守性の確保、シナリオ化されたリスクに対応する誘因を与えるために有効と考えられる。
- 巨額損失の見積りがある程度精緻に行えるリスクについて、1,000年に1度の損失金額を見積もり、当式によるリスク量と比較し、リスク量に適切に反映させる。例えば、地震の規模、頻度は、地震に関する科学的な知見からより精密に見積もることができる（例えば、兼森（2006）を参照）。

は向こう1年間に予測される値を用いる必要があるが、恣意性を排除し、客観性を確保しつつ、足許の業務環境・内部統制要因を最大限織りこむことで最善の予測を行う必要がある⁴⁷。さらに、1,000万円以上の損失がほとんどあるいはまったくない銀行には、当計算式に用いる損失の件数が得られないという問題がある。この場合、1,000万円以上の損失の数を予測するモデルを別に開発し、計算式に用いる必要があるかもしれない⁴⁸。

当計算式のパラメータは、邦銀18行という限定的なデータに基づくものであるが、「5. 当論文の分析の他の銀行への適用可能性」に述べたように、データが蓄積され、分析対象のデータを国内外の銀行に広げた場合も、ここで採用したパラメータが大きく変わることはないと筆者らは考えている。この点を確認するには、実際のデータの蓄積、分析が必要である。今後、データの蓄積、分析が進むことにより、当計算式の検証、さらには、異なった発想に立ったより良いベンチマークの検討が進むことを期待している。

以 上

⁴⁷ 計算式に用いる年間損失件数を決定する際の論点には例えば以下が考えられる。

- 損失の観測期間（例：直近3年間、直近5年間、計数が得られる期間すべて等）。
- 上記の計数から損失件数をどのように決めるか（単純平均、加重平均、最大値等）。
- 新規業務・廃止業務がある場合に算式に用いる損失件数をどう扱うか。
- 損失件数の調整をどう行うか。例えば、直近の計数が一定の傾向を持つ場合に、その傾向をどう反映するか。
- 推計に用いたデータの観測期間が不十分な場合の扱い（保守性をどの程度加味するか）。

⁴⁸ こうしたモデルに入力する計数には例えば以下が考えられる。これらの計数を計量に用いることにより、それらをコントロールする誘因を与える効果も期待できる。

- 1,000万円未満の損失の状況
- ニアミスの発生状況
- その他の内部統制・外部環境要因

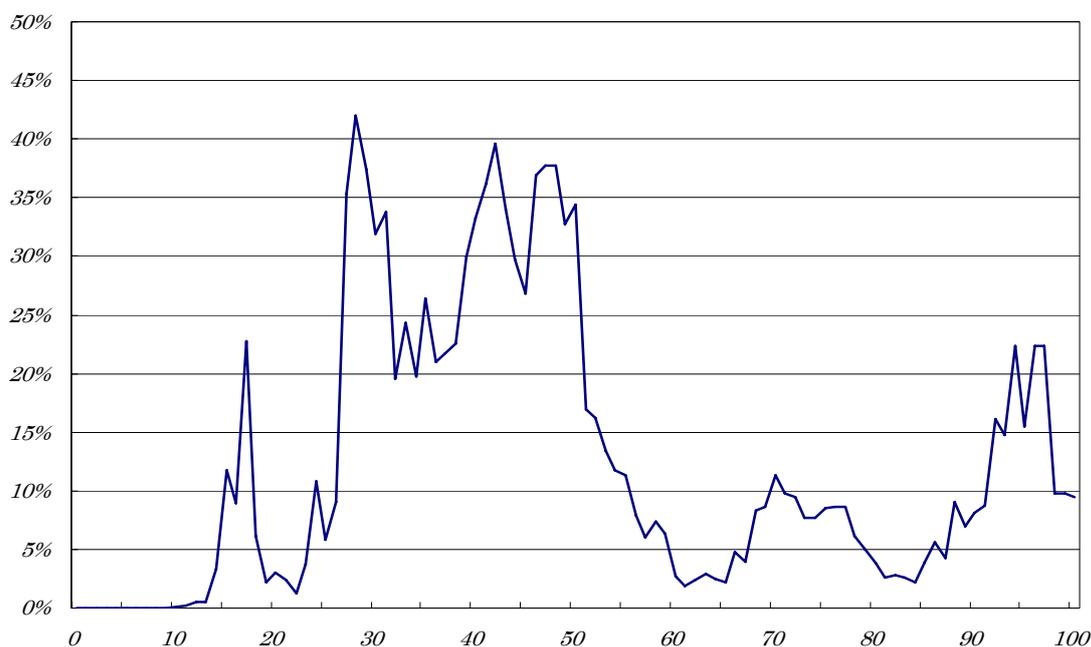
補論 1 損失規模分布の共通性のノンパラメトリック検定

当補論では、ノンパラメトリック検定（クラスカル・ウォリスの順位和検定）により「18 行の損失規模データセットのすべてが同一の母集団から抽出されたものである」との帰無仮説（対立仮説：「18 行の損失規模データセットのすべてが同一の母集団から抽出されたとはいえない」）を検定する（図 A1-1）⁴⁹。

有意水準を 5%ないし 10%としたとき、検定対象の損失の閾値を 1,500 万円以上とした場合に、ほとんどの閾値で帰無仮説が棄却されず、当論文が共通の損失規模分布を個別の銀行の損失規模分布と仮定することのひとつのよりどころとなる。

検定対象となるデータの閾値を 100 万円から 100 万円刻みで 1 億円まで増加させ、100 とおりの閾値に対応するデータセットについて検定した（例：閾値を 1 億円としたとき、1 億円以上の損失によるデータセットについて仮説検定を行う）。この結果、閾値が 1,400 万円以下のすべての場合で当該帰無仮説が棄却される一方（有意水準：5%）、1,500 万円以上の多くの場合で当該帰無仮説は棄却されない（有意水準：5%または 10%）。

P 値



検定対象のデータの閾値（当該金額以上の損失について検定、単位：100 万円）

図 A1-1 クラスカル・ウォリスの順位和検定

⁴⁹ de Fontnouvelle ら（2005）は、米国の大規模銀行のデータで同様の検定を行い、当論文と同様の結論（サンプル行の損失分布が同一であるとの帰無仮説は棄却できない）を導いている。

補論 2 業務区分、損失事象別データへの適用

当補論ではバーゼルの業務区分、損失事象⁵⁰別の分析結果を示す。なお、極端にデータ数が少ない業務区分、損失事象もあることから、当補論の結果は、本文の分析以上に幅をもって解釈されるべきことに留意されたい。

A2.1 業務区分、損失事象別の損失規模分布の共通性

業務区分別、損失事象別の損失規模分布の共通性を検証するために、以下のとおりの内容でクラスカル・ウォリスの順位和検定を実施した。

- データ：18 行のデータをまとめたデータセットを業務区分別（8 区分）、損失事象別（7 区分）にまとめた 15 通りのデータセットを対象に検定した。
- 業務区分別の検定の帰無仮説：業務区分別の 8 のデータセットのすべてが、同一の母集団から抽出されたものである。（対立仮説：業務区分別の 8 のデータセットのすべてが、同一の母集団から抽出されたとはいえない。）
- 損失事象別の検定の帰無仮説：損失事象別の 7 のデータセットのすべてが、同一の母集団から抽出されたものである。（対立仮説：損失事象別の 7 のデータセットのすべてが、同一の母集団から抽出されたとはいえない。）
- 上記いずれについても、検定対象の閾値を 100 万円から 1 億円まで、100 万円ずつ増加させ、100 通りの閾値について検定を実施。

検定結果は図 A2-1 に示されている。業務区分別には、800 万円以上のほとんどの閾値で P 値が 10%を超えており、有意水準を 5%、10%のいずれとしても帰無仮説はほとんどの閾値で棄却されない。一方、損失事象別には、有意水準を 5%、10%のいずれとしても、ほとんどの閾値で棄却される（損失事象別の損失規模分布の分布形がすべて同じとみることはできない）との結果となった。

⁵⁰ 当補論で用いた業務区分、損失事象別の記号は、当節末に記載した表 A2-5 を参照

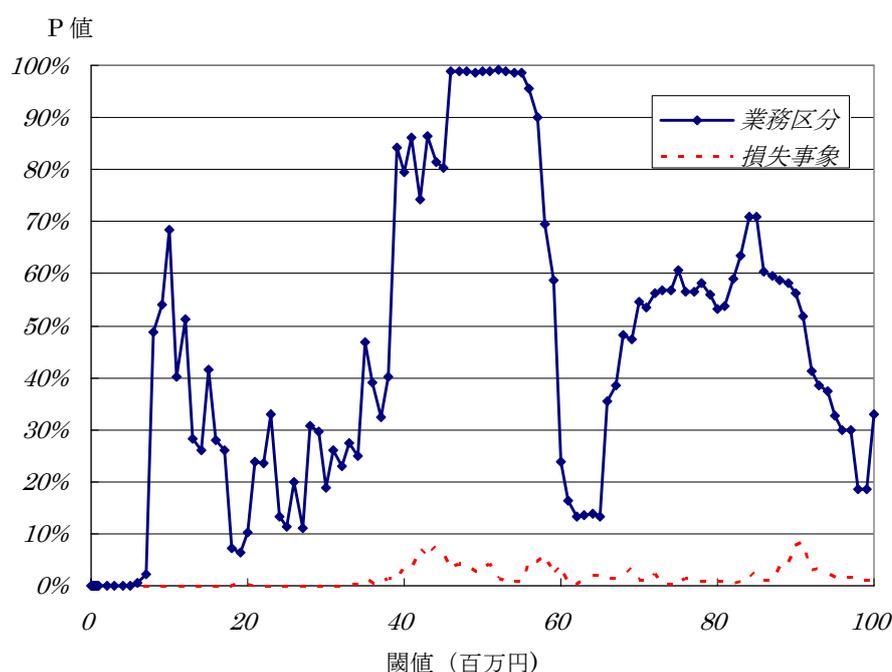


図 A2-1 クラスカル・ウォリスの順位和検定

A2.2 業務区分別の推計

ここでは、18の銀行のデータをまとめて業務区分別に分けたデータについて、その損失規模がそれぞれGPDに従うと仮定して分布形を推計した。その際、閾値を1,000万円とし、GPDのパラメータを最尤法により8の業務区分別に推計している。さらに、それぞれ推計された分布の適合度を本文と同様に検定した。

表A2-1に示した結果をみると、 ξ の推計値は0.56~1.38の範囲でばらついており、業務区分別に分布形は大きく異なる。ただし、業務区分別のサンプル数は少ないこと、また、前述のA2.1や表A2-2からは、いずれの業務区分についても、損失が同一の損失規模分布から発生していることを示唆する結果が得られていることから、データの蓄積が進めば、業務区分別で推計した ξ が全体データで推計した ξ に近づく可能性があると予想している。

なお、 ξ の業務区分別に推計した各々のデータ件数による加重平均は0.96（単純平均は1.01）と、全体での推計値（0.973）に近い水準となっている。

表 A2-1 業務区分別の損失規模分布の推計結果、適合度検定の結果

業務区分	BL1	BL2	BL3	BL4	BL6	BL7	BL8
データ数	11	44	224	480	38	34	37
β (万円)	1,485	1,105	1,340	1,032	1,195	1,628	1519
ξ	1.38	1.17	1.01	0.92	1.21	0.56	0.84
KS	0.73	0.85	0.76	0.86	0.88	0.91	0.88
CvM	0.83	0.85	0.68	0.81	0.93	0.88	0.83
AD _{up}	0.56	0.01	0.18	0.10	0.17	0.18	0.29
AD _{up} ²	0.56	0.01	0.35	0.08	0.15	0.31	0.31

* BL5 はデータ数が僅少 (<10) のため記載していない。区分不明の損失も記載していない。

** 適合度検定 (KS、CvM、AD_{up}、AD_{up}²) は、P 値を示している。

つぎに、共通の損失規模分布（18 の銀行全体の損失データから推計された分布、 $\xi=0.973$ ）が、そのまま業務区分別のデータに当てはまるかを検定した（帰無仮説：各業務区分別に観測された損失が共通の損失規模分布に従う、対立仮説：業務区分別に観測された損失が共通の損失規模分布に従わない）。結果は表 A2-2 に示したように、有意水準を 5% とした場合、ボディ部分における分布形の乖離度を検出する手法（KS、CvM）ではすべての業務区分で棄却されないが、テール部分における分布形の乖離度を検出する手法（AD_{up}、AD_{up}²）では棄却される業務区分が多くなっている。

表 A2-2 共通の損失規模分布の業務区分別のデータセットに対する適合度検定結果

業務区分	BL1	BL2	BL3	BL4	BL6	BL7	BL8
KS	0.43	0.88	0.63	0.52	0.91	0.85	0.75
CvM	0.61	0.96	0.64	0.53	0.88	0.79	0.71
AD _{up}	0.01	0.00	0.18	0.17	0.05	0.27	0.32
AD _{up} ²	0.00	0.00	0.11	0.09	0.02	0.29	0.17

* BL5 はデータ数が僅少 (<10) のため記載していない。区分不明の損失も記載していない。

A2.3 損失事象別の推計

ここでは、18 の銀行のデータをまとめて損失事象別に分けたデータについて、その損失規模がそれぞれ GPD に従うと仮定して分布形を推計した。その際、閾値を 1,000 万円とし、GPD のパラメータを最尤法により 7 の損失事象別に推計している。さらに、それぞれ推計された分布の適合度を本文と同様に検定した。

表 A2-3 に示した結果をみると、 ξ の推計値は 0.32~1.23 の範囲でばらついており、損失事象別に分布形は大きく異なる。ただし、前述の A2.2 と同様、損失事象別の件数が少ないこと、表 A2-4 から共通の損失規模分布の適合度がいずれの損失事象についてもある程度確認される（適合度検定が棄却されない場合がある）ことから、データの蓄

積が進めば、損失事象別の ξ の推計値が全体の ξ の推計値に近づく可能性がある。なお、 ξ の単純平均は0.92（データ件数による加重平均は0.89）となっている。

表 A2-3 損失事象別の分布形の推計結果、適合度検定の結果

損失事象	ET1	ET2	ET3	ET4	ET5	ET6	ET7
データ数	61	106	23	153	23	36	479
β (万円)	2,907	1,056	1,024	1,866	1,233	919	990
ξ	0.97	0.84	1.12	1.17	0.32	1.23	0.80
KS	0.84	0.66	0.85	0.82	0.75	0.56	0.99
CvM	0.79	0.57	0.83	0.86	0.70	0.58	0.99
AD_{up}	0.19	0.28	0.04	0.22	0.09	0.13	0.00
AD_{up}^2	0.49	0.08	0.09	0.31	0.24	0.09	0.00

* 区分不明の損失は記載していない。

つぎに、共通の損失規模分布が、そのまま損失事象別のデータに当てはまるかを検定した（帰無仮説：損失事象別に観測された損失が共通の損失規模分布に従う、対立仮説：損失事象別に観測された損失が共通の損失規模分布に従わない）。

表 A2-4 に示されているように、業務区分別の結果と同様、有意水準を5%とした場合、ボディ部分における分布形の乖離度を検出する手法（KS、CvM）ではすべての損失事象で棄却されない。一方、テール部分における分布形の乖離度を検出する手法（ AD_{up} 、 AD_{up}^2 ）では棄却される損失事象が多くなっている。

表 A2-4 共通の損失規模分布の損失事象別のデータセットに対する適合度検定結果

損失事象	ET1	ET2	ET3	ET4	ET5	ET6	ET7
KS	0.50	0.53	0.91	0.57	0.44	0.69	0.53
CvM	0.49	0.53	0.88	0.57	0.41	0.66	0.53
AD_{up}	0.05	0.28	0.00	0.08	0.42	0.01	0.08
AD_{up}^2	0.01	0.06	0.00	0.01	0.04	0.00	0.00

* 区分不明の損失は記載していない。

表 A2-5 業務区分、損失事象の一覧

下表は、バーゼルⅡに関する告示上⁵¹の呼称と当節で用いた記号との対照表である。

業務区分 (Business Line)

呼称	「告示」上の呼称
BL1	コーポレート・ファイナンス
BL2	トレーディング及びセールス
BL3	リテール・バンキング
BL4	コマースシャル・バンキング
BL5	決済業務
BL6	代理業務
BL7	資産運用
BL8	リテール・ブローカレッジ

損失事象の種類 (Event Type)

呼称	「告示」上の呼称
ET1	内部の不正
ET2	外部からの不正
ET3	労務慣行及び職場の安全
ET4	顧客、商品及び取引慣行
ET5	有形資産に対する損傷
ET6	事業活動の中断及びシステム障害
ET7	注文等の執行、送達及びプロセスの管理

⁵¹ 銀行法第十四条の二の規定に基づき、銀行がその保有する資産等に照らし自己資本の充実の状況が適当であるかどうかを判断するための基準

補論 3 オペリスク量の簡易な計算式の導出

オペリスク量（保有期間 1 年、信頼水準 c ）は以下の簡易な計算式で近似的に計算可能である。

$$\text{オペリスク量} = (R - u + \beta/\xi) \cdot [1/(1-c) \cdot N_R]^\xi - (-u + \beta/\xi)$$

ただし、

c : 信頼水準（例えば、規制資本の場合は信頼水準の 0.999（=99.9%）を適用する）

R : 任意の損失規模（例えば 2,000 万円）。GPD の閾値 u より大きい。

N_R : 損失規模 R 以上の損失の年間件数

ξ : GPD の形状パラメータ

β : GPD の尺度パラメータ

u : GPD の推計に用いた閾値（ここでは 1,000 万円）

この計算式は Böcker らの近似式を利用して以下のように導かれる。

損失規模を表す確率変数を X 、その分布を F とすると、ある高い閾値 u の超過分布は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} F_u(x) &= P(X - u \leq x | X > u) \\ &= \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)} \end{aligned}$$

F_u は損失規模 X が閾値 u を超えているとき、閾値 u からの超過分 $(X-u)$ が高々 x である確率を表す。

また、一般化パレート分布（GPD）の分布関数は以下で与えられる。

$$G_{\xi,\beta}(x) = 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\beta}x\right)^{-\frac{1}{\xi}}$$

ここで、 ξ は形状（shape）パラメータ、 β は尺度（scale）パラメータと呼ばれる。

Pickands-Balkema-de Haan の定理より十分大きな閾値 u に対して以下が成り立つ。

$$F_u(x) \cong G_{\xi, \beta}(x)$$

つまり元の分布 F がわからなくても十分 u が大きければ、適当なパラメータ ξ 、 β を与えると超過分布 F_u を一般化パレート分布 $G_{\xi, \beta}$ で近似できる。

このとき、損失規模分布 F および一般化パレート分布 $G_{\xi, \beta}$ に対して、それぞれ $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ および $\bar{G}_{\xi, \beta}(x) = 1 - G_{\xi, \beta}(x)$ と置くと、

$$\begin{aligned} \bar{F}(x) &= P(X > u)P(X > x | X > u) \\ &\cong \bar{F}(u)\bar{G}_{\xi, \beta}(x-u) \\ &= \bar{F}(u)\left(1 + \frac{\xi}{\beta}(x-u)\right)^{-\frac{1}{\xi}} \end{aligned}$$

任意の損失規模 $R (\geq u)$ に対して $\bar{F}(R) = \bar{F}(u)\left(1 + \frac{\xi}{\beta}(R-u)\right)^{-\frac{1}{\xi}}$ となるので、この式を用いて上式から $\bar{F}(u)$ を消去すると、任意の p ($p = F(x)$, $0 \leq p \leq 1$) において以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} x &= F^{-1}(p) \\ &= \left(R - u + \frac{\beta}{\xi}\right) \cdot \left(\frac{\bar{F}(R)}{1-p}\right)^{\xi} - \left(-u + \frac{\beta}{\xi}\right) \end{aligned}$$

また、年間の全損失件数を N とするとき、Böcker らの近似式を用いて保有期間 1 年、信頼水準 c のオペリスク量を近似すると以下のとおりとなる。

$$\text{オペリスク量} \cong F^{-1}\left(1 - \frac{1-c}{N}\right)$$

よって、 $\bar{F}(R) \cong N_R/N$ とするとオペリスク量の簡易な計算式は以下のように求まる。

$$\text{オペリスク量} = \left(R - u + \frac{\beta}{\xi}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-c} \cdot N_R\right)^{\xi} - \left(-u + \frac{\beta}{\xi}\right)$$

参考文献

邦文⁵²

- 兼森孝 (2006) 「大地震リスク分析の基礎」, 日本銀行金融機構局「オペレーショナルリスクシナリオ分析ワークショップ」における資料
(http://www.boj.or.jp/announcements/release_2006/data/fsc0608bj10a.pdf)
(http://www.boj.or.jp/announcements/release_2006/data/fsc0608bj10b.pdf)
- 高橋倫也 (2008) 「極値統計学」 ([www.ism.ac.jp/~shimura/R.Takahasi/koukaikouza08\(Rinya\).pdf](http://www.ism.ac.jp/~shimura/R.Takahasi/koukaikouza08(Rinya).pdf))
- バーゼル銀行監督委員会 (2009a) 「2008 年オペレーショナル・リスクの損失データ収集実態調査の結果 (仮訳)」 (<http://www.fsa.go.jp/inter/bis/20090729/01.pdf>)
- バーゼル銀行監督委員会 (2009b) 「先進的計測手法 (AMA) の主な論点についてみられたプラクティスの幅 (仮訳)」 (<http://www.fsa.go.jp/inter/bis/20090729/02.pdf>)
- 森淳稔、木全友則、長藤剛 (2007) 「損失額分布やパラメータ推定手法の選択がオペレーショナルリスク計量結果に与える影響について—サンプルデータを用いた分析—」
(http://www.boj.or.jp/research/brp/ron_2007/data/ron0706a.pdf)
- 森本祐司 (2000) 「金融と保険の融合について」『金融研究』, 第 19 巻別冊第 1 号, 日本銀行金融研究所 (<http://www.imes.boj.or.jp/research/papers/japanese/kk19-b1-8.pdf>)

英文

- Basel Committee on Banking Supervision (2009a), “Observed range of practice in key elements of Advanced Measurement Approaches (AMA)” (<http://www.bis.org/publ/bcbs160b.pdf>)
- Basel Committee on Banking Supervision (2009b), “Results from the 2008 Loss Data Collection Exercise for Operational Risk” (<http://www.bis.org/publ/bcbs160a.pdf>)
- Basel Committee on Banking Supervision (2004), “International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework”
(<http://www.bis.org/publ/bcbs107.pdf>)
- Böcker, C. and Klüppelberg, C. (2005), “Operational VaR: A Closed-Form Approximation,” *RISK Magazine*, 18(12), pp. 90–93
(<http://www-m4.ma.tum.de/Papers/Klueppelberg/oprisk051005.pdf>)
- Böcker, K. and Sprittulla, J (2008), “Operational VAR: meaningful means,” *RISK Magazine*, December, pp. 96–98 (http://www-m4.ma.tum.de/Papers/Klueppelberg/kb_sprittulla.pdf)
- Chernobai, A., Rachev, S., and Fabozzi, F. (2005), “Composite Goodness-of-Fit Tests for Left-Truncated Loss Samples,” *Technical Report*, University of California Santa Barbara
(https://statistik.ets.kit.edu/download/doc_secure1/tr_composite_goodness_tests.pdf)
- de Fontnouvelle, P. and Rosengren, E. (2004), “Implications of Alternative Operational Risk Modeling Techniques,” Federal Reserve Bank of Boston

⁵² 邦語文献は、英文版には掲載していない。

- (<http://www.nber.org/chapters/c9617.pdf>)
- de Fontnouvelle, P., V. DeJesus-Rueff, Jordan, J. and Rosengren, E. (2005), “Capital and Risk: New Evidence on Implications of Large Operational Losses,” Federal Reserve Bank of Boston
(<http://www.bostonfed.org/economic/wp/wp2003/wp035.pdf>)
- De Koker, R. (2006), “Operational Risk Modelling: Where Do We Go From Here?” *The Advanced Measurement Approach to Operational Risk*, Risk Books, pp. 37–57
- Degen, M. (2010), “The Calculation of Minimum Regulatory Capital using Single-Loss Approximations,” *Journal of Operational Risk* 5(4), pp. 1–15
(http://www.math.ethz.ch/~degen/Degen_accuracy_2010.pdf)
- Dutta, K. and Perry, J. (2006), “A Tale of Tails: An Empirical Analysis of Loss Distribution Models for Estimating Operational Risk Capital,” Federal Reserve Bank of Boston
(<http://www.bos.frb.org/economic/wp/wp2006/wp0613.pdf>)
(<http://www.bos.frb.org/economic/wp/wp2006/wp0613app.pdf>)
- Embrechts, P., Klüppelberg, C., and Mikosch, T. (1997), *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer, Berlin.
- Evans SF Fin, J., Womersley, R., Wong, and D, Woodbury, G. (2008), “Operational risks in banks,” *The Finsia Journal of Applied Finance*, 10(2), pp. 9–16
(http://www.finsia.com/eventPDF/JASSA_Issue2_2008_Pages_9-16.pdf)
- Federal Reserve System, Office of the Comptroller of the Currency, Office of Thrift Supervision, Federal Deposit Insurance Corporation (2005), “Results of the 2004 Loss Data Collection Exercise for Operational Risk”
(<http://www.bostonfed.org/bankinfo/qau/research/papers/pd051205.pdf>)
- Hosking, J. R. M. and Wallis, J. R. (1987), “Parameter and Quantile Estimation for the Generalized Parato Distribution,” *Technometrics*, 29(3), pp. 339–349
- Kanemori, T. (2006), “Seismic Risk Analysis,” presentation at Bank of Japan
(http://www.boj.or.jp/en/announcements/release_2006/data/fsc0608be10a.pdf)
(http://www.boj.or.jp/en/announcements/release_2006/data/fsc0608be10b.pdf)
- Mori, A., Kimata, T. and Nagafuji, T. (2007), “The Effect of the Choice of the Loss Severity Distribution and the Parameter Estimation Method on Operational Risk Measurement — Analysis Using Sample Data —”
(http://www.boj.or.jp/en/research/brp/ron_2007/data/ron0712c.pdf)
- Moscadelli, M. (2004), “The modeling of operational risk: experience with the analysis of the data collected by the Basel Committee,” the Bank of Italy
(http://www.bancaditalia.it/pubblicazioni/econo/temidi/td04/td517_04/td517/tema_517.pdf)
- Nešlehová, Johanna, Paul, Embrechts, and Valérie Chavez-Demoulin (2006), “Infinite Mean Models and the LDA for Operational Risk,” *The Journal of Operational Risk*, 2006, 1, 3-25.