財務指標の時間依存を考慮した信用リスク評価モデル
– デフォルト予測への応用

安道知寛[1]　　山下智志[2]

概要

企業の財務指標などの情報から企業のデフォルトリスクを計測する財務アプローチについては，1960 年代から数多くの研究がなされてきた．その長い歴史のなかで，多くの研究者が財務指標の時間依存を考慮すべきであると主張し，直近の時点で観測された財務指標のみならず，その変化率・時系列推移を表現する代替変数を併用することで予測精度の向上を試みてきた．しかし，経時情報の抽出方法やそれらをデフォルト予測へとリンクさせるモデルが未発達であったため，この重要な問題を根本的に解決するには至らなかった．

本稿では，関数データ解析の枠組みを利用し，財務指標の推移の代替変数等ではなく ”財務指標の推移 ”そのものを説明変数とした新しい統計モデルを構成し，高精度なデフォルトリスク計測手法を提案する．実際のデータ解析を通じ，提案手法の予測精度は従来手法を優越し，その有効性が確認された．

[1]九州大学大学院数理学府　E-mail: ando@math.kyushu-u.ac.jp

[2]大学共同利用機関法人 情報・システム研究機構 統計数理研究所 助教授, 金融庁金融研究研修センター特別研究員, CRD 運営協議会顧問　E-mail: yamasita@ism.ac.jp

本稿の執筆に当たっては, 大学共同利用機関法人 情報・システム研究機構 統計数理研究所 川崎能典氏に有益な御意見をいただいた．記して感謝したい．ただし，言うまでもなく本稿の文責は筆者にある．
なお, 本稿は, 筆者の個人的な見解であり, 金融庁の公式見解ではない.

目 次

1　はじめに

1.1　研究の背景

近年，世界規模でのグローバル競争の進展，規制緩和，技術革新等で日本企業の経済環境は激変し，バブル崩壊以降の日本経済の低迷も影響して，公開法人のデフォルト件数は増加傾向にある．特に，東京証券取引所一部上場法人の年間デフォルト件数は，1996 年までは例年 1 法人にも満たなかったものが，2001 年には 8 法人，2002 年には 13 法人へと急拡大している．一般に，信用リスクとは「デフォルトが発生し，投下資本を回収できないリスク」を意味し，信用リスクに応じた収益を確保する内部格付制度の確立が，新 BIS 規制の導入に向けて重要な課題となっている．

規制緩和による金利自由化も急速に進展し，現在，企業のデフォルトリスクを迅速かつ科学的に測定・管理する手法の開発とその検証が，研究者および実務家の間で注目を集めている．特に，信用リスクの測定技術の分野においては，従来の専門家による定性的判断によるものから，数理統計理論に基づくリスク計測モデルや金融工学等を駆使したより精緻な信用リスク分析が求められている．

1.2　既存研究

デフォルト予測のモデリングには二つの流れがある．一方は，企業のバランスシートにおいて，将来の企業資産価値が負債額を下回る（自己資本額が負となる）ことをデフォルトと定義し，企業資産価値を原資産価格，負債額を権利行使価格とするヨーロピアン・コールオプションとみなして価格付けをおこなう**オプションモデルアプローチ**である (Merton (1974))．他方は財務諸表分析と統計手法を融合してリスク計測モデルを構築し，個別企業のデフォルトを予測しようとする**統計的アプローチ**で，本稿では，この統計的アプローチについて議論を進めていく．

デフォルト予測モデルについての財務諸表分析の歴史は古く，19 世紀末に米国の金融機関において，融資対象企業の信用調査を目的として生まれたといわれている．その伝統的な分析理論を企業のデフォルト予測へと応用しようとする試みは Beaver (1967) にその契機を見出すことができる．Beaver は，キャッシュフロー対負債比率など個々の財務指標に対してデフォルト予測能力の有無を検討し，その有用性を 2 分法により実証した．その研究結果は，従来から関心をもたれていたデフォルト予測に対して十分実用に耐えうる可能性を示唆するものであり，それ以降，様々な統計モデルが提案されてきた．

多変量判別分析を初めて展開したのは，Altman (1968) である．Beaver (1967) の研究は，財務アプローチに基づくデフォルト予測へのブレークスルーであったが，2 分法は個々の財務指標の持つ予測可能性を検討するものであり，複数の指標を総合的に利用することができ

なかった．Altman は，Fisher (1936) により提案された多変量判別分析をデフォルト予測へと応用し，複数の財務指標を同時に考慮することによりかなりの精度でデフォルト予測が可能であることを示した．その後，多変量判別分析に基づくデフォルト予測の研究は活発になり，様々な実証的研究が報告された (Deakin (1972), Edmister (1972), Blum (1974), Libby (1975), Sinkey (1975), Altman (1977)).

ロジットモデルは，質的データの取り扱いに適した理論として，統計学・計量経済学などで幅広く利用される統計モデルの一つで, Martin (1979)，Ohlson (1980) により初めてデフォルト予測問題へ適用された．多変量判別分析は複数の指標を総合的に利用できる優れた手法の一つであるが，相手の信用リスクに見合わせ，収益とリスクのトレードオフを厳密におこなうには，単に判別するのみでなく，デフォルト確率を予測する必要がある．ロジットモデルはデフォルト確率という新しい情報を提供するとともに，多変量判別分析における正規性などの仮定を必要としないという点で，実践的適用可能性に優れている (後藤 (1989)). ロジットモデルについては, Lo (1986)，Zavgren (1985), 森平 (1999), 山下・川口 (2003) などの報告がある．特に，山下・川口 (2003) においては，は CRD 運営協議会によって作成された企業数のべ 948754 件，財務諸表項目数 93 項目という規模をもつ中小企業信用データベース[3] を利用し，大規模データベースを用いた信用リスク計測に伴う問題点と，その対策方法について議論している．また，一般に，業種や規模が信用リスクに与える影響を考慮する場合，データセグメント法を用いることが多いが，データ量に対する最適なセグメント数についても検討している．

さらに 1980 年代後半からは，人工知能系の手法である**ニューラルネットワーク** (Odom and Sharda (1990), Yam and Kiang (1990, 1992), Raghupathi *et al.* (1991), Wong *et al.* (1997), Vellido *et al.* (1999), Zhang *et al.* (1999), Atiya (2001))，**決定木** (Sung *et al.* (1999), 白田 (1999))，**生存時間モデル** (Lane *et al.* (1986), Cole and Jeffrey (1995), David and Talat (1995), Lee and Jorge (1996), Mata and Portugal (1994), 木島・小守林 (1999), 乾・室町 (2000), 森平 (2000))，**サポートベクトルマシン** (Fan and Palaniswami (2000)) などのさらに複雑な統計モデルに基づいてデフォルトの予測をおこなおうという試みが主流となっている．

1.3　財務指標に関する考察

デフォルトモデルにおける長期予測という言葉には二つの意味がある．一つは，過去の長期間にわたる財務データを利用したデフォルト予測であり，もう一方は，遠い将来のデフォ

[3]CRD 運営協議会で作成されたデータベースは, 信用保証協会, 政府系中小企業金融機関, および民間金融機関の与信データを, 統一したフォームで収集・蓄積し作成された．このようにして作成されたデータを信用リスク分析の研究に活かし, その情報を会員が利用できるようになっている．

ルトを予測することである．本稿では，両方の意味での長期予測をおこなう．デフォルト予測研究の歴史の中で，予測精度を向上させる財務指標情報については深く議論が掘り下げられており，財務変数をストックしてデフォルトの長期予測をおこなうことの有効性を示唆している (Beaver (1967), Altman (1968), Deakin (1972), Blum (1974))．

一般に，財務データを利用してデフォルト予測をおこなう場合，モデルは直近の財務指標を説明変数として構成されていたが，Meyer and Pifer (1970), Edmister (1972), Altman *et al.* (1977) などの研究では，直近の財務指標だけでなく，財務指標の時系列推移に関する情報を併用することによって，予測精度の向上を試みている．代表的な工夫として，Meyer and Pifer (1970), Edmister (1972) は，複数期にわたる財務指標のトレンドを線形回帰分析に基づき推定し，そのトレンドをモデルの説明変数としている．また，財務指標の前年比変化率なども時系列推移に関する代替変数として挙げられるであろう．財務指標の時系列推移を考慮すると，モデルに取り込める情報量が増えることから，より正確なデフォルト予測が可能となることは，直感的にも納得できる．

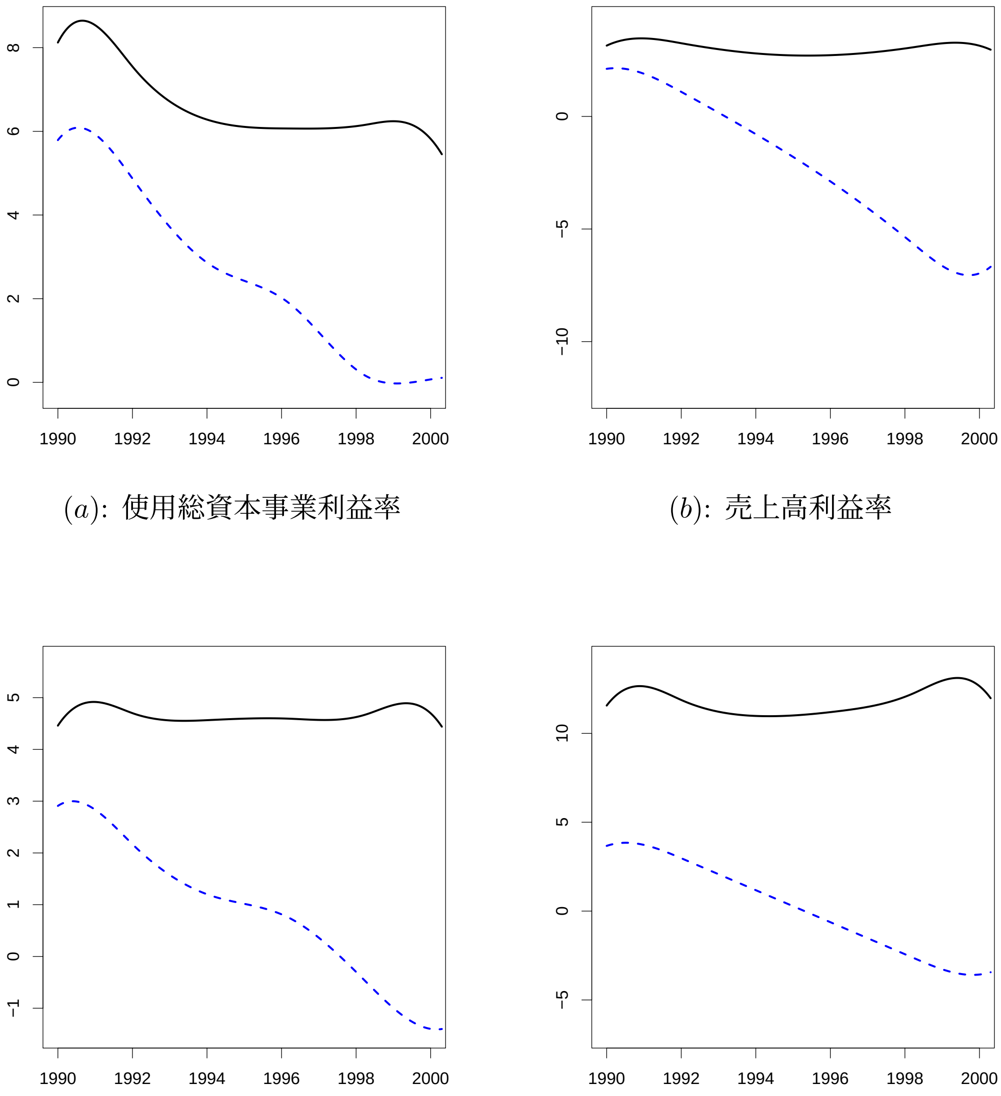
図 1 は，2000 年 1 月 1 日 $\sim$ 2003 年 1 月 1 日の期間においてデフォルトに陥った (経営破綻，金融機関による債務免除など) 51 東証・大証上場企業の使用総資本事業利益率，売上高利益率，当期利益, キャッシュフロー対負債比率に，スプライン平滑化[4] をおこなった結果を示している．言葉の定義であるが，スプライン平滑化法で観測ノイズを分離して滑らかな平均構造を得たという意味で，平滑化財務指標と呼ぶことにする．

図 1 には，デフォルト企業と非デフォルト企業の対比を明確するため，日本を代表する格付機関の一つである格付投資情報センター (R&I) の長期優先債務格付が AAA (2000 年 4 月 1 日時点) であった 16 事業会社[5] の平滑化財務指標の時系列推移も示している．ここで，長期優先債務格付とは，企業が債務不履行など，経営破綻状態に陥る可能性を表すリスク指標で，AAA は債務履行の確実性が最も高い格付である．明らかに，デフォルト企業と AAA 企業群における平滑化財務指標の時間的推移には大きな差があるといえる．

図 1 からわかるように，財務指標の長期的な推移を調べることで，デフォルト企業と非デフォルト企業の対比がより明確になり，財務指標の推移そのものを直接モデルの説明変数として用いることでさらなるデフォルト予測の精度向上が期待される．実際，R&I は総資本事業利益率の長期的な推移を辿ることで，その企業の事業リスクの大小をある程度判断できると公表している．

[4]本稿では，B-スプラインに基づき平滑化をおこなった．なお，B-スプラインについては 3.1 節, スプライン平滑化については 3.2 節を参照されたい．また，スプライン平滑化については，Hastie and Tibshirani (1990) が詳しい．

[5]銀行業・保険業・証券業・商品先物取引業等を除く．



(a): 使用総資本事業利益率　(b): 売上高利益率

(c): 当期利益　(d): キャッシュフロー対負債比率

図 1: デフォルト企業 (- - -) と非デフォルト企業 (—) の財務指標の平均推移．横軸：時間 (年)．縦軸：使用総資本事業利益率，売上高利益率，キャッシュフロー対負債比率 (%), 当期利益 (常用対数)

1.4　本研究の目的と概要

本研究の目的は，公表されている財務指標と統計的判別手法とを組み合わせた財務アプローチ，特にロジットモデルについて検討し，新たなモデリング手法の開発及び実証分析をおこなうことにある．本研究により，財務アプローチによるデフォルトリスク計測の精密化が実現できること示す．

前節でふれたように，デフォルト企業と非デフォルト企業における平滑化財務指標の時間

的推移には明確な差があり，直近の財務データのみでは得られない有益な情報が含まれていることが確認された．しかし，直近の財務データにのみ基づく手法では，財務指標の時間的推移情報をモデルに取り入れることができない．財務指標のトレンドを線形回帰分析に基づき推定して，その時間的推移を取り込んだ Meyer and Pifer (1970), Edmister (1972) の手法は，非常に関数データ解析 (Ramsay and Silverman (1997)) に近いアプローチで当時では斬新なアイデアであったと推察されるが，経時情報の抽出の仕方やそれらをデフォルトリスクと巧くリンクさせる統計モデルが依然として未発達であった．本稿では，このアイデアを，関数データ解析という現代的な手法の枠組みへ発展させ，財務指標の長期的な推移そのものに基づいたデフォルト予測モデルを構成する．詳しく述べると，財務指標の時間的変化を非線形回帰モデルにより関数化し，その関数化された財務情報を，パラメータ関数により重み付けられた積分量で取り込んだ統計モデルを新しく提案する．

従来のロジットモデルのさらなる問題点として，財務指標に多重共線性がある場合などには，パラメータ推定が困難となることが指摘されている．また，本稿で提案するモデルのパラメータは時間に関する非線形関数であり，最尤法でパラメータの推定をおこなうと推定用データへ過適合してしまうという点も改善しなければならない．すなわち，パラメータが時間経過と共に激しく変動することで尤度関数が発散してしまい，推定用データに対するデフォルト予測結果は良いものの，未知のデータに対する予測能力が著しく低くなる結果が生じるのである．そこで，本研究では安定的にモデルを推定するために，罰則付き最尤法を用いてパラメータを推定している．

デフォルト予測における本質的な点の一つに，多数の財務指標のなかから適切な財務指標の組み合わせを選択するための規準が必要となる．ベイズ型情報量規準 SBIC [6] は，一般に広く知られている規準であるが，SBIC は最尤法に基づき構成したモデルを評価する規準であり，本稿では罰則付き最尤法に基づきモデルを構成することから，単純に SBIC を適用することに問題がある．なぜなら，SBIC はモデルの複雑度をパラメータ数で推定しているが，罰則付き最尤法では，たとえモデルに含まれるパラメータ数が同じであったとしても，罰則の程度により，本質的なモデルの自由度が変化するからである．Hastie and Tibshirani (1990) は，罰則付き最尤法により推定されたモデルの本質的な自由度を平滑化行列の対角和と新しく定義し[7]，Eilers and Marx (1998) は，SBIC のパラメータ数を平滑化行列の対角和として置き換えた修正 SBIC (MSBIC) を提案した．本稿では，この MSBIC をモデル評価規準として採用し，財務指標等の選択をおこなった．

本稿の構成は以下のとおりである．2 章では，関数データ解析のおおまかな枠組み，データを関数化することの目的，利点などについて概説する．また，本稿で提案するデフォルト

[6] Akaike (1977, 1978), Leamer (1978), Schwarz (1978) を参照されたい．以降 Schwarz の BIC という意味で SBIC と略す．

[7] 一般に，平滑化行列の対角和により定義されるモデルの本質的な自由度は，等価自由度と呼ばれる．

予測モデルの構築手順についての大まかな筋道を説明する．3 章では，財務指標推移の関数化，及びデフォルト予測モデルにおいて必要となる B-スプラインについて基本的性質を確認し，財務指標の時間的推移を推定する手法について解説する．4 章では財務指標の時間的推移を説明変数としたロジットモデルを提案し，多数のモデル候補の中から，予測精度の優れたモデルを選択するための MSBIC について解説する．5 章では，わが国における上場企業のデフォルトデータの解析結果を報告する．提案するモデリング手法の予測精度は従来のロジットモデルを優越し，その有効性が確認された．また，罰則付き最尤法を用いることで，モデルを安定的に推定できることが，ブートストラップ法により確認された．

2 関数データ解析について

離散時点でのみ観測される時系列データ, 空間データが本質的には関数で表現される構造を持つ場合，離散的なベクトルデータとしてそのまま扱うよりはむしろ，関数として解析を進めていくほうが自然である (下川・水田・佐藤 (2000))．データがベクトルでなく関数である場合のデータ解析手法として，関数データ解析が提唱されている (Ramsay (1982), Ramsay and Dalzell (1991), Ramsay and Silverman (1997))．

関数データ解析の枠組みにおいては，まず離散値で与えられたデータを平滑化（または，補間）して，滑らかな関数にすることから始まる[8]．データに誤差がないと仮定できるときは補間法を用いるが，通常は関数の値に誤差を加えた状態でデータは観測されると考え, 平滑化法を適用する．つまり，解析目的に合わせて使い分ける必要があり，本稿では後者を利用している．離散データを関数化して解析する利点としては，観測時刻（観測地点）に制限がないことがまず挙げられる．本稿では企業の財務データを利用しているが，一般に貸借対照表・損益計算書などが公表される時期は各企業についてまちまちであり，離散データとして解析する場合，観測時刻をそろえる必要性が生じるが，関数化することでその問題が解決される．また，観測時刻の間隔が短く，時系列的に長い大規模データについては，離散データのままでは計算機への負荷が大きいが，データを関数化することでその問題を避けることが出来る．さらに，オリジナルの関数データだけでなく，その導関数なども，また有用な情報として活用することも出来る (Ramsay (2000))．

次に，この関数化されたデータの解析についてであるが，嬉しいことに，古典的な多変量解析手法である回帰分析・主成分分析・正準相関分析などほとんどの手法は，関数データの分析に拡張可能で，そのエッセンスは，Ramsay and Silverman (1997) に丁寧にまとめられているので参考にされたい．本稿でも，関数化された財務データの解析のために，ベクトルの説明変数を持つ従来のロジットモデルを，関数データが説明変数の場合に拡張している．

[8]本稿においては，時系列的に観測される複数の財務指標に対応する．

Ramsay and Silverman (1997) にも推奨されているように，モデルのパラメータが時間に関する非線形関数であることから，罰則付き最尤法を援用してこの関数化されたデータを解析している．実際，最尤法でパラメータの推定をおこなうと，パラメータが時間経過と共に激しく変動することで尤度関数が発散してしまい，予測能力が著しく欠けた推定結果になってしまう．[9] また，財務指標の選択などをおこなうためにモデル選択規準が必要となるが，本稿では MSBIC を利用した．本稿で構築するデフォルト予測モデルの流れについては，以下に示した手順となっている．

関数データ解析に基づくデフォルト予測モデルの構成手順

Step 1. 時系列的に観測される財務指標の関数化 (3.2 節参照)

Step 2. 関数化された財務データに基づくロジットモデル定式化, 及び罰則付き最尤法を援用したモデルのパラメータ推定 (4.1 節参照)

Step 3. 修正 SBIC (MSBIC) の最小化による適切な財務指標などの選択 (4.2 節参照)

Step 4. 選択されたモデルによるデフォルト確率の予測 (4.1 節，5 章参照)

また，実際の計算においては，データ及びパラメータの関数型を決定する必要があるが，代表的なものとしては関数を基底展開する方法が挙げられる．例えば，James (2002) はスプライン関数を基底関数として利用し，一般化線形モデル (McCullagh and Nelder (1989)) を説明変数が関数データの場合に拡張している．本稿では，3.1 節に説明するように，B-スプラインを利用し，デフォルト予測モデルの構築について議論を進めていく．そのほかの基底関数を利用した関数データ解析としては，フーリエ級数 (Ramsay and Silverman (1997)), ガウス型動径基底関数 (荒木・小西 (2003)) などがある．また，データとパラメータの関数型は必ずしも一致する必要はなく，下川・水田・佐藤 (2000) は，離散データの関数化には局所重み付最小二乗法 (Lowess; Cleveland (1979, 1981)) を利用し，モデルのパラメータ関数にはフーリエ級数を利用している．

[9] 罰則付き最尤法と最尤法により推定されたパラメータ，及びデフォルト予測モデルの安定性について，本稿 5.4 節において，ブートストラップ解析を通じ比較分析している．

3　非線形モデルによる財務指標推移のモデル化

本節では，財務データの関数型に B-スプラインを利用することから，まず，B-スプラインについて説明し，財務データの関数化をおこなう．この関数化されたデータに基づき，4 章ではデフォルト予測モデルの構築について議論を進めていく．

3.1　B-スプラインについて

B-スプラインとは，基底関数の線形結合で非線形な構造を持つ関数を表現する手法である．図 2 は，次数が 3 の B-スプライン基底関数を図示している．各基底関数 $\phi_j(t)$ は，節点と呼ばれる（等）間隔に配置された点 t_j において，2 回微分導関数が連続であるという意味で，滑らかに連結した区分的多項式で構成されている．例えば，基底関数 $\phi_1(t)$ は，5 つの節点 $t_1, ..., t_5$ において滑らかに連結した 4 つの 3 次多項式で構成される．本稿においては，データが点在する区間[10]を等間隔に分割し，各小区間を 4 つの基底関数で覆うように節点を決定したが，必ずしも等間隔に配置する必要はなく，解析目的に応じて，節点を調整することも可能である．

さらに詳しく述べると，基底関数は節点の幅 h が決まると一意に構成され，$t_1 = -2h$, $t_2 = -h$, $t_3 = 0$, $t_4 = h$, $t_5 = 2h$ としたとき，基底関数 $\phi_1(t)$ は節点 $t_3 = 0$ に関して対称であり，次式で定義される．

$$\phi_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{6h}\left\{\left(2-\frac{1}{h}|t|\right)^3 - 4\left(1-\frac{1}{h}|t|\right)^3\right\} & (t_2 < t < t_3,\ t_3 < t < t_4) \\ \frac{1}{6h}\left(2-\frac{1}{h}|t|\right)^3 & (t_1 < t < t_2,\ t_4 < t < t_5) \\ 0 & (t < t_1,\ t_5 < t) \end{cases} .$$

この基底関数 $\phi_1(t)$ を幅 h 間隔に平行移動していくと，他の基底関数 $\phi_2(t), \phi_3(t), ...$ も同様に得られる．ここでは B-スプライン基底関数を解析的に表現しているが，de Boor のアルゴリズム (de Boor (1978)) を用いることでも同一の基底関数を構成することができる．

この B-スプライン基底関数の線形和が，一般に呼称される B-スプラインである．

$$X(t) = \sum_{j=1}^{m} w_j \phi_j(t) = \boldsymbol{w}'\boldsymbol{\phi}(t). \tag{1}$$

さらに，基底関数ベクトル $\boldsymbol{\phi}(t) = (\phi_1(t), ..., \phi_m(t))'$ に対する m 次元パラメータ $\boldsymbol{w} = (w_1, ..., w_m)'$ をデータの基づき推定すると，データに潜む未知の構造を非線形関数で捉えることができる．次節では，B-スプラインを用いて財務指標の時間推移を推定する手法を解説する．

[10]本稿においては財務指標データの観測期間に対応する．

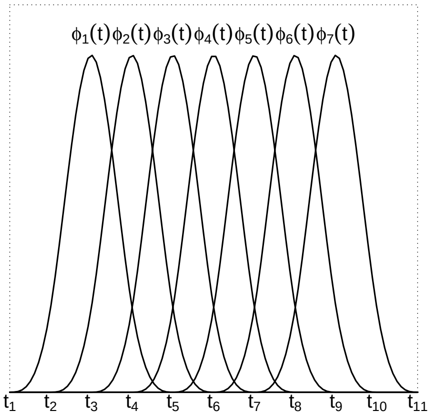


図 2: 3 次 B-スプライン基底関数の例.

3.2 財務指標推移のモデル化

いま，ある企業について，時刻 T における財務指標 X_T に関する n 組のデータ $\{(t_i, X_{t_i}); i = 1, ..., n\}$ が与えられたとする．これは数学的な表現であるが，時刻については四半期決算・半期決算・決算期など有価証券報告書が公表される日付などであり，財務指標としては総資本事業利益率，株主資本比率など様々なものが考えられる．

一般的に，財務指標の長期的な推移を見る際に役立つ代表的な統計手法としては回帰モデルが挙げられ，ここでは，財務指標の時間推移に対し (1) 式で定義した B-スプラインによる非線形構造を仮定する．B-スプラインモデル (1) 式のパラメータ $\boldsymbol{w}$ を最小二乗法によって推定するとき，パラメータ $\boldsymbol{w}$ の最尤推定値 $\hat{\boldsymbol{w}}$ は $\hat{\boldsymbol{w}} = (B'B)^{-1} B'\boldsymbol{x}$ で与えられる．ただし $B = (\boldsymbol{\phi}(t_1), ..., \boldsymbol{\phi}(t_n))'$, $\boldsymbol{x} = (x_{t_1}, ..., x_{t_n})'$ とする．しかし，最小二乗法は基底関数の個数によっては逆行列の計算が不安定となり，またモデルの柔軟性の故にデータに極度に依存したモデルが推定されてしまう．

そこで，パラメータは二乗誤差に曲線の局所変動の程度を考慮に入れた，次の罰則付き最小二乗法に基づいて推定する．

$$\begin{aligned}\ell_\lambda(\boldsymbol{w}) &= \sum_{i=1}^{n}(x_{t_i} - X(t_i))^2 - n\lambda \cdot \mathrm{penalty}(X(t)),\\ \mathrm{penalty}(X(t)) &:= \int_{t_1}^{t_n} \left(\frac{\partial^2 X(t)}{\partial t^2}\right)^2 dt \approx \sum_{j=2}^{m} (\Delta^2 w_j)^2 = \boldsymbol{w}' R \boldsymbol{w}.\end{aligned} \tag{2}$$

ここで，λ は平滑化パラメータと呼ばれ, 推定曲線の局所変動の程度を制御するハイパーパラメータである．また，$\Delta w_j = w_j - w_{j-1}$ とし，$m \times m$ 差分行列 R は，$(m-k) \times m$ 次

行列

$$D_k = \begin{pmatrix} (-1)^0{}_kC_0 & \cdots & (-1)^k{}_kC_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (-1)^0{}_kC_0 & \cdots & (-1)^k{}_kC_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & (-1)^0{}_kC_0 & \cdots & (-1)^k{}_kC_k \end{pmatrix}$$

を利用して，$R = D_2'D_2$ と与えられる．ただし，${}_kC_i$ は 2 項係数とする．罰則付き最小二乗法の理論的研究については，Good and Gaskins (1971), O'Sullivan *et al.* (1986), Green and Silverman (1994) Eilers and Marks (1996, 1998) などを参照されたい．また，罰則付き最小二乗法を経済・金融問題へ応用した研究は数多くあり，Fisher *et al.* (1995), 川崎・安道 (2002) はイールドカーブの推定問題に適用し，その安定性・有効性を報告している．

(2) 式の最小化に基づくパラメータの推定量 $\hat{\boldsymbol{w}}$，および時間の関数としてモデル化された財務指標の推移 $X(t)$ は

$$\hat{\boldsymbol{w}} = \left(B'B + n\lambda R\right)^{-1} B'\boldsymbol{x}, \quad X(t) = \hat{\boldsymbol{w}}'\boldsymbol{\phi}(t) \tag{3}$$

で与えられる．また，基底関数の個数 m と平滑化パラメータ λ は，修正 SBIC (Eilers and Marx (1998)) に基づき選択される．

$$\mathrm{MSBIC} = n\log(2\pi\hat{\sigma}^2) + n + \log(n)\mathrm{tr}\{B(B'B + n\lambda R)^{-1}B'\}. \tag{4}$$

ただし，$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n \{x_i - \hat{\boldsymbol{w}}'\boldsymbol{\phi}(t_i)\}^2/n$ とする．なお，MSBIC についての詳しい考察は 4.2 節でおこなう．

いま述べた非線形回帰モデルを用いることで，1.3 節・図 1 のように財務指標の推移を推定することができる．次節では，このように構成した財務指標の時間的推移を説明変数として用いたデフォルト予測モデルを提案する．

4 財務指標の時間依存を考慮したデフォルト予測モデル

本節では，企業の状態を表す確率変数 Y が，$Y = 1$ (デフォルト) または $Y = 0$ (非デフォルト) の二値をとるロジットモデルを拡張する．従来手法との違いを明確にするために，まず従来のロジットモデルについて簡単に述べる．

従来のロジットモデルでは，財務指標に関する p 次元ベクトル $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_p)'$ を判別の尺度として利用し，デフォルト確率 $\Pr(Y = 1|\boldsymbol{X})$ と非デフォルト確率 $\Pr(Y = 0|\boldsymbol{X})$ の対数オッズ比に p 個の指標の線形和

$$\log\left\{\frac{\Pr(Y = 1|\boldsymbol{X})}{\Pr(Y = 0|\boldsymbol{X})}\right\} = \alpha + \sum_{j=1}^{p}\beta_j X_j \tag{5}$$

を仮定して，パラメータ $\alpha, \beta_1, ..., \beta_p$ を最尤法により推定する (Seber (1984), Hosmer and Lemeshow (1989), Hastie *et al.* (2001)).

このロジットモデルの利点としては，観測された財務指標をモデルに代入することで，即座にデフォルト確率を推定できることが挙げられる．また，各財務指標にかかる推定されたパラメータの大きさを調べることで，デフォルト予測におけるその指標の影響度を調べられることも有用な点として挙げられよう．

しかし，特定時点で観測された財務指標のみを用いるモデル，または財務指標の時間的推移を代理変数 (線形回帰により推定した財務指標のトレンド, 変化率など) として利用するモデルだけでは，財務指標の時間的推移に関する情報を部分的にしか取り入れられない．また，変数の重要度を決定するパラメータが時間に関して一定である仮定をしているが，経済が活発な局面と経済後退局面においては財務指標の重要度が変化する可能性は否定できず,今までの事例研究においても，経済環境が異なる下では，重要となる財務指標が異なるとの報告がある (Sung *et al.* (1999))．そこで，次節では，従来のロジットモデルを財務指標の時間的推移を説明変数としたモデルへと拡張し，予測精度の向上を試みる．

4.1 モデル

いま，p 個の財務指標の時間推移をあらわす非線形関数のセット $\boldsymbol{X}(t) = \{X_j(t); j = 1, ..., p\}$ が与えられたとし，企業のデフォルト確率を $\Pr(Y = 1|\boldsymbol{X}(t))$，非デフォルト確率を $\Pr(Y = 0|\boldsymbol{X}(t))$ とあらわすものとする．

このとき，ある一時点で観測された財務指標 $\boldsymbol{X}$ を用いる従来のロジットモデル (5) から，財務指標の時間推移 $\boldsymbol{X}(t)$ を説明変数として用いるロジットモデルへの自然な拡張は，パラメータ関数 $\beta_j(t)$ で重み付けられた $X_j(t)$ の積分である．

$$\log\left\{\frac{\Pr(Y = 1|\boldsymbol{X}(t))}{\Pr(Y = 0|\boldsymbol{X}(t))}\right\} = \alpha + \sum_{j=1}^{p} \int_{\Omega} \beta_j(z) X_j(z) dz. \tag{6}$$

ここで，Ω は指標 $X_j(t)$ の定義域とし，パラメータ関数 $\beta_j(t)$ に対しては次の構造を仮定する．

$$\beta_j(t) = \sum_{l=1}^{q} c_{jl}\psi_l(t) = \boldsymbol{c}_j'\boldsymbol{\psi}(t), \qquad j = 1, ..., p. \tag{7}$$

ただし q はパラメータ数，$\boldsymbol{c}_j = (c_{j1}, ..., c_{jq})'$ は q 次元パラメータ，$\boldsymbol{\psi}(t) = (\psi_1(t), ..., \psi_q(t))'$ は B-スプライン基底関数ベクトルである．

このように従来のロジットモデルを拡張すると，財務指標の時間的推移 $\boldsymbol{X}(t)$ に基づくデフォルト予測モデルは, ベルヌーイ分布の密度関数

$$f(y|\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{\beta}(t), \alpha) = \Pr(Y = 1|\boldsymbol{X}(t))^y \Pr(Y = 0|\boldsymbol{X}(t))^{1-y} \tag{8}$$

で定式化され，財務指標データ $\boldsymbol{X}(t)$ をもつ企業のデフォルト確率及び非デフォルト確率は

$$\begin{aligned}\Pr(Y=1|\boldsymbol{X}(t)) &= \frac{\exp\left\{\alpha+\sum_{j=1}^{p}\boldsymbol{c}_j'Q\hat{\boldsymbol{w}}_j\right\}}{1+\exp\left\{\alpha+\sum_{j=1}^{p}\boldsymbol{c}_j'Q\hat{\boldsymbol{w}}_j\right\}},\\ \Pr(Y=0|\boldsymbol{X}(t)) &= \frac{1}{1+\exp\left\{\alpha+\sum_{j=1}^{p}\boldsymbol{c}_j'Q\hat{\boldsymbol{w}}_j\right\}},\end{aligned} \tag{9}$$

で与えられる．ここで，Q は $q\times m$ 次元行列で，その (i,j) 成分は $Q_{ij}=\int_\Omega \psi_i(z)\phi_j(z)dz$ で与えられ，m 次元ベクトル $\hat{\boldsymbol{w}}_j$ は，3.2 節で説明した手法により j 番目の財務指表を関数化した際に推定されたものとする．

いま，n 個の観測データ $\{(\boldsymbol{X}_i(t),y_i);i=1,...,n\}$ が与えられたとすると，モデルの対数尤度関数は

$$\ell(\boldsymbol{c}_1,...,\boldsymbol{c}_p,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}\left[\log\left\{1+\exp\left(\alpha+\sum_{j=1}^{p}\boldsymbol{c}_j'Q\hat{\boldsymbol{w}}_{ji}\right)\right\}-y_i\left(\alpha+\sum_{j=1}^{p}\boldsymbol{c}_j'Q\hat{\boldsymbol{w}}_{ji}\right)\right] \tag{10}$$

で与えられ, 対数尤度関数 (10) を最大にすることで，最尤推定量 $\hat{\beta}_j(t)$, $\hat{\alpha}$ は得られる．ここで，$\hat{\boldsymbol{w}}_{ji}$ は i 番目の企業の第 j 財務指表を関数化したときに得られるものである．しかし，パラメータ関数 $\beta_j(t)$ を時間 t の関数とみたとき, パラメータ関数が大きく変動する，つまり，デフォルト予測モデルが時間軸に関して極度に変動することはあまり望ましくない．

そこで，モデルの複雑さを次式で計測し，

$$\mathrm{penalty}(\beta_j(t)):=\int_\Omega\left(\frac{\partial^2\beta_j(t)}{\partial t^2}\right)^2dt\approx\boldsymbol{c}_j'R\boldsymbol{c}_j$$

パラメータ $\boldsymbol{c}_j$, α を罰則付き対数尤度関数の最大化に基づき推定する．

$$\ell_\lambda(\boldsymbol{c}_1,...,\boldsymbol{c}_p,\alpha)=\ell(\boldsymbol{c}_1,...,\boldsymbol{c}_p,\alpha)-\frac{n\lambda}{2}\sum_{j=1}^{p}\boldsymbol{c}_j'R\boldsymbol{c}_j. \tag{11}$$

ここで，λ は平滑化パラメータで, $q\times q$ 差分行列 R は (2) 式で定義したものとする．推定量 $\hat{\mathbf{c}}_j$, $\hat{\alpha}$ は数値的最適化により推定され，(9) 式に $\hat{\mathbf{c}}_j$, $\hat{\alpha}$ を代入すると予測モデルが構成される．

財務指標データ $\boldsymbol{X}(t)$ が与えられ，デフォルト・非デフォルトの予測をおこなうときは，デフォルト確率が $\hat{\Pr}(y=1|\boldsymbol{X}(t))>C$ の関係を満たすとき，そのデータをデフォルト企業へと判別する．閾値 $C\in(0,1)$ を高く設定すると Type 1 エラー (デフォルト企業を非デフォルト企業と誤判別する誤り) が多くなり，逆に低く設定すると Type 2 エラー (非デフォルト企業をデフォルト企業と誤判別する誤り) が多くなってしまう．Type 1 エラーと Type 2 エラーの意味は全く違うもので，その重要度は，その国の経済制度・経済環境に依存する (Sinkey (1979), Lane *et al.* (1986)) ことから，閾値 C の選択においては様々な要因を考慮

すべきである．しかし，相手の信用リスクに見合わせ，収益とリスクのトレードオフをおこなうときには，推定されたデフォルト確率を利用すればよいので，本稿での C の選択についてはここで議論をとどめておく．

構成された予測モデルは財務指標の種類・個数，平滑化パラメータ λ, 及び (7) 式で定義されるパラメータ関数 $\beta_j(t)$ の B-スプライン基底関数の個数 q に依存し，これらの選択を適切におこなう必要がある．例えば, 財務指標を加えていくにつれて推定用データへの適合度が良くなるが，必要以上に財務変数を加えるとモデルの予測精度が低下することから，財務指標数の選択は特に重要となる．次節では，罰則付き最尤法に基づき推定された予測モデルを評価するモデル選択規準を提案する．

4.2 モデル選択

一般に，モデルのパラメータ推定に用いる推定用データの特性を最もよく表現するモデルが，必ずしも最適な予測モデルとはならない．モデルの推定データに対する適合度は対数尤度で計測することができ，モデルの複雑度を増加させることで，対数尤度は限りなく大きくなる．しかし，本来評価されるべきは将来観測されるデータについての予測精度であり，あまりにモデルが複雑過ぎると推定データに潜むノイズをもモデルが学習してしまい，結果として予測精度が悪くなってしまう．この問題は，統計的モデル選択問題と呼ばれ，その重要性から，現在，理論的・応用的側面の両面で広く研究されている．

モデル選択のひとつの方向性としては，統計的リサンプリング法 (交差検証法 (Stone (1974)), ブートストラップ法 (Efron (1979, 1986), Efron and Tibsirani (1993))) を利用することである．統計的リサンプリング法は，母集団分布を仮定しないノンパラメトリックな方法で，高い汎用性をもつが，膨大な計算時間が必要となってくる．実務においての負担を考慮し，本稿ではモデルの評価規準を解析的に与えることにする．

解析的規準としては，AIC (Akaike (1974)), 及び SBIC (Schwarz (1978)) が広く知られている．

$$\begin{aligned}\mathrm{AIC} &= -2\times(\text{対数尤度}) + 2\times(\text{パラメータ数}),\\ \mathrm{SBIC} &= -2\times(\text{対数尤度}) + \log(n)\times(\text{パラメータ数}).\end{aligned}$$

つまり，第一項目が対数尤度 (学習データへの適合度)，第二項目がモデルの複雑さに対する罰則を計測している．一般に，モデルの複雑度が大きくなるに比例して学習データへの適合度が良くなるが，モデルの複雑さに対する罰則が大きくなる．また，単純なモデルについては，罰則項の値は小さいものの，学習データへの適合度が悪くなる．つまり，過度に複雑・単純なモデルは結果的に選択されず，適当な自由度をもつモデル (つまり，予測精度が高いモデル) が最終的に選択されることになる．

しかし，これらの規準は最尤法に基づき構成したモデルを評価する規準であり，本稿では罰則付き最尤法に基づきモデルを構成していることから，モデルの自由度をパラメータ数として単純にこれらの規準を適用することには問題がある．なぜなら，たとえモデルに含まれるパラメータ数が同じであったとしても，罰則の程度により，実質的なモデルの自由度が変化するからである．

Hastie and Tibshirani (1990) は，実質的なモデルの自由度（等価自由度）を平滑化行列の対角和として定義した．例えば，3.2 節のスプライン平滑化において，平滑化行列は

$$H_\lambda = B(B'B + n\lambda R)^{-1}B'$$

と定義され，時点 t_i における財務指標の予測値 $\hat{x}_{t_i}$ は，$\hat{\boldsymbol{x}} = H_\lambda \boldsymbol{x}$ と表せる．ただし，$\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{x}_{t_1}, ..., \hat{x}_{t_n})'$, $\boldsymbol{x} = (x_{t_1}, ..., x_{t_n})'$, は n 次元ベクトル，$B = (\boldsymbol{\phi}(t_1), ..., \boldsymbol{\phi}(t_n))'$ は $n \times m$ 次行列，R は (2) で定義される $m \times m$ 次行列とする．

いま，2.2 節のスプライン平滑化で紹介した罰則付き二乗誤差 (2) において $\lambda = 0$，すなわち，罰則を科さずにパラメータを推定すると，その形式的な解は (4) 式で $\lambda = 0$ とした $\hat{\boldsymbol{w}} = (B'B)^{-1} B'\boldsymbol{x}$ となり，財務指標の予測値は，$\boldsymbol{x} = B(B'B)^{-1}B'\hat{\boldsymbol{x}}$ と表現される．このとき，平滑化行列は $H_{\lambda=0} = B(B'B)^{-1}B'$ で定義され，その対角和を計算すると，

$$\mathrm{tr}H_{\lambda=0} = \mathrm{tr}\{B(B'B)^{-1}B'\} = \mathrm{tr}\{B'B(B'B)^{-1}\} = m$$

すなわち，平滑化行列で定義される等価自由度はモデルに含まれるパラメータ数となる．このような理由から，等価自由度の自由度は平滑化行列の対角和として定義され，また，その計算は容易であることから，それ以降広く利用されることとなった (Hurvich *et al.* (1998)).

Eilers and Marx (1996, 1998) は，オリジナルの AIC, 及び SBIC のパラメータ数を，平滑化行列の対角和として置き換え，修正 AIC (MAIC)，修正 SBIC (MSBIC) を提案した．この結果を用いると，罰則付き対数尤度関数によって推定されたデフォルト予測モデルを評価する修正 SBIC は次式で与えられる．

$$\mathrm{MSBIC} = -2\ell(\hat{\boldsymbol{c}}_1, ..., \hat{\boldsymbol{c}}_p, \hat{\alpha}) + \log(n)\mathrm{tr}\{W^{1/2}E(EWE + n\lambda D)EW^{1/2}\}. \quad (12)$$

ただし，$\ell(\hat{\boldsymbol{c}}_1, ..., \hat{\boldsymbol{c}}_p, \hat{\alpha})$ は (10) 式で定義されるモデルの対数尤度，$W = \mathrm{diag}\{\hat{\mathrm{Pr}}(y_1 = 1|\boldsymbol{X}_1(t)), ..., \hat{\mathrm{Pr}}(y_n = 1|\boldsymbol{X}_n(t))\}$ は n 次元対角行列, $D = \mathrm{diag}\{0, R, ..., R\}$ は $(pq+1) \times (pq+1)$ 次元行列とし，$n \times (pq+1)$ 行列 E の第 i 列は $E_{i\cdot} = (1, \hat{\boldsymbol{w}}_{1i}'Q, ..., \hat{\boldsymbol{w}}_{pi}'Q)$ で与えられる．ここで，$\hat{\boldsymbol{w}}_{ji}$ は i 番目の企業の第 j 財務指表を関数化したときに得られるものである．このモデル評価規準 MSBIC を最小とするデフォルト予測モデルを最適なモデルとして選択する[11]．

[11]既に見たように，修正 SBIC は，最尤法で推定されたモデルに対する Schwarz 型情報量規準 SBIC の形をそ

5　事例解析

5.1　データと財務指標について

本節では，東証・大証の上場企業によるデフォルト事例の分析を通して提案する手法の有効性を検証する．ここで言うデフォルトとは，法的倒産またはそれに準ずる行為とし，法的倒産には会社更生，和議，破産，商法整理及び特別清算を含み，それに準ずる行為とは，銀行取引停止処分，金融機関による債務放棄などを含むものとする．ここでの観測期間は1996年〜2002年3月31日であり,「銀行業」,「保険業」,「証券、商品先物取引業」を除く100デフォルト事例に注目して解析をおこなう．モデルの予測精度を検証するため，対象期間をモデル推定期間 (2000年3月31日迄) テスト期間 (2000年4月1日以降) に分割し，50デフォルト事例を推定用サンプル，50デフォルト事例をテストサンプルとして用いることとした．

本稿での目的の一つは，現在までに観測された財務指標データに基づき，企業がデフォルト陥る可能性を推定することであるが，それを表す代表的な指標として格付機関による債券格付がある．債券格付とは，企業が発行した個々の債券について，元利金が約定通りに支払われる安全性・確実性の程度を，発行体の信用リスクに関する膨大な情報から格付機関が判断し，ある一定の簡潔な符号によって投資家に投資情報として提供するものである．ここでは，モデルのデフォルトに対する予測精度を計測することを考えているが，提案手法の推定結果と企業のデフォルトリスクを表す格付とが整合的であれば，さらにモデルの信頼性が保たれる．そこで，非デフォルト企業については，2000年3月31日時点でR&Iにより長期優先債務格付が付与されている東証上場企業700社 (200推定サンプル, 500テストサンプル) を用いることにした[12]．ここで，長期優先債務格付とは，R&Iが事業・財務リスクを測定してデフォルトリスク分析をおこなう段階での総合的な債務履行能力についての評価である．個別債券の格付は，デフォルトリスク分析の結果に回収リスクを加味して付与されることから，たとえ発行体が同一であっても，優良担保付社債と無担保社債には明らかに回収リスクに差異があり，債券格付に格差が設けられてしまうケースが生じてしまう．この理由から，長期優先債務格付を用いることが妥当であると考えた．

デフォルト予測に有効な財務指標については，数多くの指標が考えられるが，ここでは，伝統的な財務諸表分析でよく議論される，収益性，効率性，規模，キャッシュフローなどを

のままに，モデルのパラメータ数を平滑化行列の対角和で置き換えたものである．一方，罰則付き最尤法など，モデルの推定法が必ずしも最尤法でない場合のBayes型情報量規準については，拡張BIC (Extended BIC) としてKonishi, Ando and Imoto (2002) により一般理論が構成されている．また，モデルの自由度を平滑化行列の対角和として定義した修正AICも考えられ, 修正AICとは別に，必ずしも最尤法によらず推定されたモデルに対し，その対数尤度のバイアス項を解析的に評価する方法として一般化情報量規準GIC (Konishi and Kitagawa (1996)) があり，これをB-スプライン平滑化におけるモデル選択問題に適用したものとして，井元・小西 (1999), Imoto and Konishi (2003) がある．その他の方法として，一般化交差検証法 (Craven and Wahba (1979)) なども利用できる．

[12]「銀行業」,「保険業」,「証券、商品先物取引業」を除く．また，本稿では，日経NEEDSのデータベースを利用しているが，財務指標に欠損値が多いサンプルなどについては解析対象から除外した．

表す代表的な指標を考慮し，表 1 に挙げられるものを候補とする．また，当期利益，売上高，キャッシュフローについては常用対数とし，基本的には 1990 年〜2000 年 3 月 31 日迄までの観測データを利用するが，途中でデフォルトに至るケースはその直近の財務指標まで用いた．

債券格付データについては R&I の債券格付データベース CD-ROM 版を，財務データについては，日経 NEEDS のデータベースの年間単独決算を利用した．次節以降では，あらかじめ 3.2 節で解説した B-スプライン非線形回帰手法により財務指標の時間変化がカーブとして捉えられているものとする．

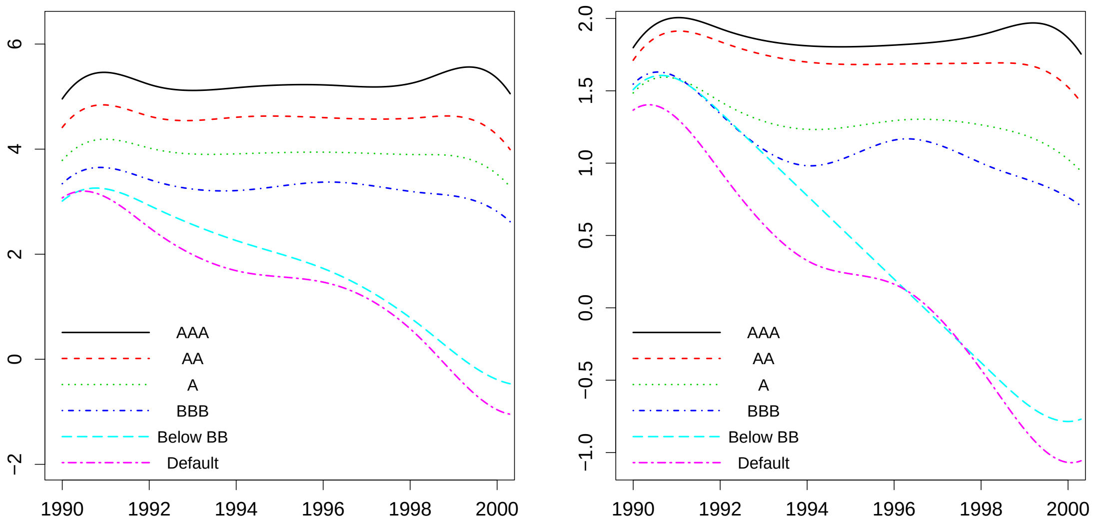
指標の分類	財務指標	MSBIC	順位
収益性・効率性	総資本事業利益率	135.12600	11
	株主資本利益率	185.20043	15
	投資収益率	122.16236	7
	売上高利益率	123.24905	8
	一株当たり利益	89.42567	2
	従業員 1 人当当期利益	97.68204	3
回転率	使用総資本回転率	189.90010	16
	有形固定資産回転率	225.84937	18
安全性	自己資本比率	128.69930	9
	負債比率	182.44314	14
	流動比率	152.03567	12
	固定比率	193.92191	17
規模	当期利益	113.48810	5
	売上高	167.16259	13
キャッシュフロー	キャッシュフロー	74.10461	1
	キャッシュフロー対負債比率	107.54834	4
	キャッシュフロー対売上高比率	131.50331	10
	インタレストカバレッジ	122.09540	6

表 1: モデル構築に用いる財務指標と，モデル評価規準 MSBIC に基づく説明力

5.2 予測精度評価 1 (格付との整合性)

本節では，財務指標の時間的推移を考慮したロジットモデルの推定結果を報告する．まず，表 1 に挙げられた各々の財務指標の説明力を調べていく．250 個の推定用サンプル (50 デフォルト事例, 200 非デフォルト事例) に基づく対数尤度関数 (10) に，パラメータ関数の複雑度に対する罰則項を加えた罰則付き対数尤度関数 (11) の最大化に基づき各変数に基づく

(1 変数) モデルを推定した．表 1 は，そのときのモデル評価規準 MSBIC (12) の値をまとめたものである．MSBIC の値が小さくなるにつれて，その財務指標の説明力は大きく，デフォルト予測に有効であることを示す．表においては，キャッシュフロー関連，及び収益性・効率性関連指標が上位をしめているが，確かに，純利益を毎期計上し，キャッシュフローが潤沢にある企業がデフォルトに陥るとは考えにくく，解釈しやすい結果である．



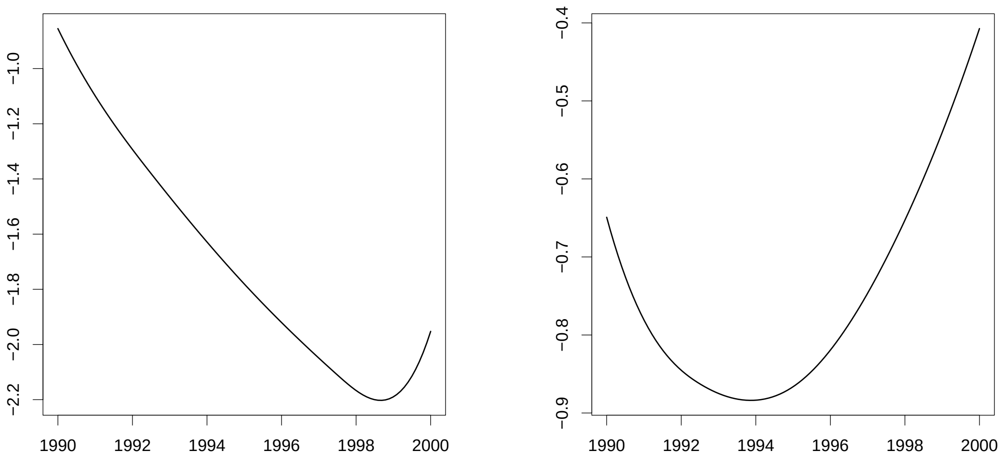
(a): キャッシュフロー　　(b): 一株当たり利益

図 3: 格付別の平滑化財務指標推移．ただし，投資適格企業についてはノッチを無視した 4 つのクラス，AAA 群, AA 群 (AA+,AA, AA–), A 群 (A+, A, A–), BBB 群 (BBB+, BBB, BBB–)，投資不適格企業群 (BB+以下)，及びデフォルト企業群の平滑化財務指標推移をプロットしている．

図 3 は，表 1 に挙げた 18 財務指標で説明力が最も高かった資金の潤沢さをあらわすキャッシュフロー，経営効率性指標である一株当たり利益の時間変化を，3.2 節で解説した非線形回帰手法により推定した結果を示している．実際には，個々の企業について財務指標を曲線化しているが，図の見易さを考慮し，投資適格企業については，ノッチを無視して無視した 4 つのクラス，AAA 群, AA 群 (AA+,AA, AA–), A 群 (A+, A, A–), BBB 群 (BBB+, BBB, BBB–) に集約し，投資不適格企業群 (BB+以下) をひとつにまとめ，各格付群の平滑化財務指標の推移をプロットしている．また，格付については，2000 年 3 月 31 日時点での R&I による長期優先債務格付を利用している．

格付と各財務指標の推移を照らし合わせると格付と推定された財務指標の推移は整合的対応しており，非線形回帰手法による財務指標推移の推定には，十分な妥当性があるといえる．例えば，投資適格と投資不適格の境界線に最も近い BBB 群の平滑化財務推移は，デフォルト企業群より格段に優れているものの，最上位格付 AAA 群のものと比較すると，その水準は劣っていることが明らかである．また，投資不適格企業群とデフォルト企業の財務指標推移は，殆ど似通った挙動を示しており，投資不適格企業群の業績悪化の傾向が顕著に見られる．

次に，複数の財務指標に基づきモデル推定した結果[13]，キャッシュフローと一株当たり利益に基づく 2 変数モデルが MSBIC を最小にし，最適なモデルとして選択された．図 4 に，各変数に対するパラメータ関数 $\beta(t)$ を図示した．一般に，デフォルト確率に寄与するパラメータ関数が正の場合，対応する財務指標の値が大きいほどデフォルト確率が高くなり，逆に，係数が負の場合は，デフォルト確率が低くなる．推定結果を分析すると，各パラメータ関数が常に負の領域にあることから，キャッシュフローと一株当たり利益が高い企業ほどデフォルト確率が低くなると推察される．これは符号条件に関する一般的な認識と整合する結果である．また，一株当たり利益の絶対値が 1993 年頃から減少傾向にあるのに対し，キャッシュフローの絶対値には全体的に増加傾向が見られており，デフォルト回避のためにキャッシュフローを今まで以上に重視すべきであることを示唆している．



(a): キャッシュフロー　　(b): 一株当たり利益

図 4: 各変数に対する重み関数 $\beta(t)$ の挙動．縦軸：$\beta(t)$, 横軸：時間 t (年).

[13] ここでの最適な財務変数の組み合わせ探索範囲は，表 1 の財務変数の全ての組み合わせ 2^{18} 通りである．

図 5 のボックスプロットは，テストデータに対して，(9) 式で定義されるデフォルト確率 $\hat{\Pr}(y=1|\boldsymbol{X}(t))$ の推定値を，格付の情報を加味して図示したもので，R&I の長期優先債務格付と極めて整合的に対応している．図 5 を見ると，最上級格付 AAA はデフォルト確率が皆無であるのに対し，格付が下がるに従い，デフォルト確率が大きくなっている．このことからも，提案モデルにより予測されたデフォルト確率は，一段と信頼できるものであることが確認された．

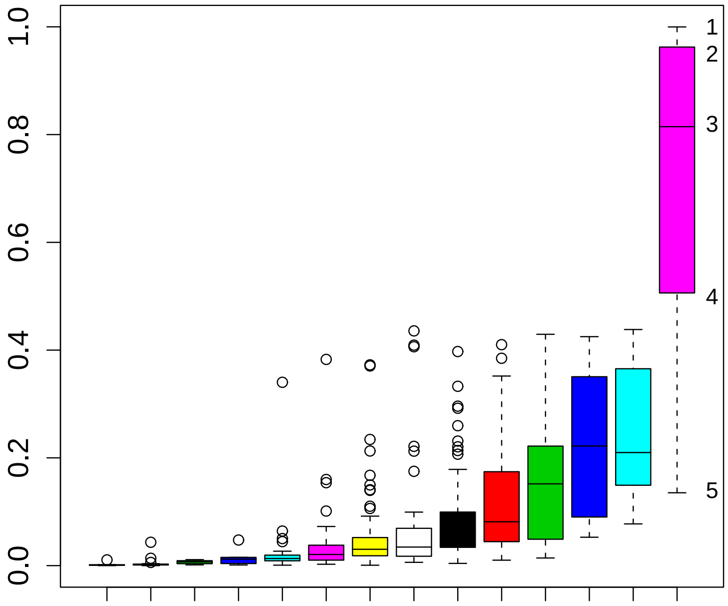


図 5: テストデータに対してのデフォルト確率のボックスプロット（格付別）．一番左から順に AAA, AA+, AA, AA–, A+, A, A–, BBB+, BBB, BBB–, BB+, BB, BB–以下, デフォルト企業群のボックスプロットである．デフォルト企業群のボックスプロット右横の数字は，それぞれ 1: 四分位点 ×1.5 の範囲での最大値，2: 上側四分位点, 3: 中央点, 4: 下側四分位点，5: 四分位点 ×1.5 の範囲での最小値を表す．

5.3　予測精度評価 2 (ROC による予測精度)

テストデータに対する推定精度については，ROC (Receiver Operating Characteristic) 曲線，および AUC (Area Under the Curve) を用いて検討した[14]．ROC 曲線は区間 $[0,1]\times[0,1]$ 上の関数で，いま，デフォルト確率が高い順番にデータが整列されているとすると，j 番目に高いデフォルト確率における ROC 曲線の座標点は $\mathrm{ROC}(j)=(n_j/n_n, d_j/n_d)$ で定義さ

[14]ROC, 及び AUC については山下・川口・敦賀 (2003) を参照されたい．

れる．ただし，n_n，n_d はそれぞれデフォルト・非デフォルト企業数，n_j，d_j は j 番目に高いデフォルト確率より高いデフォルト確率をもつデフォルト・非デフォルト企業の数である，つまり，縦軸にはデフォルト確率の高い上位 j 件に対するデフォルト企業の割合，横軸には非デフォルト企業の割合が描かれることになる．また，AUC とは，ROC 曲線，直線 $y = 0$，及び直線 $x = 1$ で囲まれた面積で定義される量で，AUC が 1 に近づくほどデフォルト予測精度の高いモデルであると判断される．

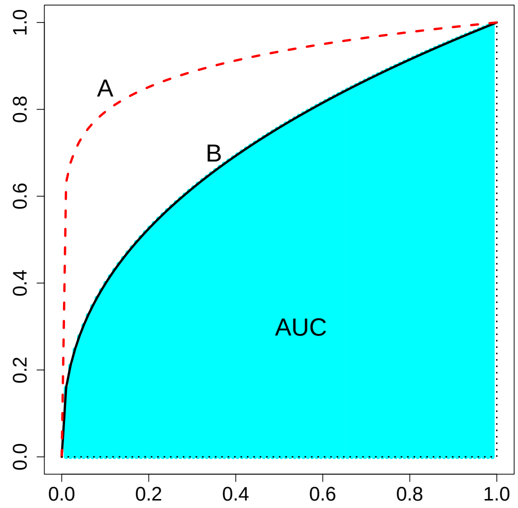
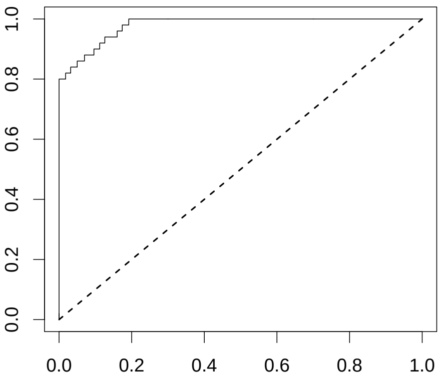


図 6: ROC 曲線の例と ROC 曲線 B に対する AUC (横軸を x, 縦軸を y として，ROC 曲線 B と，直線 $y = 0$, 及び直線 $x = 1$ で囲まれる面積)

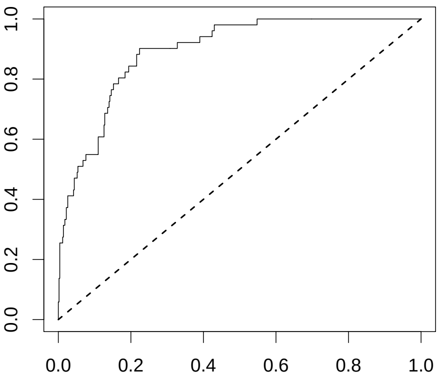
図 6 における曲線 A (- - -), B (—) は，ROC 曲線の例で，色で塗られた領域の面積 AUC が ROC 曲線 B の予測精度を表している．ROC 曲線 A の AUC は，ROC 曲線 B の AUC に ROC 曲線 A，B で囲まれた面積を加えることで与えられ，ROC 曲線 A に対応するモデルは ROC 曲線 B のモデルよりも予測精度が優れていることを表している．つまり，ROC 曲線が直線 $y = 1$, $x = 0$ に近ければ近いほど，AUC が大きくなり，予測精度が高いモデルであるといえる．図 7 は，テストデータに対する提案手法の ROC 曲線を，従来のロジットモデル (5) の ROC 曲線と比較したものである．従来のロジットモデルの財務指標については，表 1 に挙げた 16 財務指標，およびそれらの変化率（前年比）を合わせた 32 変数を候補とした (これを従来モデル A とする)．さらに，Meyer and Pifer (1970), Edmister (1972) の研究との比較のために，5 期間にわたる財務指標のトレンドを線形回帰分析に基づき推定し，そのトレンドをモデルの説明変数として利用したロジットモデルとの比較も行なった．財務指標については，表 1 に挙げた 16 財務指標と，それらの変化率（前年比），線形回帰分析により推定されたトレンドを合わせた 48 変数を候補とし，AIC で説明力が高かった財

務指標をステップ・ワイズに財務指標を加えてモデルを構成した．(これを従来モデル B とする).

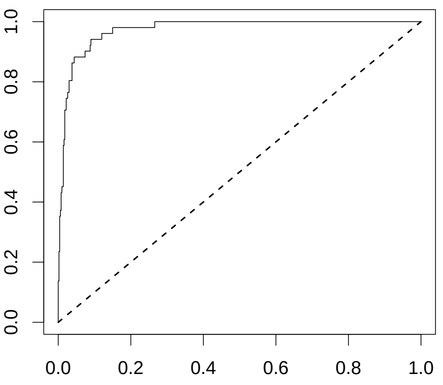
従来モデル A・B の推定方法であるが，まず，各々の説明力を AIC で計測し，AIC で説明力が高かった 18 財務変数について最適な財務変数の組み合わせを探索した．探索範囲は，財務変数の全ての組み合わせ 2^{18} 通りである．最終的に選択されるモデルは，AUC が最も良いものとした．図 7 の従来モデル A (AUC = 0.822) と従来モデル B (AUC = 0.973) の ROC 曲線から，財務指標のトレンド情報を加えて企業のデフォルトリスクを計測することで，従来の財務アプローチを改善できることが実証された．また，提案モデルの AUC は 0.979 であり，提案モデルが高精度の予測能力を持つことは図 7 からも容易に確認できる．



(a): 提案モデル (AUC = 0.979)



(b): 従来モデル A (AUC = 0.822).



(c): 従来モデル B (AUC = 0.973).

図 7: ROC 曲線の比較．実線：ROC 曲線，点線：直線 $y = x$.

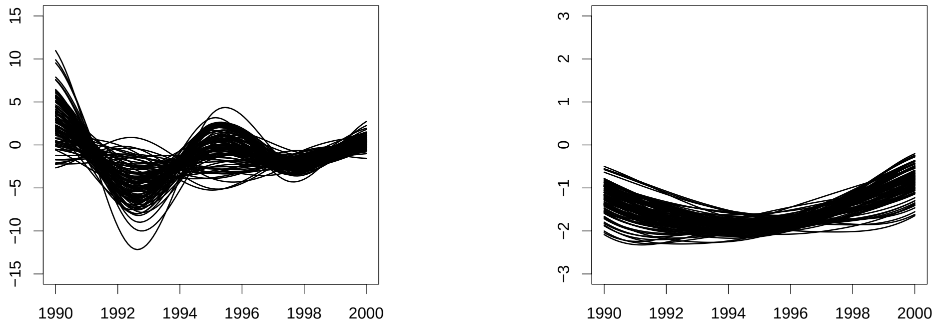
5.4 ブートストラップ法による安定性分析

本節では，ブートストラップ法を用いて，提案モデルを最尤法と罰則付き最尤法に基づいて推定し，両者の安定性を比較検証する．前節で選択された 2 変数を用いたデフォルト予測モデルを用いるのが最良であるが，ブートストラップサンプルによっては，最尤法を用いると 2 変数モデルのパラメータが発散してしまい，パラメータの推定量が得られなかった．罰則付き最尤法の安定性・有用性はこの事実からも明らかであるが，両者の比較を詳しく検証するために，1 変数モデル，特に表 1 で MSBIC が優れていたキャッシュフローに基づくモデルを考えた．

まず，前節で用いた推定用データ (200 サンプル) から 100 組のブートストラップ標本を発生させ，各ブートストラップ標本に基づいてデフォルト予測モデルを推定した．ただし，ブートストラップ標本は，データの組を復元抽出することで構成し，平滑化パラメータの値は $\lambda = 10^{-3}$，パラメータ関数 (7) 式の B-スプライン基底関数の個数は $q = 5$ とした．

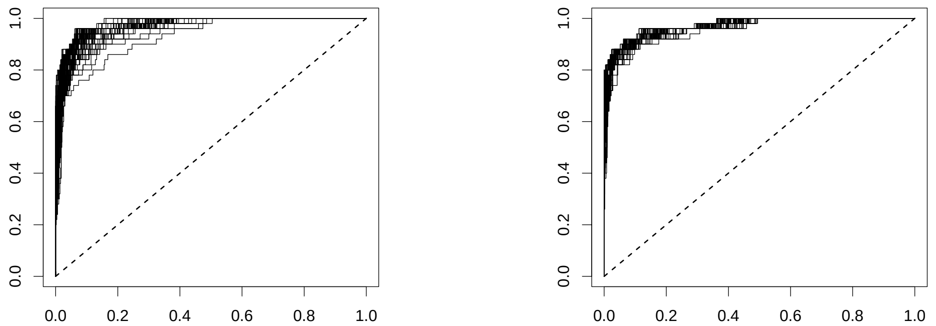
図 8, 9 は，各ブートストラップ標本に基づいて推定されたパラメータ関数 $\hat{\beta}(t)$, 及び 500 テストサンプルに対する ROC 曲線の変動である．ここで，図 8 のパラメータ関数の軸（縦軸）のスケールが，最尤法と罰則付き最尤法で 5 倍違うことに注意されたい．このスケールの相違の理由は，最尤法により推定されたパラメータ関数の変動が大きすぎるため，罰則付き最尤法に基づき得られた推定量 $\hat{\beta}(t)$ が，単一直線に見えてしまうことを避けるためである．図 8, 9 から，罰則付き最尤法により極めて安定的にパラメータ関数を推定でき，その結果，変動が少ない ROC 曲線を得られることが一目瞭然である．対照的に図 8, 9 の最尤法で推定されているモデルについては，パラメータ関数の変動が大きく，ブートストラップ標本によってはパラメータ推定が極度に不安定になる場合もあることが観察される．また，その ROC 曲線は変動が大きい．ここでは，キャッシュフローについてのみ考察しているが，残りのモデル財務指標についても同様の結果が確認された．

さらに，図 10 はそれぞれ，各ブートストラップ標本に基づくモデルの評価規準 MSBIC とテストサンプルに対する AUC のボックスプロットである．図 10 から，罰則付き最尤法に対応する MSBIC と AUC のメジアンが最尤法を優越している．また，その変動が小さいことからも，罰則付き最尤法の有効性・安定性が確認される．また，残りの財務指標についても，罰則付き最尤法により推定されたモデルが極めて安定し，提案する手法が有効に機能していることが全般的に確認された．



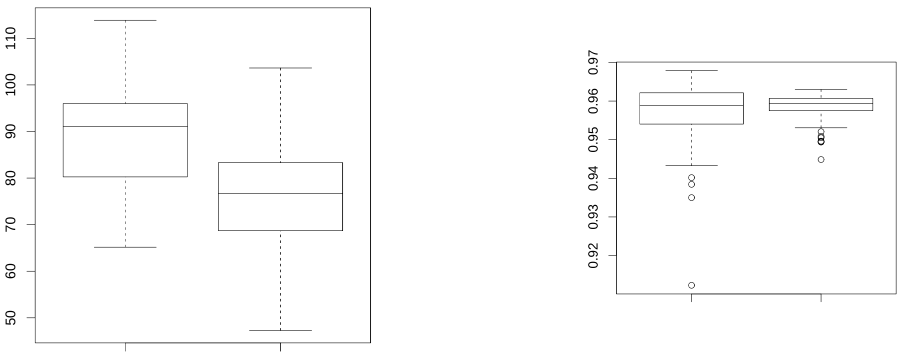
(a): 最尤法.　　(b): 罰則付き最尤法.

図 8: ブートストラップで推定されたパラメータ関数 $\beta(t)$ の変動．横軸：年.



(a): 最尤法.　　(b): 罰則付き最尤法.

図 9: テストデータに対しての ROC 曲線の変動．(a): 最尤法，(b): 罰則付き最尤法.



(a): MSBIC　　(b): AUC

図 10: MSBIC, AUC のボックスプロット．それぞれの図において，左側が最尤法，右側が罰則付き最尤法の結果である.

6　まとめと今後の課題

本稿では，財務指標の時間依存を考慮した信用リスク測定モデルを，関数データ解析の枠組みで提唱した．金融機関にとってリスク管理体制の整備は経営上の最重要課題の一つであり，金融実務において定量的な信用リスク管理手法の定着は必要不可欠である．特に，信用リスクの定量化にあたっては，デフォルトリスク計測手法の推定精度向上が望まれていた．

従来のロジットモデルに基づく財務アプローチには，情報活用能力・推定精度など克服すべき課題が多く存在し，特に改善すべき点は，モデルが直近の ”一時点 ”で観測された財務指標，または時間的推移をあらわす代理変数に基づいており，過去に蓄積された財務指標に関する膨大な情報があるにもかかわらず，それを十分活用しきれていないところにあった．例えば，信用リスクを計測するうえで，企業の業績の推移・安定性などは重要な位置を占めるが，従来モデルでは，このような情報を完全に反映できていなかった．

本稿では，財務指標の時間的推移が信用リスク計測に影響を与えると考え，関数データ解析の枠組みにおいて，その変化を非線形回帰モデルによって捉え，財務指標の推移そのものによってデフォルトリスクを計測する統計モデルを新しく提案した．また，モデルを安定的に推定するために，罰則付き最尤法を用いてパラメータを推定し，ブートストラップの利用を通じて，その有用性を確認した．

実データの解析を通じて，財務諸表の推移の情報を用いることでモデルの予測精度が向上することが確認された．今回は，過去の財務指標の情報に基づきモデルを構成したが，予測財務指標や経済マクロ変数の情報を加えることで，さらに予測精度の向上が予想される．このことについては，今後の課題とし，稿を移して議論していきたい．

参考文献

Akaike, H. (1974): A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control.* **AC - 19**, 716 – 723.

Akaike, H. (1977): On entropy maximization principle. in *Applications of Statistics*, (P. R. Krishnaiah, ed.), North-Holland, Amsterdam, 27 – 41.

Akaike, H. (1978): A Bayesian analysis of minimum AIC procedure. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics.* **30 - A**, 9 – 14.

Altman, E. I. (1968): Financial ratios, discriminant analysis and the prediction of corporate bankruptcy. *Journal of Finance.* **23**, 589 – 609.

Altman, E. I., Haldeman, R. G. and Narayanan, P. (1977): ZETA analysis: A new model to identify bankruptcy risk of corporations. *Journal of Banking and Finance.* **1**, 29 – 51.

Atiya, A. F. (2001): Bankruptcy prediction for credit risk using neural networks: A survey and new results. *IEEE Transactions on Neural Networks.* **12**, 929 – 935.

Beaver, W. (1967): Financial ratios as predictors of failures. *Journal of Accounting Research.* **1**, 71 – 111.

Blum, M. (1974): Failing company discriminant analysis. *Journal of Accounting Research.* **12**, 1 – 25.

Cleveland, W. S. (1979): Robust locally weighted regression and smoothing scatterplots. *Journal of The American Statistical Association.* **74**, 829 – 836.

Cleveland, W. S. (1981): LOWESS: A program for smoothing scatterplots by robust locally weighted regression. *The American Statistician.* 35, 54.

Cole, R. A. and Jeffrey, W. G. (1995): Separating the likelihood and timing of bank failure. *Journal of Banking and Finance.* **19**, 1073 – 1089.

Craven, P. and Wahba, G. (1979): Smoothing noisy data with spline functions, *Numerishe Mathmatik.* **31**, 377 – 403.

David, B. A. and Talat, M. (1995): New firm survival: New results using a hazard function. *The Review of Economics and Statistics.* **77**, 97 – 103.

Deakin, E. B. (1972): A discriminant analysis of predictors of business failure. *Journal of Accounting Research.* **10**, 167 – 179.

de Boor, C. (1978): *A practical guide to splines.* Springer, Berlin.

Edmister, R. O. (1972): An empirical test of financial ratio analysis for small business failure prediction. *Journal of Financial and Quantitative Analysis.* **7**, 335 – 356.

Efron, B. (1979): Bootstrap methods, *The Annals of Statistics.* **7**, 1 – 26.

Efron, B. (1986): How biased is the apparent error rate of a prediction rule ?. *Journal of the American Statistical Association.* **81**, 461 – 470.

Efron, B. and Tibsirani, R. J. (1993): *An introduction to bootstrap.* Chapman & Hall.

Eilers, P. H. C. and Marx, B. D. (1996): Flexible smoothing with *B*-splines and penalties (with discussion). *Statistical Science.* **11**, 89 – 121.

Eilers, P. H. C. and Marx, B. D. (1998): Direct generalized additive modeling with penalized likelihood. *Computational Statistics and Data Analysis.* **28**, 193 – 209.

Fan, A. and Palaniswami, M. (2000): A new approach to corporate loan default prediction from financial statements. In *Proceedings of the Computational Finance and Forecasting Financial Markets Conference.* London.

Fisher, R. A. (1936): The use of multiple measurements in taxonomic problems. *Annals of Eugenics*. **7**, 179 – 188.

Fisher, M. E, Nychka, D and Zervos, D. (1995): Fitting the term structure of interest rates with smoothing splines. Federal Reserve Bank Finance and Economics, Discussion Paper, 95-1.

Good, I. J. and Gaskins, R. A. (1971): Nonparametric roughness penalties for probability densities. *Biometrika*. **58**, 255 – 277.

Green, P. J. and Silverman, B. W. (1994): *Nonparametric regression and generalized linear models.* Chapman & Hall, London.

Hastie, T. and Tibshirani, R. (1990): *Generalized additive models.* Chapman & Hall, London.

Hastie, T., Tibshirani, R. and Friedman, J. (2001): *The Elements of Statistical Learning.* Berlin, Springer.

Hosmer, D. W. and Lemeshow, S. (1989): *Applied logistic regression.* New York, Wiley.

Hurvich, C. M., Simonoff, J. S. and Tsai, C.-L. (1998): Smoothing parameter selection in nonparametric regression using an improved Akaike information criterion. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*. **60**, 359 – 373.

Imoto, S. and Konishi, S. (2003): Selection of smoothing parameters in B-spline nonparametric regression models using information criteria. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*. **55**, 671 – 687.

Konishi, S., Ando, T. and Imoto, S. (2002): Bayesian information criteria and smoothing parameter selection in radial basis function networks. The Institute of Statistical Mathematics, Research Memorandum. No 846.

Konishi, S. and Kitagawa, G. (1996): Generalised information criteria in model selection. *Biometrika*. **83**, 875 – 890.

Lane, W. R., Looney, S. W., and Wansley, J. W. (1986): An application of the cox proportional hazards model to bank failure. *Journal of Banking and Finance*. **10**, 511 – 531.

Leamer, E. E. (1978): *Specification searches: Ad hoc inference with nonexperimental data.* John Wiley and Sons.

Lee, S. H. and Jorge, L. U. (1996): Analysis and prediction of insolvency in the property-liability insurance industry: A comparison of the logit and hazard models. *Journal of Risk and Insurance*. **63**, 121 – 130.

Libby, R. (1975): Accounting ratios and the prediction of failure: Some behavioral evidence. *Journal of Accounting Research.* **1**, 150 – 161.

Lo, A. W. (1986): Logit versus discriminant analysis: A specification test and application to corporate bankruptcies. *Journal of Econometrics.* **31**, 151 – 178.

McCullagh, P. and Nelder, J. A. (1989): *Generalized linear models, 2nd.* London: Chapman and Hall.

Martin, D. (1979): Early warning of bank failure: A logit regression approach, *Journal of Banking and Finance.* **1**, 249 – 276.

Mata, J. and Portugal, P. (1994): Life duration of new firms, *Journal of Industrial Economics.* **42**, 227 – 246.

Merton, R. C. (1974): On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *Journal of Finance.* **29**, 449 – 470.

Meyer, P., and H. Pifer, (1970): Prediction of bank failures. *Journal of Finance.* **25**, 853 – 868.

Odom, M. D. and Sharda, R. (1990): A neural network for bankruptcy prediction, In *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks.* **2**, 163 – 168.

Ohlson, J. (1980): Financial ratio and the probabilistic prediction of bankruptcy. *Journal of Accounting Research.* **18**, 109 – 131.

O'Sullivan, F., Yandell, B. S. and Raynor, W. J. (1986): Automatic smoothing of regression functions in generalized linear models. *Journal of the American Statistical Association.* **81**, 96 – 103.

Raghupathi, W., Schkade, L. L. and Raju, B. S. (1991), A neural network approach to bankruptcy prediction, In *Proceedings of the IEEE 24th Annual Hawai International Conference on System Sciences.* **4**, 147 - 155.

Ramsay, J. O. (1982): When the data are functions. *Psychometrika.* **47**, 379 – 376.

Ramsay, J. O. (2000): Differential equation models for statistical functions. *Canadian Journal of Statistics* **28**, 225 – 240.

Ramsay, J. O. and Dalzell, C. J. (1991): Some tools for functional data analysis (with Discussion). *Journal of the Royal Statistical Society, Series B.* **53**, 539 – 572.

Ramsay, J. O. and Silverman, B. W. (1997): *Functional data analysis.* Springer.

Schwarz, G. (1978): Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics.* **6**, 461 – 464.

Seber, G. A. F. (1984): *Multivariate observations.* New York, Wiley.

Sinkey, J. F. (1975): A multivariate statistical analysis of the characteristics of problem banks. *Journal of Finance.* **30**, 21 – 36.

Stone, C. J. (1974): Cross-validatory choice and assessment of statistical predictions (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society, Series B.* **36**, 111 – 147.

Sung, T. K., Chang, N. and Lee, G. (1999): Dynamics of modeling in data mining: Interpretive approach to bankruptcy prediction. *Journal of Management Information Systems.* **16**, 63 – 85.

Vellido, A., Lisboa, P.J.G, and Vaughan, J. (1999): Neural networks in business: a survey of applications (1992–1998). *Expert Systems with Applications.* **17**, 51 – 70.

Wong, B. K., Bodnovich, T. and Y. Selvi. (1997): Neural network applications in business: a review and analysis of the literature (1988–1995). *Decision Support Systems.* **19**, 301 – 320.

Yam, K. Y. and Kiang, M. (1990): Predicting bank failures: A neural network approach. *Applied Artificial Intelligence.* **4**, 265 – 282.

Yam, K. Y. and Kiang, M. (1992): Managerical applications of neural networks: The case of bank failure prediction. *Management Science.* **38**, 926 – 946.

Zavgren, C. V. (1985): Assessing the vulnerability to failure of American industrial firms: A logistic analysis. *Journal of Business Finance and Accounting.* **12**, 19 – 45.

Zhang, G., Hu, M.Y., Patuwo, B.E. and Indro, D.C. (1999): Artificial neural networks in bankruptcy prediction: General framework and cross-validation analysis. *European Journal of Operational Reseach.* **116**, 16 – 32.

荒木由布子, 小西貞則 (2003): 関数回帰モデリングについて. 統計数理研究所共同研究リポート 164. 21 – 32.

乾浩治, 室町幸雄 (2000): 金融モデルにおける推定と最適化. 朝倉書店.

井元清哉,　小西貞則 (1999): *B*-スプラインによる非線形回帰モデルと情報量規準. 統計数理, 47 巻 2 号, 359 – 373.

川崎能典，安道知寛 (2002): 正則化非線形回帰モデルによるイールドカーブの推定. 統計数理, 50 巻 2 号, 149 – 164.

木島正明, 小守林克哉 (1999): 信用リスク評価の数理モデル. 朝倉書店.

後藤実男 (1989): 企業倒産分析と会計情報. 千倉書房.

白田佳子 (1999): 企業倒産予知情報の形成 ー会計理論と統計技術の応用. 中央経済社.

下川真由子, 水田正弘, 佐藤義治 (2000): 関数データ解析における関数回帰分析の拡張. 応用統計学，29 巻 1 号, 27 – 39.

森平爽一郎 (1999): 信用リスクの測定と管理 (2), 定性的従属変数回帰分析による倒産確率の推定. 証券アナリストジャーナル, 11 巻, 81 – 102.

森平爽一郎 (2000): 信用リスクの測定と管理 (5), 倒産確率の期間構造推定. 証券アナリスト

ジャーナル, 5 巻, 104 – 124.

山下 智志, 川口 昇 (2003): 大規模データベースを用いた信用リスク計測の問題点と対策 (変数選択とデータ量の関係). 金融庁金融研究研修センター, ディスカッションペーパー.

山下 智志, 川口 昇, 敦賀 智裕 (2003): 信用リスクモデルの評価方法に関する考察と比較. 金融庁金融研究研修センター, ディスカッションペーパー.