

# 格付け・財務データを用いた誘導型モデルによる デフォルト確率期間構造・回収率の同時推定

安道知寛<sup>1</sup>

山下智志<sup>2</sup>

## 概要

信用リスク計量化の重要性が認識されるにともない、将来のデフォルト確率や回収率を推計する数理モデルの開発が進められている。これらのモデルには、実績デフォルトデータを元にした統計モデルと、市場性のデータを元にした確率過程モデルがある。近年の研究ではデフォルト確率について、これらのモデルにより実用的な推定精度が得られている。しかし、信用リスク計量化の精緻化の要請から、デフォルト確率以外の変数についても推計する必要性が認識されている。例えば、デフォルト確率（もしくはハザード）の期間構造や回収率、デフォルトの相関、エクスポージャーの変動などである。本研究では、このうちハザードの期間構造と回収率の推計を対象とする。一般に、期間構造や信用リスク計測モデルのパラメータの推定は、社債金利の水準やボラティリティ、期間構造、企業の財務データ、格付情報などの多方面の情報を用いて行われる。しかし、パラメータ推計は各情報を分断して個別に推定されることから、これらの情報を効果的に活用できているとは必ずしもいえない。本稿は、このような情報を統合して、社債発行企業の特徴（格付け、財務情報）を考慮したハザードの期間構造、及び格付けごとの回収率を同時推定する統計的モデリング手法を提案する。利用したモデルは誘導型モデルである。これを利用する利点としては、ファイナンス理論の特徴をいかしつつ、現実に観察される観測データの特長、つまり市場参加者の期待形成を反映・解釈できることにある。さらに、前述の情報統合のためにパラメータ推計方法やモデル選択手法にスプライン推計やBICの利用など、統計的な技巧を用いた。日本債券市場のデータをもとに、実証分析をおこない、インプライドに推定された金利の期間構造、ハザードの期間構造、回収率を検討した結果、提案手法の有用性が確認された。

<sup>1</sup>慶應義塾大学 大学院経営管理研究科、慶應ビジネススクール 専任講師 E-mail: andoh@hc.cc.keio.ac.jp

<sup>2</sup>大学共同利用機関法人 情報・システム研究機構 統計数理研究所 助教授、金融庁金融研究研修センター特別研究員、CRD 運営協議会顧問 E-mail: yamasita@ism.ac.jp

本研究を行うにあたり、東京工業大学 大学大学院イノベーションマネジメント研究科 助教授 中川秀敏氏、日本銀行敦賀智裕氏より有意義な指摘を頂いた。ここに感謝したい。本稿の内容は全て著者の個人的見解であり、金融庁あるいは金融研究研修センターの公式見解を示すものではない

# 目次

1	はじめに	1
2	関連既存研究と債券価値理論	2
2.1	金利・ハザードの期間構造，及び回収率推計に関する既存研究	2
2.2	債券価格の評価理論	3
3	誘導型モデルによるデフォルト期間構造・回収率の同時推定	5
3.1	モデルの定式化	5
3.2	パラメータ推定	8
3.3	基底関数の個数・平滑化パラメータの選択	10
3.4	罰則付き最尤法についての考察	11
4	実証分析	12
4.1	データについて	13
4.2	分析結果について	13
5	結論と今後の展望	19

# 1 はじめに

新 BIS 規制の導入や直接金融の多様化などの要因により、信用リスク計量化の重要性が認識されるようになった。それにともない、将来のデフォルト確率や回収率を推計する数理モデルの開発が活発に進められている。これらの信用リスク計測モデルには、ロジットモデルなどの実績デフォルトデータをもとにした統計モデルと、構造モデルや誘導モデルなどの市場性のデータをもとにした確率過程モデルがある。近年の研究ではデフォルト確率について、これらのモデルを利用することによって、実用的な推定精度が得られている。しかし、信用リスク計量化の精緻化の要請から、デフォルト確率以外の要因についても推計する必要が認識されている。例えば、デフォルト確率（もしくはハザード）の期間構造や回収率、デフォルトの相関、エクスポージャーの変動などである。これらの変数の推定精度向上は、貸出リスクの評価だけでなく、債券のプライシングやデリバティブの開発などに有効である。信用リスク計量化モデルのいくつかの方法では、これらの変数を同時に推計することが可能である。例えば、信用リスクにリンクした社債の価格付けに頻繁に利用されている誘導型モデル (Jarrow and Turnbull (1995), Duffie and Singleton (1999)) においては、リスク中立測度<sup>3</sup>のもとで、金利の期間構造<sup>4</sup>、ハザードの期間構造、及び回収率の3つの要因が社債の価格に影響を与えると仮定し、これらのパラメータをなんらかのアプローチで推定して社債の理論価格を評価する。しかしこのモデルは、デフォルト確率を算定するモデルとして利用されており、回収率は所与の変数として定義されることが一般的である<sup>5</sup>。

また、上記の信用リスクに関わる要因を推計する場合、社債金利の水準やボラティリティ、期間構造、企業の財務データ、格付情報などの多方面の情報をを用いて行われる。しかし、国債価格（または、スワップレート）データから金利の期間構造の推定を、社債データからハザードの期間構造の推定をというように、それぞれ独立したスキームでパラメータ推定が一般におこなわれる。しかし、各モデルは多方面の情報を分断して個別に推定されることから、情報を効果的に活用できているとは必ずしもいえない。

本稿の目的は、このように分断された情報を統合して、金利の期間構造や社債発行企業の特徴（格付け、財務情報）を考慮したハザードの期間構造、及び格付ごとの回収率を同時推定する統計的モデリング手法を提案することにある。その手段として誘導モデルを改良する。誘導モデルを利用する利点としては、ファイナンス理論をモデルに組み込みつつ、現実には観察される観測データの特性、つまり市場参加者の期待形成を反映・解釈できることにある。さらに、市場が信用リスク見合いのプレミアムを社債価格形成の過程で織り込ませていることから、推計結果を金融派生商品の価格付けにそのまま利用できること等の理由が考えられる（例えば、Duffie (1996) を参照されたい）。

本論文の構成は次の通りである。2 節では、債券のプライシングと誘導型モデルの基礎概念、及びそれに関連する既存研究を紹介する。3 節において、情報を統合した統計的モデリング手法を

<sup>3</sup>ある資産の相対価格について、現在の情報下で計算される将来時点の条件付期待価格が、現在の価格に一致する仮想的な確率測度のこと。

<sup>4</sup>本稿における金利の期間構造とは、無リスク金利の期間構造を意味する。

<sup>5</sup>リスク中立世界における議論である。現実世界で考えると、回収率は、回収額や償却額等に関するヒストリカルデータから推定可能であり、また、現実世界におけるハザードの期間構造は、信用格付けごとのヒストリカル累積デフォルト確率などで推定可能である。しかし、回収率を現実世界の確率測度で計測し、ハザードの期間構造をリスク中立測度に基づき（つまり、社債データに基づいて）推定すると、2つの確率測度のもとで推定が行われていることになり、結果の解釈が難しくなる。

提案する。4 節では、日本債券市場のデータを利用して、インプライドに金利の期間構造、ハザードの期間構造、及び回収率を推定し、その有用性を確認する。

## 2 関連既存研究と債券価値理論

### 2.1 金利・ハザードの期間構造、及び回収率推計に関する既存研究

信用リスクを求めるモデルを解説する前に、期間構造を表現する既存研究について簡単に紹介する。金利期間構造の推定法には、大きく分けて確率過程モデルと統計モデルの 2 つのモデルが存在し、両者とも長い歴史を持つ（例えば、Anderson *et al.* (1996) を参照）。前者の確率過程に基づいた金利の期間構造推定の研究は、短期金利のモデル化（Merton (1973)）から出発し、それ以降、Vasicek (1977), Cox, Ingersoll and Ross (1985), Heath, Jarrow and Morton (1992)<sup>6</sup>, Brace, Gatarek and Musiela (1997)<sup>7</sup> など様々なモデルが提案されている。

確率過程モデルの利点としては、解析解が求まる場合には用途に応じた計算負荷が軽いことにある。しかし、数論的に取り扱いが容易な確率過程を、金利の期間構造に利用する場合には注意が必要である。なぜなら、これらのモデルは解析的に取り扱い易いように、ある程度単純化された確率過程を仮定しているため、その単純化に伴い複雑な市場変動を表現できない。

後者の統計モデルでは、期間構造を明示的に仮定することなく、資産価格のデータからイールドカーブに対して直接的に曲線あてはめを行うことによって期間構造を推定する。統計モデルを利用する利点としては、ファイナンス理論を基礎としつつ、市場参加者の期待形成を反映・解釈できることにある。金利の期間構造推定の先駆的な研究としては、スプラインに基づく手法を考案した McCulloch (1971, 1975) が挙げられ、McCulloch 以後も様々なモデルが提案されている (Schaefer (1981), Vasicek and Fong (1982), Nelson and Siegel (1987), Steely (1991), 川崎・安道 (2002))。

次に、ハザードの期間構造・回収率 (LGD; Loss Given Default) へ議論を移す。前節で示したように、社債の割引現在価値を評価するためには、ハザードの期間構造、及び回収率を取り扱う必要がある。ハザードの期間構造推定には、金利期間構造と同様に、実際のデフォルトデータを用いて分析を行う統計モデルと、市場データを用いて分析を行う確率過程モデルとに大別される。統計モデルを利用した先行研究としては、Lane *et al.* (1986) の生存時間モデルに基づく研究が挙げられる。確率過程モデルには、さらに構造型モデル (Merton (1974)) と誘導型モデル (Jarrow and Turnbull (1995), Duffie and Singleton (1999)) が存在する。構造型モデルにおいては、企業価値を表現する変数が一定水準を下回る場合にデフォルトが発生すると定義され<sup>8</sup>、モデル推定の容易さから金融実務への応用がなされている。誘導型モデルは、ハザードそのものを確率過程を用いて表現し、その期間構造を市場で観測されるデータ（例えば、社債価格）に基づき推定する。利用される確率過程としては、金利の期間構造推定にしばしば用いられるような平均回帰的な確率過程が一般的である (Duffie, Pan and Singleton (2000), Kijima and Muromachi (2000a, 2000b), Kusuoka (1999), 楠岡・青沼・中川 (2001), 山下・敦賀 (2005))。誘導型モデルでは、リスク中立を前提に、債券の将来のキャッシュフローの割引現在価値と現在の債券価格が均衡するように定式

<sup>6</sup> Amin and Morton (1994), 加藤・吉羽 (1999) は、HJM モデルの実証分析をおこなっている。

<sup>7</sup> 森本・吉羽 (1999) は、BGM モデルの解説と実証分析をおこなっている。

<sup>8</sup> 例えば、総括的な手法である Merton (1974) では、総資産価値が負債額面価値を下回った場合にデフォルトとみなし、総資産価値の確率変動を確率過程を用いてモデル化することによって、ハザードの期間構造が推定される。

化され、ハザードの期間構造及び回収率は債券価格からインプライドに導出される。誘導型モデルからインプライドに導出される回収率は、Market Implied LGD と呼ばれ、これは「社債市場が織り込んでいる回収率」であり、投資家の回収率に対するコンセンサスを反映している。

また、回収率には様々な定義があることに注意する<sup>9</sup>。例えば、デフォルト企業に対する債権者の回収実績値に基づく Workout LGD、デフォルト後債権者が債券をマーケットで売却した場合を想定した Market LGD、過去のデフォルト実績と損失実績に基づく Historical Implied LGD、デフォルト前の社債スプレッドから、その債券に内在するリスク量に基づく Market Implied LGD などが挙げられる。Workout LGD と Market LGD については、わが国においてはデータベースの不備により、その推計が技術的に困難であるが、海外などでは利用可能なデータベースが存在し、様々な分析結果が報告されている (Altman and Saunders (2001), Altman *et al.* (2002))。しかし、わが国においても Workout LGD に関連するデータは蓄積されつつあり、また、デフォルト債券のマーケットも発展しつつあることから、将来的には両者についての推計モデルの構築がなされていくであろう。

一般に、誘導型モデルの枠組みで社債価格のみからハザードの期間構造・Market Implied LGD を同時推定することは困難と考えられており、ハザードの期間構造または Market Implied LGD の一方を外生的に与えて分析がおこなわれる。また、その同時推定を試みた先行研究も存在し、債券及び株式の価格データから推定する手法 (Jarrow (2001), 山下・木原 (2004))、債券及び負債データから推定する手法 (Unal *et al.* (2003))、債券データと財務データ・格付けなどから推定する手法 (津田 (2002)) などがある。

## 2.2 債券価格の評価理論

割引現在価値の概念に基づく債券価格理論と将来キャッシュフローの関係について解説する。クーポンの額が  $C$ 、満期日にクーポンに加えて額面  $R$  の償還が行われるデフォルトリスクのない利付国債を考える。現時点から満期日までに償還時  $T_L$  も含めて  $L$  回の利払いがあるとし、利払い時点を  $t = (t_1, \dots, t_L)'$  とする。将来のキャッシュフローに関する割引現在価値の合計が、そのまま現在の国債価格になっていると考えられるため、 $r(t)$  を無リスク瞬間フォワード・レートに関する期間構造とすると、 $T_L$  年後に償還を迎える国債の現在価値 PV (Present Value) は

$$PV(r(\cdot), t) = \sum_{i=1}^L C \cdot \exp \left\{ - \int_0^{t_i} r(u) du \right\} + R \cdot \exp \left\{ - \int_0^{t_L} r(u) du \right\}$$

と表すことができる。つまり、名目のキャッシュフローに対してそれを現在価値に割り戻すための割引関数  $d(t) = \exp \left\{ - \int_0^t r(u) du \right\}$  が掛けられているとみなすことができる。また、国債の現在価値 PV は、キャッシュフロー発生時点  $t$ 、無リスク瞬間フォワード・レート  $r(t)$  に依存していることを強調するために  $PV(r(\cdot), t)$  と記述している<sup>10</sup>。

次に、クーポンの額が  $C$ 、満期日にはクーポンに加えて額面  $R$  の償還が行われる社債の理論価格を考える。ただし、先程と同様に、現時点から満期日までに償還時  $T_L$  も含めて  $L$  回の利払いがあるとし、利払い時点を  $t = (t_1, \dots, t_L)'$  とすることである。

<sup>9</sup>詳しくは、山下・木原 (2004) を参照されたい。

<sup>10</sup>実際には、経過利息あるいは未収利息の存在、経過利息の考慮にあたっては一年を何日で換算するかの慣行が、国によって違うことなどを考慮に入れなければならない。

一般に、デフォルトは予め知るこのできない将来の時点で発生する。そのため、デフォルトリスクがある金融商品の価格付けをおこなう場合、各瞬間におけるデフォルトの発生強度（微小時間におけるデフォルト確率の変動）を定式化して将来のデフォルト発生時点を表現する手法が利用されている。いま、 $\tau$  をデフォルト時点を表す確率変数とする。このとき、各瞬間におけるデフォルトの「起こりやすさ」は

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < \tau \leq t + \Delta | t < \tau)}{\Delta}$$

と表すことができる。この  $h(t)$  をハザードの期間構造といい「時点  $t$  までデフォルトしなかった社債が、次の期間  $t + \Delta$  までにデフォルトする条件付確率」を微小期間  $\Delta$  で基準化したものである。このハザードの期間構造をもつ社債が、時点  $t$  までデフォルトを起こさない非デフォルト確率は次式で与えられる<sup>11</sup>。

$$P(\tau > t) = \exp \left\{ - \int_0^t h(u) du \right\}.$$

さらに、償還期限までにデフォルトした場合、デフォルト時点において額面に対して  $\delta$  の回収（一般に  $\delta$  は回収率と呼ばれる）があり、デフォルト以降に発生するクーポンのキャッシュフローは消滅するとした場合、ハザードの期間構造  $h(t)$  及び回収率  $\delta$ <sup>12</sup> が与えられた下での社債の割引現在価値は

$$\begin{aligned} PV(r(\cdot), h(\cdot), \delta, t) &= \sum_{i=1}^L C \cdot \exp \left[ - \int_0^{t_i} \{r(u) + h(u)\} du \right] \\ &\quad + R \cdot \exp \left[ - \int_0^{t_L} \{r(u) + h(u)\} du \right] \\ &\quad + R \cdot \delta \cdot \int_0^{t_L} \left[ h(t) \cdot \exp \left\{ - \int_0^t \{r(u) + h(u)\} du \right\} \right] dt \end{aligned} \quad (1)$$

と評価される<sup>13</sup>。なお、第一項目はクーポンの割引現在価値、第二項目はデフォルトしない場合の

<sup>11</sup>誘導型モデル (Jarrow and Turnbull (1995), Duffie and Singleton (1999)) においては、 $h(t)$  を確率過程で表現し、 $P(\tau > t)$  をリスク中立測度の期待値で評価している。ここでは、ハザードの期間構造はあらかじめ与えられているものとしている。

<sup>12</sup>ここでの回収率は、額面に対する回収率 (Recovery of face value) である。回収率には様々な定義があり、時点  $t$  でデフォルトするとしたとき、その直前の社債価格に対する回収率 (Recovery of market value) などもある。詳しくは、Duffie and Singleton (1999) を参照されたい。また、回収率は期間を通じて一定としているが、デフォルト時点  $t$  に依存させることも可能である (例えば、丸茂・家田 (2000) を参照せよ)。

<sup>13</sup> $PV(r(\cdot), h(\cdot), \delta, t)$  の第3項目は、償還区間  $t_L$  までにデフォルトが起こる場合について、額面  $R$  に対して  $\delta$  の回収があるとした将来のキャッシュフローの割引現在価値を意味する。いま、時点  $t = 0$  から償還時点  $t_L$  までを、微小区間  $\Delta_1 = (t_1, t_1 + \Delta]$ ,  $\Delta_2 = (t_2, t_2 + \Delta]$ , ...,  $\Delta_K = (t_K, t_K + \Delta]$  に  $K$  等分 (ただし、 $t_1 = 0$ ,  $t_L = t_K + \Delta$ ,  $t_k = t_{k-1} + \Delta$ ) する。また、微小区間  $\Delta_k$  にデフォルトが起こる場合、額面  $R$  に対して  $\delta$  の回収があるとした、将来のキャッシュフローの割引現在価値は  $R \cdot \delta \cdot \exp \left\{ - \int_0^{t_k} r(u) du \right\}$  と近似的に評価されるとする。このとき、各微小区間  $\Delta_k$  について、デフォルトの生起確率  $P(t_k < \tau \leq t_k + \Delta)$  を考慮した名目キャッシュフロー  $R \cdot \delta$  を償還時点  $t_L$  まで足し合わせたものが、償還時点  $t_L$  までにデフォルトが起こる場合の、将来発生する名目キャッシュフローの割引現在価値である。

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^K P(t_k < \tau \leq t_k + \Delta) \cdot \left[ R \cdot \delta \cdot \exp \left\{ - \int_0^{t_k} r(u) du \right\} \right] \\ &= R \cdot \delta \cdot \left[ \sum_{k=1}^K P(t_k < \tau \leq t_k + \Delta | t_k < \tau) \cdot P(t_k < \tau) \cdot \exp \left\{ - \int_0^{t_k} r(u) du \right\} \right] \\ &= R \cdot \delta \cdot \left[ \sum_{k=1}^K \frac{P(t_k < \tau \leq t_k + \Delta | t_k < \tau)}{\Delta} \cdot \exp \left\{ - \int_0^{t_k} h(u) du \right\} \cdot \exp \left\{ - \int_0^{t_k} r(u) du \right\} \cdot \Delta \right] \end{aligned}$$

各微小区間の幅を  $\Delta_k \rightarrow 0$  ( $K \rightarrow \infty$ ) とすることで  $PV(r(\cdot), h(\cdot), \delta, t)$  の第3項目が導出される。

額面償還の割引現在価値，第三項目はデフォルトする場合の回収額の割引現在価値である．国債とは対照的に，名目のキャッシュフローに対してそれを現在価値に割り戻すための割引関数  $d(t)$  には，回収率調整後のハザードの期間構造を考慮した割引関数  $d(t) = \exp \left[ - \int_0^t \{r(u) + h(u)\} du \right]$  が利用されている．

ここまでの議論で，無リスク瞬間フォワード・レート  $r(t)$  が与えられれば国債の割引現在価値が導かれ，さらにハザードの期間構造  $h(t)$  と回収率  $\delta$  の情報を加えることで，デフォルトリスクを内在する社債の割引現在価値が導かれる．しかし実際には，これらは直接には観測できず，なんらかの市場データ・及び数理手法に基づき推定する必要がある．次節では，これらを推定するために新しい手法を提案する．

### 3 誘導型モデルによるデフォルト期間構造・回収率の同時推定

#### 3.1 モデルの定式化

本節では，2.2 節で表した債券価格評価式を用い，本論文で提案するデフォルト期間構造と回収率の同時推定モデルについて解説する．ある日に取り引きされた国債の価格  $p_i^g$ ，社債の価格  $p_i^{cp}$  とそれに対応する経過利息  $a_i^g$ ， $a_i^{cp}$  に関するデータが与えられたとする．国債データの総数を  $n_0$  とする．それぞれの社債については，格付け  $1, \dots, J$  が付与されているものとし，格付けセクターの総数を  $J$ ，それぞれの格付けに属する債券データの総数を  $n_1, \dots, n_J$  とする．さらに，それぞれの社債を発行した企業の財務情報  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)'$  も観測されているとする．推定したいパラメータは，金利の期間構造  $r(t)$ ，企業の財務情報  $\mathbf{x}$  を考慮した格付けごとのハザードの期間構造  $h_j(t; \mathbf{x})$ ，及び回収率  $\delta_j(\mathbf{x})$  ( $j = 1, \dots, J$ ) であり，本研究では，これらの同時推計をおこなう．

実際に取引される債券価格と，前節で与えた理論価格とが一致することは極めて稀である．そこで，市場参加者の期待形成を解釈するために，国債の割引現在価値  $PV^g$ ，及び社債の割引現在価値  $PV^{cp}$  を，以下の統計モデルで記述する．

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{国債価格モデル} \\ p_{i_0}^g + a_{i_0}^g = PV_{i_0}^g(r(\cdot), \mathbf{t}_{i_0}) + \varepsilon_{i_0}^g \quad (i_0 = 1, \dots, n_0), \\ \text{社債価格モデル (格付け 1)} \\ p_{i_1}^{cp} + a_{i_1}^{cp} = PV_{i_1}^{cp}(r(\cdot), h_1(\cdot, \mathbf{x}_{i_1}), \delta_1(\mathbf{x}_{i_1}), \mathbf{t}_{i_1}) + \varepsilon_{i_1}^1 \quad (i_1 = 1, \dots, n_1), \\ \vdots \\ \text{社債価格モデル (格付け } J) \\ p_{i_J}^{cp} + a_{i_J}^{cp} = PV_{i_J}^{cp}(r(\cdot), h_J(\cdot, \mathbf{x}_{i_J}), \delta_J(\mathbf{x}_{i_J}), \mathbf{t}_{i_J}) + \varepsilon_{i_J}^J \quad (i_J = 1, \dots, n_J). \end{array} \right. \quad (2)$$

ただし，ノイズ  $\varepsilon_{i_0}^g, \varepsilon_{i_1}^1, \dots, \varepsilon_{i_J}^J$  は互いに独立で平均 0，分散  $\sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_J^2$  の正規分布に従うとする．キャッシュフロー発生時点  $t$  は個々の債券ごとに異なるので， $i_0$  番目の国債のキャッシュフロー発生時点を  $t_{i_0}$ ，格付け  $j$  が付与された  $i_j$  番目の社債のキャッシュフロー発生時点を  $t_{i_j}$  と記号であらわしている．また，社債価格モデル (格付け  $j$ ) に含まれる  $\mathbf{x}_{i_j}$  は，その社債を発行した企業に対応した財務情報である．

本稿では，金利の期間構造  $r(t)$ ，及び社債発行企業の財務情報を考慮した格付けごとのハザード

の期間構造  $h_j(t, \mathbf{x})$  ( $j = 1, \dots, J$ ) を柔軟に推定するために、以下の構造を仮定する。

$$\begin{aligned} r(t, \mathbf{w}_0) &= \sum_{k=1}^{m_0} w_{0k} \phi_{0k}(t) = \mathbf{w}'_0 \boldsymbol{\phi}_0(t), \\ h_j(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}_j, \boldsymbol{\beta}_h) &= \left[ \sum_{k=1}^{m_j} w_{jk} \phi_{jk}(t) \right] \cdot \exp \left\{ \sum_{\ell=1}^p \beta_{h\ell} x_\ell \right\} \\ &= \left[ \mathbf{w}'_j \boldsymbol{\phi}_j(t) \right] \cdot \exp \{ \boldsymbol{\beta}'_h \mathbf{x} \}, \quad (j = 1, \dots, J). \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $\boldsymbol{\phi}_j(t) = (\phi_1(t), \dots, \phi_{m_j}(t))'$  は基底関数から構成される既知の基底関数ベクトル、 $\mathbf{w}_j = (w_{j1}, \dots, w_{jm_j})'$ 、 $\boldsymbol{\beta}_h = (\beta_{h1}, \dots, \beta_{hp})'$  は推定すべき未知パラメータである。この式は、期間構造（イールドカーブ）を滑らかな曲線で描こうとしている。ハザードの期間構造も同様に滑らかな曲線で表現されるが、その水準は財務指標  $\mathbf{x}$  によって上下することになる。なお、ハザードの期間構造については、期間構造に関しては線形独立な基底関数の線形和、財務情報の効果についてはその線形和によって記述されており、比例ハザードモデル (Cox (1972)) において、ベースラインハザードに基底関数の線形和を利用していると捉えることもできる。

また、格付けごとの回収率  $\delta_j(\mathbf{x})$  ( $j = 1, \dots, J$ ) については、企業の格付け、財務情報  $\mathbf{x}$  に加えて、償還日までの残存年数  $z$  も影響すると考える。回収率  $\delta_j(\mathbf{x})$  ( $j = 1, \dots, J$ ) については、一般に想定されている回収率の範囲  $\delta \in [0, 1]$  に収めるため、以下のロジット変換を施した構造を利用する。

$$\begin{aligned} \delta_j(\mathbf{x}, z, \boldsymbol{\beta}_\delta, \boldsymbol{\gamma}, \alpha) &= \frac{\exp \{ \sum_{k=1}^{m_\delta} \gamma_k \phi_{\delta k}(j) + \sum_{\ell=1}^p \beta_{\delta\ell} x_\ell + \alpha z \}}{1 + \exp \{ \sum_{k=1}^{m_\delta} \gamma_k \phi_{\delta k}(j) + \sum_{\ell=1}^p \beta_{\delta\ell} x_\ell + \alpha z \}} \\ &= \frac{\exp \{ \boldsymbol{\gamma}' \boldsymbol{\phi}_\delta(j) + \boldsymbol{\beta}'_\delta \mathbf{x} + \alpha z \}}{1 + \exp \{ \boldsymbol{\gamma}' \boldsymbol{\phi}_\delta(j) + \boldsymbol{\beta}'_\delta \mathbf{x} + \alpha z \}}, \quad (j = 1, \dots, J). \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、 $\boldsymbol{\phi}_\delta(j) = (\phi_{\delta 1}(j), \dots, \phi_{\delta m_\delta}(j))'$  は基底関数から構成される既知の基底関数ベクトル  $\boldsymbol{\beta}_\delta = (\beta_{\delta 1}, \dots, \beta_{\delta p})'$ 、 $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_{m_\delta})'$ 、 $\alpha$  は推定すべきパラメータである。

基底関数展開に基づく回帰分析を利用して、利付債のクロスセクションデータから金利期間構造を推定する手法は、McCulloch (1971) 以降、学術・実務の両面において広く定着しており、2次スプライン基底 (McCulloch (1971))、3次スプライン基底 (McCulloch (1975))、Bernstein 多項式 (Schaefer (1981))、指数型スプライン (Vasicek and Fong (1982))、ガウス型基底関数 (川崎・安道 (2002)) など様々な基底関数が提案されている。

本研究においては、その利便性から近年注目されている  $B$ -スプライン (Steely (1991), Fisher *et al.* (1995)) を利用する。図 1 は、次数が 3 の  $B$ -スプライン基底関数を図示している。各基底関数  $\phi_j(t)$  は、節点と呼ばれる（等）間隔に配置された点  $t_j$  において、滑らかに連結した（2 回微分導関数が連続であるという意味で）区分的多項式で構成されている。 $B$ -スプライン基底関数は de Boor (1978) の逐次的アルゴリズムを利用すると構成される:

$$\begin{aligned} \phi_j(x, 0) &= \begin{cases} 1, & t_j \leq x < t_{j+1}, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \\ \phi_j(x; p) &= \frac{x - t_j}{t_{j+p} - t_j} \phi_j(x; p-1) + \frac{t_{j+p+1} - x}{t_{j+p+1} - t_{j+1}} \phi_{j+1}(x; p-1). \end{aligned}$$



ここで,  $\phi_j(x; p)$  は次数が  $p$  の  $B$ -スプライン基底関数の次数である. 次数が 0 の  $B$ -スプライン基底関数は 2 つの接点の間で定数であることから, 任意の次数の  $B$ -スプライン基底関数を簡単に構成することができる. 以降,  $\phi_j(x; 3) = \phi_j(x)$  と記す.

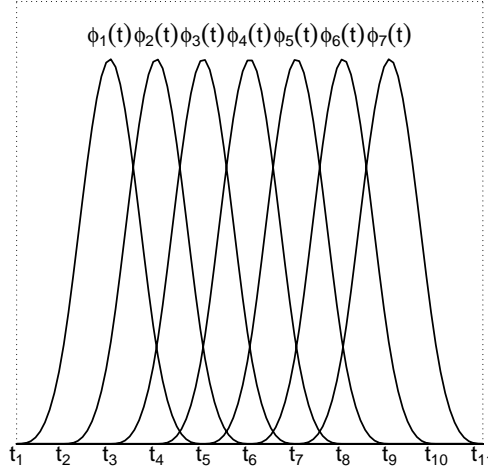


図 1: 3 次  $B$ -スプライン基底関数の例.

(3) 式, (4) 式の構造を仮定すると, 現時点から満期日までに償還時  $T_L$  も含めて  $L$  回の利払いがある国債の割引現在価値  $PV^g$ , 格付け  $j$  を付与された社債の割引現在価値  $PV^{cp}$  は, それぞれ

$$\begin{aligned}
 PV^g(\mathbf{w}_0, t) &= \sum_{i=1}^L C \cdot \exp\{-\mathbf{w}'_0 \psi_0(t_i)\} + R \cdot \exp\{-\mathbf{w}'_0 \psi_0(t_L)\} \\
 PV^{cp}(\mathbf{x}, z, \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_j, \beta_h, \beta_\delta, \gamma, \alpha, t) &= \sum_{i=1}^L C \cdot \exp\{-\mathbf{w}'_0 \psi_0(t_i) - \mathbf{w}'_j \psi_j(t_i) \exp(\beta' \mathbf{x})\} \\
 &\quad + R \cdot \exp\{-\mathbf{w}'_0 \psi_0(t_L) - \mathbf{w}'_j \psi_j(t_L) \cdot \exp(\beta' \mathbf{x})\} \\
 &\quad + R \cdot \delta_j(\mathbf{x}, z, \beta_\delta, \gamma, \alpha) \cdot \{\mathbf{w}'_j \bar{\psi}_j(t_L, \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_j, \beta) \cdot \exp(\beta' \mathbf{x})\}
 \end{aligned} \tag{5}$$

と評価される. ただし,  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_L)'$  は利払い時点とし,  $\psi_j(t) = (\psi_{j1}(t), \dots, \psi_{jm_j}(t))'$ ,  $\bar{\psi}_j(t, \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_j, \beta) = (\bar{\psi}_{j1}(t, \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_j, \beta), \dots, \bar{\psi}_{jm_j}(t, \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_j, \beta))'$  は, それぞれ

$$\begin{aligned}
 \psi_{jk}(t) &= \int_0^t \phi_{jk}(u) du, \\
 \bar{\psi}_{jk}(t, \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_j, \beta) &= \int_0^t \left[ \phi_{jk}(u) \cdot \exp\{-\mathbf{w}'_0 \psi_0(u) - \mathbf{w}'_j \psi_j(u) \exp(\beta' \mathbf{x})\} \right] du
 \end{aligned}$$

を成分とする  $m_j$  次元ベクトルである.

統計モデル (2) と債券価格評価式 (5) により, 債券価格モデルは正規分布の密度関数で定式化

される．

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{国債価格モデル} \\
 f(y_{i_0}^g | t_{i_0}; w_0, \sigma_0^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp \left[ -\frac{\{y_{i_0}^g - \text{PV}_{i_0}^g(w_0, t_{i_0})\}^2}{2\sigma_0^2} \right], \\
 \\
 \text{社債価格モデル (格付け 1)} \\
 f(y_{i_1}^{cp} | t_{i_1}, x_{i_1}, z_{i_1}; w_0, w_1, \beta_h, \beta_\delta, \gamma, \alpha, \sigma_1^2) \\
 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp \left[ -\frac{\{y_{i_1}^{cp} - \text{PV}_{i_1}^{cp}(x_{i_1}, z_{i_1}, w_0, w_1, \beta_h, \beta_\delta, \gamma, \alpha, t_{i_1})\}^2}{2\sigma_1^2} \right], \\
 \vdots \\
 \\
 \text{社債価格モデル (格付け } J \text{)} \\
 f(y_{i_J}^{cp} | t_{i_J}, x_{i_J}, z_{i_J}; w_0, w_J, \beta_h, \beta_\delta, \gamma, \alpha, \sigma_J^2) \\
 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_J^2}} \exp \left[ -\frac{\{y_{i_J}^{cp} - \text{PV}_{i_J}^{cp}(x_{i_J}, z_{i_J}, w_0, w_J, \beta_h, \beta_\delta, \gamma, \alpha, t_{i_J})\}^2}{2\sigma_J^2} \right].
 \end{array} \right. \quad (6)$$

ただし， $y_{i_0}^g = p_{i_0}^g + a_{i_0}^g$ ， $y_{i_j}^{cp} = p_{i_j}^{cp} + a_{i_j}^{cp}$  ( $j = 1, \dots, J$ ) は経過利息を考慮した債券取引価格とし，社債価格モデル (格付け  $j$ ) に含まれる  $z_{i_j}$  は，その社債の償還までの残存期間とする．この結果，モデルは企業の財務データ  $x$ ，経過利息を考慮した現在の国債価格  $p_{i_0}^g + a_{i_0}^g$ ，社債価格  $p_{i_j}^{cp} + a_{i_j}^{cp}$  とそれぞれのキャッシュフロー発生時刻  $t$ ，償還時点  $z$ ，および社債に付与されている格付け  $j$  ( $j = 1, \dots, R$ ) を入力データとし，パラメータ  $\theta = (w', \sigma', \beta_h', \beta_\delta', \gamma', \alpha)'$ ， $w = (w_0', \dots, w_J)'$ ， $\sigma = (\sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_J^2)'$  を推定することになる．推定されたパラメータを (3)，(4) 式へ代入することにより，金利の期間構造，企業の財務情報  $x$  を考慮した格付けごとのハザードの期間構造，及び回収率が求められる．

次節では，モデルに含まれるパラメータ  $\theta$  の推定法を提示する<sup>14</sup>．

### 3.2 パラメータ推定

$B$  スプライン基底関数に基づく債券価格モデル (6) のパラメータの推定方法としては，最尤法が考えられ，最尤推定量は対数尤度の最大化によって得られる．

$$\ell(\theta) = \sum_{i_0=1}^{n_0} \log f(y_{i_0}^g | t_{i_0}; w_0, \sigma_0^2) + \sum_{j=1}^J \left[ \sum_{i_j=1}^{n_j} \log f(y_{i_j}^{cp} | t_{i_j}, x_{i_j}, z_{i_j}; w_0, w_j, \beta_h, \beta_\delta, \gamma, \alpha, \sigma_j^2) \right]. \quad (7)$$

しかし，最尤推定値は，モデルの設定によっては不安定となり，金利の期間構造，及び社債発行企業の財務情報を考慮した格付けごとのハザードの期間構造の変動が大きくなり，必ずしも現実的に受け入れやすい形状ではない．財務指標に多重共線性や外れ値がある場合も，パラメータ推定が不安定となる．また，格付けが市場参加者の回収率に対する見方に与える影響については，近接する格付けセクター同士は似通っていると考えられる．

<sup>14</sup>本研究においては，(3)・(4) 式の基底関数として  $B$ -スプラインを利用した．しかし，同様に 2 次スプライン基底 (McCulloch (1971))，3 次スプライン基底 (McCulloch (1975))，Bernstein 多項式 (Schaefer (1981))，指数型スプライン (Vasicek and Fong (1982))，ガウス型基底関数 (川崎・安道 (2002)) なども利用可能である．ただし，McCulloch (1971) の 2 次スプライン基底は，区分的に定義された 2 次多項式が各節点で滑らかにつながったものであるから，その 2 階微分が不連続となる．故に，そこから導かれる金利の瞬間フォワード・レートは 1 階微分が不連続となる (McCulloch (1975)，川崎・安道 (2002)) ことを注記しておく．

以上のことを考慮して、債券価格モデルに含まれるパラメータ  $\theta$  は、罰則付き対数尤度関数の最大化に基づいて推定する。

$$\ell_{\lambda}(\theta) = \ell(\theta) - \sum_{j=0}^J \frac{n\lambda_j}{2} \mathbf{w}'_j K_j \mathbf{w}_j - \frac{n\lambda_{\gamma}}{2} \gamma' K_{\gamma} \gamma - \frac{n\lambda_{\beta_h}}{2} \beta'_h \beta_h - \frac{n\lambda_{\beta_{\delta}}}{2} \beta'_{\delta} \beta_{\delta}. \quad (8)$$

ここで、 $n = \sum_{j=0}^J n_j$  は取り引きされた国債データ・社債データの総数、 $\lambda_j$  は平滑化パラメータであり、 $K_j$  は  $m_j \times m_j$  次差分行列で、 $(m_j - k) \times m_j$  次行列

$$D_{jk} = \begin{pmatrix} (-1)^0 {}_k C_0 & \cdots & (-1)^k {}_k C_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (-1)^0 {}_k C_0 & \cdots & (-1)^k {}_k C_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & (-1)^0 {}_k C_0 & \cdots & (-1)^k {}_k C_k \end{pmatrix}$$

を利用して、 $K_j = D'_{j2} D_{j2}$  と与えられるものである。ただし、 ${}_k C_i$  は 2 項係数とする。差分行列を用いた罰則は、 $B$ -スプライン曲線の局率 (2 階微分) に罰則を加える作用があり、金利及びハザードの期間構造の極端な変動を抑える効果を持つ。さらに、パラメータ  $\gamma$  に対する罰則により、近接する格付けの回収率が同土は似通っているということを表現できる。罰則付最尤法による  $B$ -スプラインを利用した統計モデルの推定は、2 階微分の罰則を利用するのが一般的であり、その理論的研究については、Green and Silverman (1994), Eilers and Marks (1996) などを参照されたい。

特に、罰則付き対数尤度関数の最大化においては、格付け会社が公開している格付けごとの累積デフォルト確率の情報も併用する。いま、格付け  $j$  の 1 年後累積デフォルト確率の実績値  $p(1) = P(\tau \leq 1)$  が与えられているとき、格付け  $j$  のベースラインハザード関数のパラメータ  $w_j$  が次式を満たすように制約する。

$$\exp \left\{ -\mathbf{w}'_j \boldsymbol{\psi}_j(1) \right\} = 1 - p(1). \quad (9)$$

ただし、 $p(1)$  に関係しない  $w_j$  のパラメータ部分  $w_j \in R^{m_j - r_j}$  に関しては、制約がないことに注意する。このような制約をおく理由は以下の通りである。

社債投資家は、ハザードの水準・回収率の各要因に興味があるというよりは、むしろ両者の要因を同時に考慮した社債価格に着目している。従って、社債取引価格に含まれる情報は、ハザードの水準・回収率を同時に考慮したものであると考えられ、取引価格のみではハザードの水準・回収率の同時推定には情報が少ない。また、一般に誘導型モデルでは、ハザードの水準または回収率のどちらか一方を外生的に与えることで、もう一方の推定がおこなわれる (例えば、家田・吉羽 (1999) を参照)。すなわち、このように制約を課すことで、誘導型モデルにおけるハザードと回収率の不可分性の問題を回避しているのである。以上の理由から、ある一時点でのベースラインハザード関数の水準が格付け会社の累積デフォルト確率に一致すると仮定して分析をおこなう。

パラメータの推定量  $\hat{\theta}$  は数値的最適化により推定され、(6) 式にパラメータの推定量を代入すると債券価格モデルが構成される。推定された金利/ハザードの期間構造・回収率は、社債市場からインプライドに導出されている。すなわち、リスク中立世界のもとでの推計結果を意味し、金融派生商品のプライシングに直接利用できる<sup>15</sup>。しかし、市場のリスクプレミアムも織り込んで

<sup>15</sup>小田 (1997) は、信用リスクを反映させた金融商品のプライシングについて解説している。

いることに注意が必要で、現実世界のハザードの期間構造の水準は、リスク中立世界のそれよりもリスクプレミアムを割り引いた分だけ低くなるのが一般的である。

罰則付き最尤法に基づき構成した債券価格モデル (6) は基底関数の個数、及び平滑化パラメータの値に依存し、これらの値を適切に選択する必要がある。特に適切な平滑化パラメータを選択することにより、金利の期間構造、及び社債発行企業の財務情報を考慮した格付けごとのハザードの期間構造、つまり市場参加者の期待形成をより正確に把握できる<sup>16</sup>。次節では、推定されたモデルを評価するためのモデル評価規準を導出し、基底関数の個数、及び平滑化パラメータを選択する手法について述べる。

### 3.3 基底関数の個数・平滑化パラメータの選択

罰則付き最尤法など、モデルの推定法が必ずしも最尤法でない場合のモデル評価基準として、Bayes 型情報量規準 (Konishi, Ando and Imoto (2004)), 一般化情報量規準 (Konishi and Kitagawa (1996)), 交差検証法 (Stone (1974)), ブートストラップ法 (Efron and Tibsirani (1993)) などの利用が考えられる。本稿で提案する債券価格モデル (6) は数値的最適化法により推定されることから、統計的リサンプリング法は膨大な計算時間が必要となる。この問題を避けるために、ここでは解析的規準、特に Bayes 型情報量規準を利用する。

経験ベイズアプローチにおいては、モデルのパラメータ  $\theta$  に事前分布  $\pi(\theta|\zeta)$  を想定する。ここで、 $\zeta$  はハイパーパラメータベクトルとし、本研究においては、 $\zeta$  は基底関数の個数  $m$ 、平滑化パラメータ  $\lambda$  に対応する。モデルの事前確率を等しいとすると、経験ベイズアプローチは周辺尤度

$$\int \exp\{\ell(\theta)\} \pi(\theta|\zeta) d\theta$$

が最大となるようにモデル選択をおこなう。

Schwarz (1978) により考案された Bayes 型情報量規準は、導入以後、多くの応用分野で成果をあげてきた。しかし、Schwarz (1978) の Bayes 型情報量規準は最尤法によって推定されたモデルを評価する規準であり、罰則付き最尤法により推定されたモデルの評価には理論的な問題が生じていた。この問題を解決するひとつの方法として、Konishi, Ando and Imoto (2004) は、上式の積分をラプラス近似 (Tierney and Kadane (1986)) を利用して解析的に求め、罰則付き最尤法に基づき構成されたモデルを評価するための Bayes 型情報量規準を導出した。

ベイズ理論の観点から考えると、罰則付き最尤法を用いることはパラメータ  $\theta$  の事前分布として、次の正規分布を仮定することと対応している (Konishi, Ando and Imoto (2004))。

$$\begin{aligned} \pi(\theta|\zeta) &= \left(\frac{n\lambda_0}{2\pi}\right)^{(m_0-2)/2} |K_0|_+^{1/2} \exp\left\{-\frac{n\lambda_0}{2} \mathbf{w}'_0 K_0 \mathbf{w}_0\right\} \\ &\quad \times \prod_{j=1}^J \left(\frac{n\lambda_j}{2\pi}\right)^{(m_j-r_j-2)/2} |K_j|_+^{1/2} \exp\left\{-\frac{n\lambda_j}{2} \mathbf{w}'_j K_j \mathbf{w}_j\right\} \\ &\quad \times \left(\frac{n\lambda_\gamma}{2\pi}\right)^{(m_\delta-2)/2} |K_\gamma|_+^{1/2} \exp\left\{-\frac{n\lambda_\gamma}{2} \boldsymbol{\gamma}' K_\delta \boldsymbol{\gamma}\right\} \end{aligned}$$

<sup>16</sup>ただし、ベースラインハザード関数は格付け会社の累積デフォルト確率に近いと考え、ベースラインハザード関数に含まれるパラメータ  $w_j$  については、大きい平滑化パラメータの値を用いることとする。

$$\times \left( \frac{n\lambda_{\beta_h}}{2\pi} \right)^{p/2} \exp \left\{ -\frac{n\lambda_{\beta_h}}{2} \beta_h' \beta_h \right\} \times \left( \frac{n\lambda_{\beta_\gamma}}{2\pi} \right)^{p/2} \exp \left\{ -\frac{n\lambda_{\beta_\gamma}}{2} \beta_\gamma' \beta_\gamma \right\}.$$

ただし、 $|K_0|_+$  は、行列  $K_0$  の 0 でない固有値の積とし、 $|K_j|_+$  は、(9) 式の制約がないパラメータ部分に関わる行列  $K_j$  の 0 でない固有値の積とする．モデルの事前確率を等しいと仮定し、モデルの事後確率に積分のラプラス近似 (Tierney and Kadane (1986)) を適用することでベイズの理論から導かれる Bayes 型情報量規準 (Konishi, Ando and Imoto (2004)) は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} \text{BIC} &= -2\ell(\hat{\theta}) + n\lambda_0 \hat{w}'_0 K_0 \hat{w}_0 + n \sum_{j=1}^J \lambda_j \hat{w}'_j K_j \hat{w}_j + n\lambda_\gamma \hat{\gamma}' K_\gamma \hat{\gamma} + n\lambda_{\beta_h} \hat{\beta}'_h \hat{\beta}_h \\ &\quad + n\lambda_{\beta_\delta} \hat{\beta}'_\delta \hat{\beta}_\delta - \sum_{j=0}^J \log |K_j|_+ - \log |K_\gamma|_+ + \log |J(\hat{\theta})| - (m_0 - 2) \log \lambda_0 \quad (10) \\ &\quad - \sum_{j=1}^J (m_j - r_j - 2) \log \lambda_j - (m_\delta - 2) \log \lambda_\gamma - p \log(\lambda_{\beta_h} \lambda_{\beta_\delta}) + \text{Const.} \end{aligned}$$

ただし、Const はすべてのモデルに共通する定数、 $J(\hat{\theta}) = -\frac{1}{n} \partial^2 \ell_\lambda(\hat{\theta}) / \partial \theta \partial \theta'$  である．導出した BIC 最小化により、最適な基底関数の個数、及び平滑化パラメータが選択される．

理想的には、基底関数の個数、平滑化パラメータを最適化すればよいが、実際には、格付けのセクター数  $J$  が多くなるに従い、計算負荷が大きくなっていく問題がある．しかし、 $B$ -スプライン基底を利用したモデリングにおいては、十分な基底関数の個数を用意したあとに、平滑化パラメータの値のみを最適化するだけデータの構造を十分に反映した結果が得られる (Fisher *et al.* (1995), Eiler and Marxs (1996)). 従って、計算負荷が大きい場合には、十分な基底関数の個数を用意したあとに、平滑化パラメータを最適化することがひとつの対処法となる<sup>17</sup>．

### 3.4 罰則付き最尤法についての考察

本節では、最尤法と罰則付き最尤法の性質について、簡単な数値実験を通して考察する．以下の設定を考える．

- ・金利の期間構造は既知  $r(t) = 0.01t$  (つまり、国債データは必要ない).
- ・格付けのセクター総数は 1 ( $J = 1$ ).
- ・ハザードの期間構造は 1 つのパラメータ  $\kappa$  のみで特徴付けられ、財務指標は考慮しない．特に、ここでは簡単のために  $h(t; \kappa) = \kappa t$  とする．
- ・回収率も 1 つのパラメータ  $\eta$  のみで特徴付けられ、財務指標は考慮しない．ただし、回収率の範囲を  $[0, 1]$  に収めるため、(4) 式のようにロジット変換を施した構造  $\delta(\eta) = \exp(\eta) / \{1 + \exp(\eta)\}$  を利用する．

これらの金利の期間構造、ハザードの期間構造、回収率を (1) 式に代入すると、社債価格は次式で評価され

$$\begin{aligned} \text{PV}^{cp}(\kappa, \eta, t) &= \sum_{i=1}^L C \cdot \exp \left\{ -\frac{(\kappa + 0.01)}{2} t_i^2 \right\} + R \cdot \exp \left\{ -\frac{(\kappa + 0.01)}{2} t_L^2 \right\} \\ &\quad + 0.5 \cdot \kappa \cdot R \cdot \left\{ 1 - \exp(-t_L^2) \right\} \cdot \frac{\exp(\eta)}{1 + \exp(\eta)} \cdot \exp \left\{ -\frac{(\kappa + 0.01)}{2} \right\}. \end{aligned}$$

<sup>17</sup>本稿においても、このようにして実証分析をおこなった．

債券価格モデルは以下で定式化される．

$$f(y_i^{cp} | t_i; \kappa, \eta, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[ -\frac{\{y_i^{cp} - PV^{cp}(\kappa, \eta, t_i)\}^2}{2\sigma^2} \right].$$

ここでは，社債価格評価式  $PV^{cp}(\kappa, \eta, t)$  を利用して  $n$  個の社債価格データ  $p_1^{cp}, \dots, p_n^{cp}$  を次のように発生させる．すべての社債について  $L = 2$  (元本償還時を含めクーポン支払いが2回) と設定し，最初のクーポン発生日を区間  $[0.2, 2]$  (年) の一様乱数から決定する．社債は通常年2回の利払いがあるので，一様乱数で決定した最初のクーポン発生日から0.5年後に元本償還があるとする．さらに  $R = 100$ ,  $\kappa = 0.02$ ,  $\eta = 1$  (回収率は  $\delta(\eta) = 0.73$ )，経過利息は0として社債の理論価格を算出し，この理論価格に平均0，標準偏差  $\sigma = 1$  の正規誤差を加えて社債価格データを発生させる．

図2は，様々なサンプルサイズ  $n$  下において，最尤法と罰則付き最尤法により推定されたハザードのパラメータ  $\kappa$ ，及び回収率  $\delta(\eta)$  のボックスプロットである．ただし， $\lambda_\kappa = \lambda_\eta = 0.001$  とした．図2の結果を見ると，最尤推定値及び罰則付き最尤推定値は真の値の近くに分布しているが，罰則付き最尤法によって推定されたパラメータのばらつきが小さく推定量として安定している．対照的に，最尤法で推定されたパラメータは変動が大きい．標本によってはパラメータの推定値が不安定となり，結果として真のパラメータの値との差が大きくなる場合が観察される．以上のことから，罰則付き最尤法の利用により，推定の安定性が向上することがわかる．

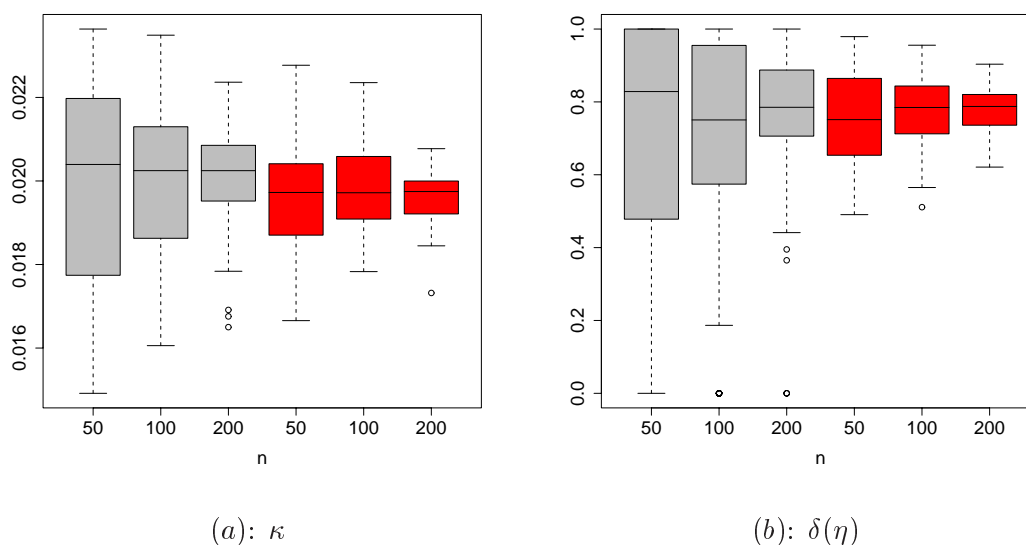


図2: 様々なサンプルサイズ  $n$  下において，最尤法と罰則付き最尤法により推定された (a): ハザードのパラメータ  $\kappa$ ，及び (b): 回収率  $\delta(\eta)$  のボックスプロット．それぞれの図において，最尤法を左側，罰則付き最尤法を右側にプロットした．

## 4 実証分析

本節では，日本債券市場のデータを利用して，インプライドに無リスク金利の期間構造，格付け・財務指標により特徴付けられたハザードの期間構造・及び回収率を推定し，その有用性を確認する．

## 4.1 データについて

日本債券市場のデータについては、日本証券業協会が公表している公社債店頭売買参考統計値データを利用し、特定の営業日に観察されたデータを解析した事例として、2004年7月5日の1417銘柄に基づく分析結果を報告する。格付けについては、Moody'sの格付けを利用する。債券価格モデル(6)による分析においては、格付けの総数  $J$  を指定する必要があるため、 $J = 5$  に設定して以下のようなグループ化を行った。投資適格企業については、セクター1「Aaa, Aa1, Aa2, Aa3」(276銘柄) セクター2「A1, A2」(242銘柄)、セクター3「A3, Baa1」(229銘柄)、セクター4「Baa2, Baa3」(415銘柄) に集約し、一般に機関投資家は、Ba1以下は投資不適格としていることからセクター5「Ba1以下」(199銘柄)とした。また、国債価格データは249銘柄である<sup>18</sup>。

(9)式の累積デフォルト率  $p(t)$  には、Moody's(2000)が公開している1983年~2001年までの平均累積デフォルト率(Average Cumulative Default Rates by Alpha-Numeric Rating)を利用した<sup>19</sup>。

財務指標としては数多くの指標が考えられるが、本研究では格付、及び回収率と関連性が高いと考えられる二つの財務指標を利用する。一つは収益性・効率性を計測する指標の一つである売上高キャッシュフロー比率( $x_1$ )、もう一方は債務超過に陥る危険性を計測する指標の一つである自己資本比率( $x_2$ )を考える<sup>20</sup>。

格付データについてはMoody'sのホームページから取得し、財務データについては「e-AURORA」データベースを利用した。

## 4.2 分析結果について

分析においては、金利の期間構造  $r(t, w_0)$ 、社債発行企業の財務情報を考慮した格付けごとのハザードの期間構造  $h_j(t, x)$ 、格付けごとの回収率  $\delta_j(x, \beta_\delta, \gamma, \alpha)$  の基底関数の個数をそれぞれ、 $m_0 = 8$ ,  $m_j = 4$  ( $j = 1, \dots, 5$ ),  $m_\delta = 4$  として、BIC最小化により平滑化パラメータを最適化した。様々な平滑化パラメータを用意してBICの値を計算した結果、最適な平滑化パラメータは  $\lambda_0 = 0.01$ ,  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.1$ ,  $\lambda_3 = 0.1$ ,  $\lambda_4 = 0.01$ ,  $\lambda_5 = 0.1$ ,  $\lambda_\gamma = 0.01$ ,  $\lambda_{\beta_h} = 0.01$ ,  $\lambda_{\beta_\delta} = 0.01$  となった。また、最尤法(すべての平滑化パラメータを0とおくことに対応)によりモデルを推定した結果、尤度が発散してしまい、パラメータの推定値が得られなかった。このことから、罰則付き最尤法により、安定的なモデル推定が可能となることがわかる。

提案手法に基づき推定された国債の金利期間構造、回収率調整後の社債の金利期間構造を図3、図4に示した。図3、図4は、瞬間フォワード・レート及び、ゼロクーポン・イールド(スポットレート)である<sup>21</sup>。図3、図4が示すように、イールドカーブの水準は国債が最も低い。推定され

<sup>18</sup>本来ならば、ノッチを考慮した格付けのセクター(Aaa, Aa1, Aa2, Aa3, A1, ..., C)に基づいて分析をおこなうことが望ましいが、各セクターに属する標本数が少ない場合、パラメータの推定はできるものの、結果の信頼性が著しく低下してしまう。

<sup>19</sup>ここでは、格付けAa2, A1, A3, Baa2, Ba2に対する1年後平均累積デフォルト率を各セクター1~5に適用した。

<sup>20</sup>安道・山下(2004)は、キャッシュフローに関連する指標は、デフォルト予測に重要な指標であると報告している。

<sup>21</sup>このイールドカーブは、回収率調整後の割引関数

$$\begin{aligned} d_0(t) &= \exp \left\{ - \int_0^t r(u; \hat{w}_0) du \right\} \\ d_j(t) &= \exp \left[ - \int_0^t \{ r(u; \hat{w}_0) + h_j(t; x, \hat{w}_j, \hat{\beta}_h) \} du \right], \quad (j = 1, \dots, J) \end{aligned}$$

た国債の瞬間フォワード・レートの形状は，7, 8 年近辺にこぶが見られるが，10 年近辺のスポットレートが低いことから指標銘柄効果の影響と考えられる<sup>22</sup>。また，格付けが低くなるに従いリスクプレミアムが上昇し，特に，低格付けのセクター 5「Ba1 以下」の瞬間フォワード・レートは一貫して上昇している。

図 5，図 6 は，推定されたベースラインハザード  $h_{0j}(t) = \sum_{k=1}^{m_j} \hat{w}_{jk} \phi_{jk}(t)$  の期間構造，及びそれから導かれるデフォルト確率の期間構造である。図 5 のベースラインハザードの期間構造をみると，格付け上位のセクター（セクター 1～セクター 3）のハザードの期間構造は，期間を通じて低水準にある。しかし，ハザードは緩やかな上昇傾向にあり，将来の不確実性も考慮していることがうかがえる。また，低格付けのセクター 5 のハザードについては，格付け上位のセクターとは異なる形状をしている。時点  $t = 0$  から 4 年近辺まで上昇して 6 年近辺まで下降しているが，その後再び上昇に転じている。

次に，推定されたベースラインハザードから導かれるデフォルト確率の期間構造を，Moody's (2000) が公開している 1983 年～2001 年までの平均累積デフォルト率と比較した。ここでは，各セクター 1～5 のデフォルト確率の期間構造を，推定に利用した格付け Aa2, A1, A3, Baa2, Ba2 に対する平均累積デフォルト率（図 7）を比較する。図 6 と比較すると，セクター 1～4 のデフォルト確率の期間構造は，Moody's の平均累積デフォルト率とほぼ同水準となっている。しかし，セクター 5 のデフォルト確率の期間構造は，Moody's のそれよりもやや低い水準となった。図 8 は，財務指標を考慮したハザード関数  $h_j(t, x, w_j, \beta_h)$  から導かれるデフォルト確率の期間構造である。デフォルト確率の期間構造は，格付けが低くなるに従いばらつきが大きくなっている。

(3) 式のハザード関数の係数  $\beta_h$  についても検討する。(3) 式は，財務指標に重みをつける係数が正の場合，対応する財務指標の値が大きいほどハザードが大きくなり，逆に，係数が負の場合は，ハザードが低くなる構造になっている。推定結果は，売上高キャッシュフロー比率;  $\hat{\beta}_{h1} = -0.12527$  (0.0004), 自己資本比率;  $\hat{\beta}_{h2} = -0.0054$  (0.0003) となった。ただし，カッコ内の数字は標準偏差を表す。これは，両指標の値が小さい企業ほどハザードが大きくなることを示唆している。

図 9，表 1 は，推定された各セクターの回収率のボックスプロット，及び回収率の平均値と推定された誤差分散をそれぞれ表す。誤差分散の推定量を比較すると，高格付け社債に対して市場はある程度共通した見方をしている。しかし，安全性の高い国債に対する誤差分散  $\hat{\sigma}_0^2$  と，投資不適格のセクター 5 の誤差分散  $\hat{\sigma}_5^2$  を比較すると，その差は 2 倍以上の開きがある。これには少なくとも 2 つの解釈があり，一つは債券の安全性が低下するに従い市場の予想がばらつくというものである。もう一方の解釈としては，投資不適格債を一つのセクター（セクター 5）にまとめたからという考え方もある。

(4) 式の回収率が，格付けから受ける影響については， $\hat{\gamma}'\phi_\delta(1) = 1.40$ ,  $\hat{\gamma}'\phi_\delta(2) = 0.99$ ,  $\hat{\gamma}'\phi_\delta(3) = 0.53$ ,  $\hat{\gamma}'\phi_\delta(4) = 0.41$ ,  $\hat{\gamma}'\phi_\delta(5) = 0.27$  となった。格付けが低下するにしたがって回収率が低下していく傾向が見られ，図 9 が示唆しているとおりである。Hamilton *et al.* (2001) は，1981 年～2000 年にデフォルトした社債の回収率の実績値を分析した。その結果，格付けが良いほど回収率は高く，格付けも回収率の予測に利用できるとしている。

から導かれている。すなわち，割引関数  $d(t)$  と瞬間フォワード・レート  $r(t)$  の関係  $r(t) = -d'(t)/d(t)$ , 割引関数  $d(t)$  とゼロクーポン・イールド  $\eta(t)$  の関係  $\eta(t) = -\log d(t)/t$  からである。ただし，社債格付けの各セクターについては， $\exp\{\hat{\beta}'_h x\} = 1$  として財務指標の影響を除いている。

<sup>22</sup>この現象は，川崎・安道 (2002) においても報告されている。



	国債	セクター 1	セクター 2	セクター 3	セクター 4	セクター 5
誤差分散	0.327	0.379	0.411	0.413	0.687	0.856
回収率	—	0.808	0.743	0.551	0.539	0.413
標準偏差	—	0.063	0.043	0.164	0.149	0.133

表 1: 推定された誤差分散，及び推定された回収率の平均値とその標準偏差.

財務指標に重みをつける係数  $\beta_\delta$  については，売上高キャッシュフロー比率の係数については， $\hat{\beta}_{\delta 1} = 0.0386$  (0.0058)，自己資本比率の係数については， $\hat{\beta}_{\delta 2} = 0.0285$  (0.0054) となった．ただし，カッコ内の数字は標準偏差を表す．(4) 式から，財務指標に重みをつける係数が正の場合，対応する財務指標の値が大きいほど回収率が大きく，逆に，係数が負の場合は，回収率が低くなる．推定結果は，売上高キャッシュフロー比率・自己資本比率の両指標について，その値が大きい企業ほど回収率が大きくなることを示している．また，償還日までの残存年数  $z$  に掛かる係数の推定値は  $\hat{\alpha} = -0.267$  (0.0074) となった．ただし，カッコ内の数字は標準偏差を表す．財務指標に重みをつける係数と同様のロジックで考えると，償還日までの残存年数が長い債券ほど回収率が小さくなることを示唆している．

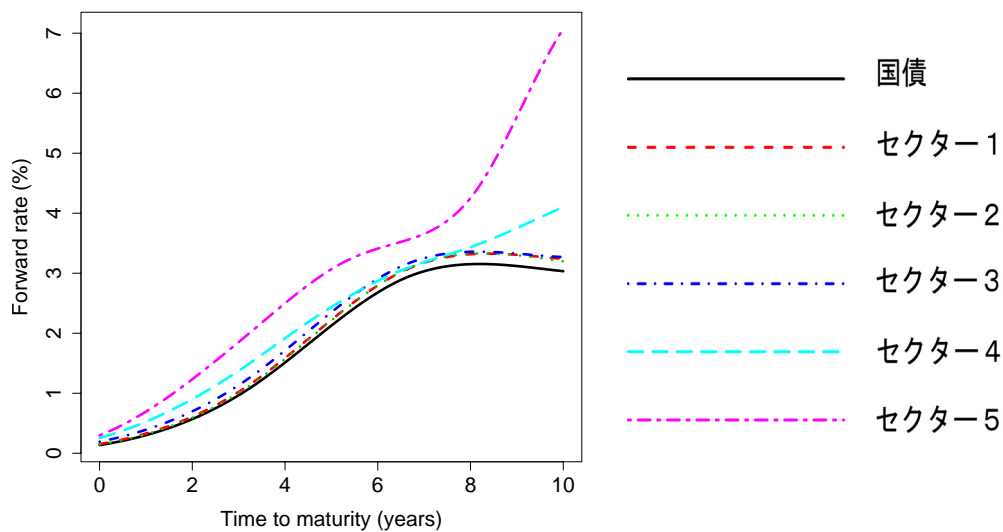


図 3: 国債の瞬間フォワード・レート，及びセクターごとの回収率調整後瞬間フォワード・レート.

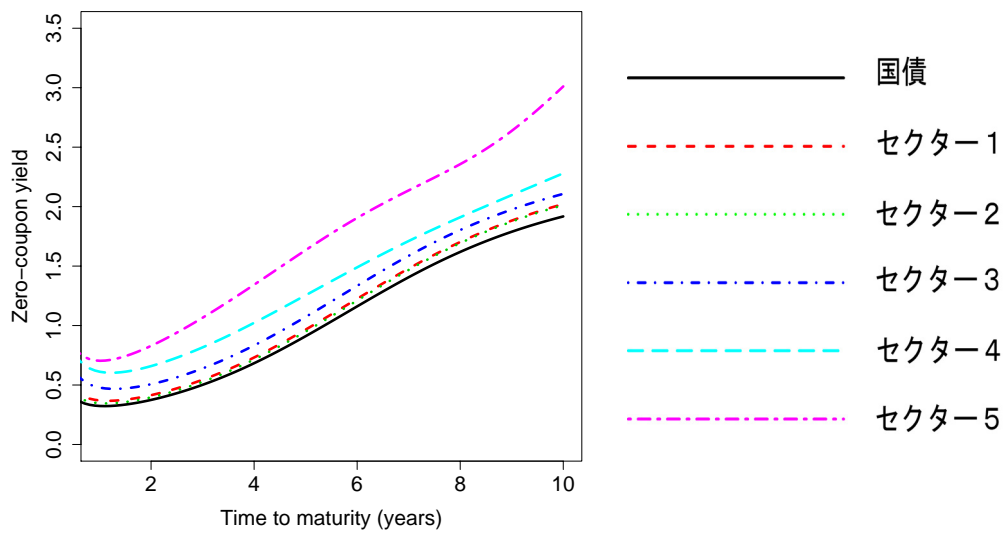


図 4: 国債のゼロクーポン・イールド, 及びセクターごとの回収率調整後ゼロクーポン・イールド.

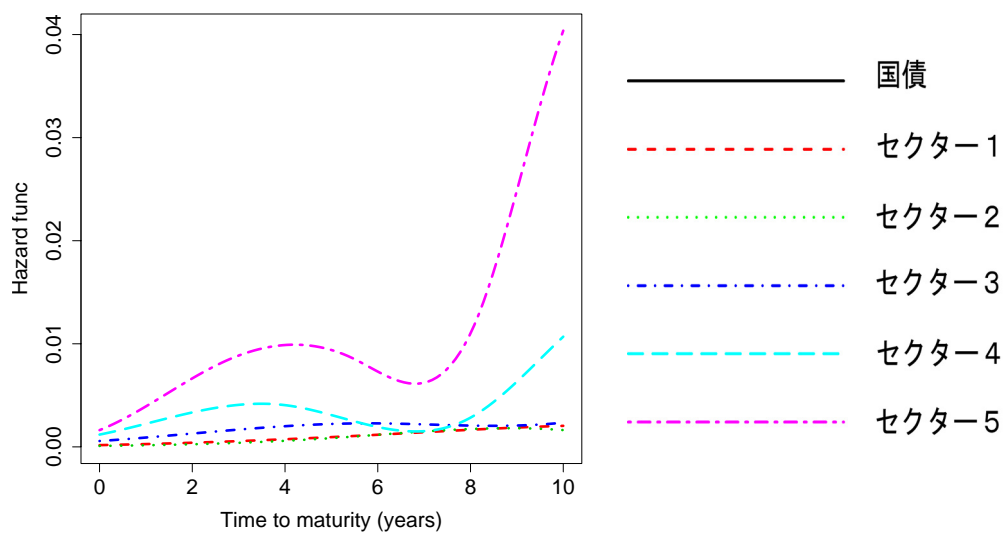


図 5: ベースラインハザードの期間構造 .

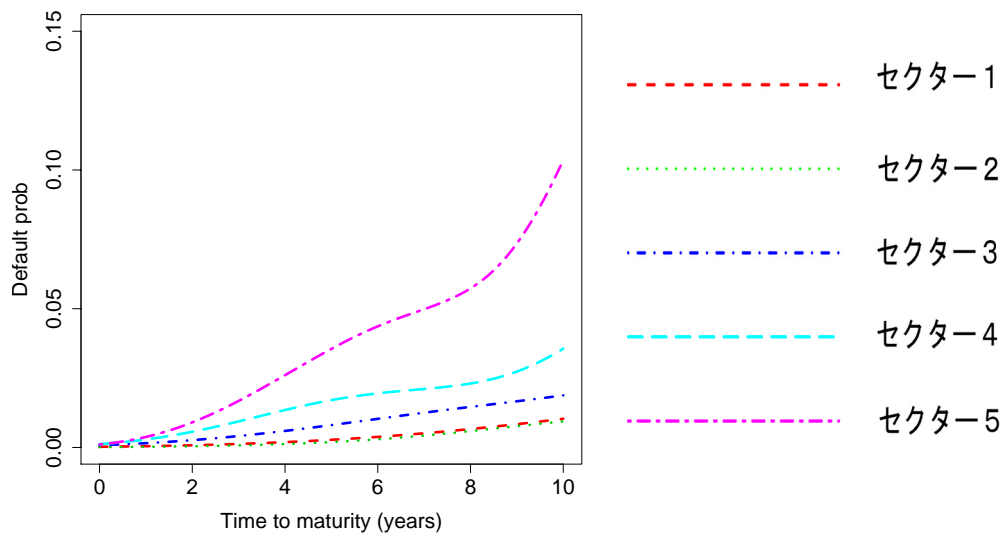


図 6: ベースラインハザードから導かれるデフォルト確率の期間構造 .

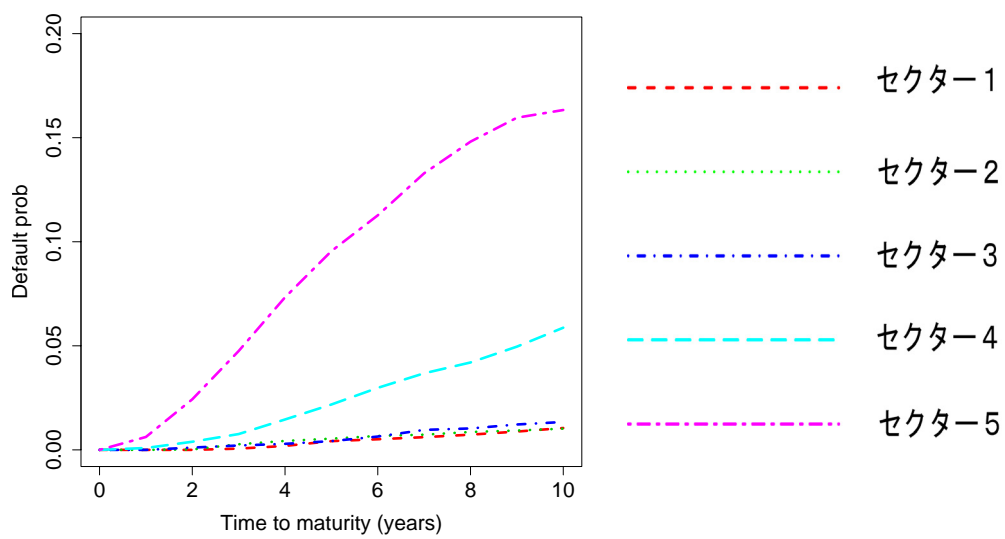
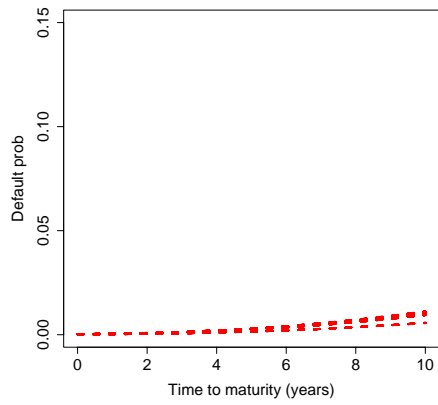
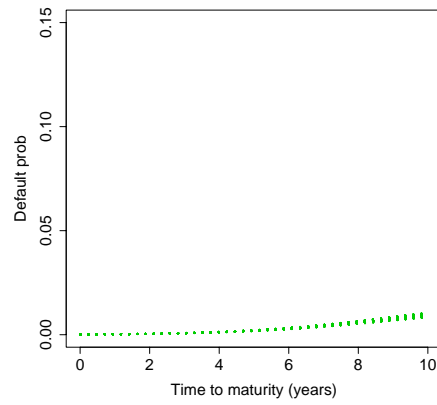


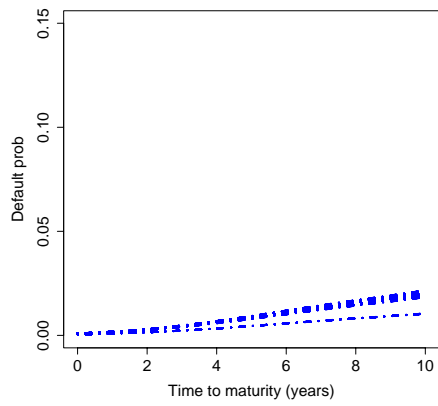
図 7: Moody's (2000) の平均累積デフォルト率 (格付け Aa2, A1, A3, Baa2, Ba2) の期間構造.



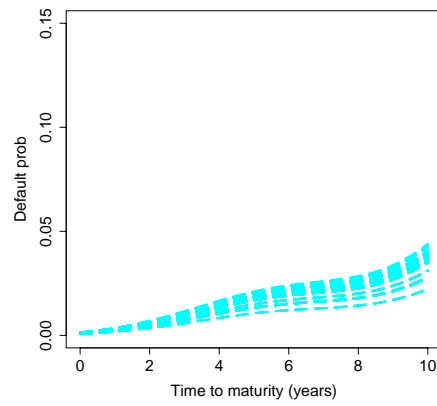
セクター 1



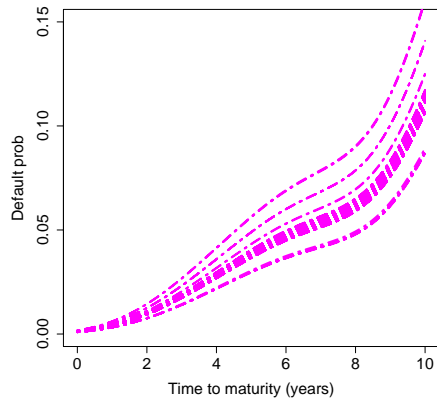
セクター 2



セクター 3



セクター 4



セクター 5

図 8: 財務指標を考慮したハザード関数  $h_j(t, x, w_j, \beta_h)$  から導かれるデフォルト確率の期間構造 .

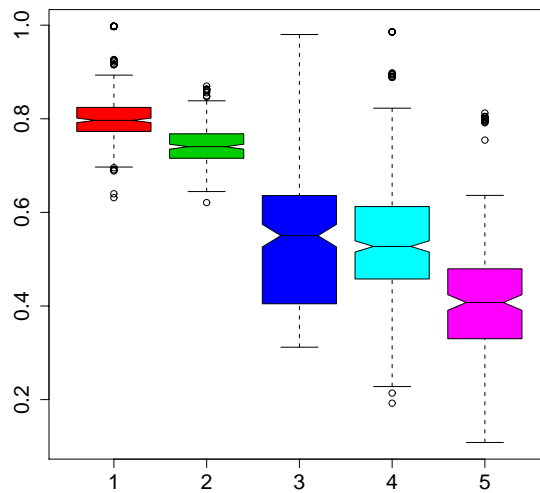


図 9: セクター 1「Aaa, Aa1, Aa2, Aa3」セクター 2「A1, A2」セクター 3「A3, Baa1」セクター 4「Baa2, Baa3」セクター 5「Ba1 以下」についての回収率のボックスプロット。各ボックスプロットにおいて、箱の内部の実線が中央値、箱の境界がそれぞれ 25%点と 75%点、ひげの部分が (25%点  $\times$  1.5 の範囲での最小値) と (25%点  $\times$  1.5 の範囲での最大値) を示す。

## 5 結論と今後の展望

本稿では、市場情報を統合して、金利の期間構造、社債発行企業の特徴（格付け、財務情報）を考慮したハザードの期間構造、及び格付けごとの回収率を同時推定する統計的モデリング手法を提案した。一般に、これらを同時推定することは困難と考えられていたが、本研究で提示する手法を利用することで同時推計が可能となった。日本債券市場の実証分析をおこなった結果、格付けや財務データの悪化と、デフォルト確率の構造・及び回収率の悪化の関係を把握することができた。このことは、市場が格付けや財務データを重要な指標とみなしていることを意味する。

今後の展望として、以下の四点が挙げられる。第一に、各社債発行企業のハザードの期間構造は格付けと財務情報に依存すると仮定したが、株価情報の併用やデフォルト関連の導入など、改善の余地がある。第二に、回収率が期間を通じて一定であるという仮定を置いたが、回収率にも期間構造を考えることができる。第三に、回収率については、優先・劣後構造などそれぞれの債券に内在する固有のリスク要因をモデルに織り込むことなども考えられる。第四に、本研究ではリスク中立測度の下でハザードの期間構造、及び格付けごとの回収率を推定していることから、現実世界のハザードの期間構造を推測したい場合、なんらかの修正をおこなう必要がある。

これらについては，今後の課題とし，稿を移して議論していきたい．

## 参考文献

- Altman, E. I. and Saunders, A. (2001) An analysis and critique of the BIS proposal on capital adequacy and ratings. *Journal of Banking and Finance*, **25**, 25–46.
- Altman, E. I., Bharath, S. T. and Saunders, A. (2002) Credit ratings and the BIS capital adequacy reform agenda. *Journal of Banking and Finance*, **26**, 909–921.
- Amin, I. K. and Morton, J. A. (1994) Implied Volatility Functions in Arbitrage-Free Term Structure Models. *Journal of Financial Economics*, **35**, 141–180.
- Anderson, N., Breedon, F., Deacon, M., Derry, A. and Murphy, G. (1996) *Estimating and interpreting the yield curve*. John Wiley and Sons, Chichester.
- Brace, A., Gatarek, D. and Musiela, M. (1997) The Market Model of Interest Rate Dynamics. *Mathematical Finance*, **7**, 127–155.
- Cox, D. R. (1972) Regression models and life-tables. *Journal of the Royal Statistical Society B*, **34**, 187–220.
- Cox, J. C., Ingersoll, J. E. and Ross, S. A. (1985) A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, **53**, 385–407.
- de Boor, C. (1978) *A practical guide to splines*. Springer, Berlin.
- Duffie, D. (1996) *Dynamic Asset Pricing Theory*, Second Edition. Princeton University Press.
- Duffie, D., Pan, J. and Singleton, K. J. (2000) Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump Diffusions. *Econometrica*, **68**, 1343–1376.
- Duffie, D. and Singleton, K. J. (1999) Modeling Term Structures of Defaultable Bonds. *Review of Financial Studies*, **12**, 687–720.
- Efron, B. and Tibshirani, R. J. (1993) *An introduction to bootstrap*. Chapman & Hall.
- Eilers, P. H. C. and Marx, B. D. (1996) Flexible smoothing with *B*-splines and penalties (with discussion). *Statistical Science*, **11**, 89–121.
- Fisher, M. E., Nychka, D. and Zervos, D. (1995) Fitting the term structure of interest rates with smoothing splines. Federal Reserve Bank Finance and Economics Discussion Paper 95-1, January.
- Green, P. J. and Silverman, B. W. (1994) *Nonparametric regression and generalized linear models*. Chapman & Hall, London.
- Hamilton, D. T., Gupton, G. and Berthault, A. (2001) Default and Recovery Rates of Corporate Bond Issuers: 2000. Special Comment. Moody’s Investor Service, Global Credit Research.
- Heath, D., Jarrow, R. and Morton, A. (1992) Bond Pricing and Term Structure of Interest Rates: A New methodology for Contingent Claims Valuation. *Econometrica*, **60**, 77–105.

- Jarrow, R. (2001) Default Parameter Estimation Using Market Prices. *Financial Analysts Journal*, **57**, 75–92.
- Jarrow, R. A. and Turnbull, S. M. (1995) Derivatives on Financial Securities subject to Credit Risk. *The Journal of Finance*, **50**, 53–85.
- Kijima, M. and Muromachi, Y. (2000a) Credit events and the valuation of credit derivatives of basket type. *Review of Derivatives Research*, **4**, 53–77.
- Kijima, M. and Muromachi, Y. (2000b) Evaluation of credit risk of a portfolio with stochastic interest rate and default processes. *Journal of Risk*, **3**, 5–36.
- Konishi, S., Ando, T. and Imoto, S. (2004) Bayesian information criteria and smoothing parameter selection in radial basis function networks. *Biometrika*, **91**, 27–43.
- Konishi, S. and Kitagawa, G. (1996) Generalised information criteria in model selection. *Biometrika*, **83**, 875–890.
- Kusuoka, S. (1999) A remark on default risk models. *Advances in Mathematical Economics*, **1**, 69–82.
- Lane, W. R., Looney, S. W. and Wansley, J. W. (1986) An application of the Cox proportional hazards model to bank failure. *Journal of Banking and Finance*, **10**, 511–532.
- McCulloch, J. H. (1971) Measuring the term structure of interest rates. *Journal of Finance*, **26**, 19–31.
- McCulloch, J. H. (1975) The tax-adjusted yield curve. *Journal of Finance*, **30**, 811–830.
- Merton, R. C. (1973) Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, **4**, 141–183.
- Merton, R. C. (1974) On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, **29**, 449–470.
- Moody's Investors Service (2000) Historical Default Rates of Corporate Bond Issuers, 1920–1999. Global Credit Research.
- Nelson, C. R. and Siegel, A. F. (1987) Parsimonious modeling of yield curves. *Journal of Business*, **60**, 473–89.
- Schaefer, S. M. (1981) Measuring a tax-specific term structure of interest rates in the market for British government securities. *The Economic Journal*, **91**, 415–438.
- Schwarz, G. (1978) Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics*, **6**, 461–464.
- Steely, J. M. (1991) Estimating the gilt-edged term structure: basis splines and confidence intervals. *Journal of Business, Finance and Accounting*, **18**, 512–529.
- Stone, C. J. (1974) Cross-validators choice and assessment of statistical predictions (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*. **36**, 111–147.
- Tierney, L. and Kadane, J. B. (1986) Accurate approximations for posterior moments and marginal densities. *Journal of the American Statistical Association*, **81**, 82–6.
- Unal, H., Madan, D. and Guntay, L. (2003) Pricing the risk of recovery in default with absolute priority rule violation. *Journal of Banking and Finance*, **25**, 1001–1025.
- Vasicek, O. A. (1977) An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of*

- Financial Economics*, **5**, 177–188.
- Vasicek, O. A. and Fong, H. G. (1982) Term structure modeling using exponential splines. *Journal of Finance*, **37**, 339–356.
- 安道知寛, 山下智志 (2004) 財務指標の時間依存を考慮した信用リスク評価モデル–デフォルト予測への応用. 金融庁ディスカッションペーパー, Vol 15.
- 家田明, 吉羽要直 (1999) 社債流通価格にインプライされている期待デフォルト確率の信用リスク・プライシング・モデルによる推定–ロングスタッフとシュワルツのモデルを用いて–. IMES Discussion Paper Series, 99–J–19.
- 川崎能典, 安道知寛 (2002) 正則化非線形回帰モデルによるイールドカーブの推定. 統計数理, 50 巻 2 号 149–164.
- 加藤敏康, 吉羽要直 (1999) 金利派生商品モデルの実務的活用について. IMES Discussion Paper Series, 99–J–24.
- 楠岡成雄, 青沼君明, 中川秀敏 (2001) クレジット・リスク・モデル. 金融財政事情研究会.
- 小田信之 (1997) 信用リスクを反映した金融商品のプライシング. IMES Discussion Paper Series, 97–J–12.
- 津田博史 (2002) 銘柄間の価格連動性を考慮した社債価格モデルに基づく信用リスク情報の推定 –倒産確率の期間構造と回収率の推定–. 統計数理, 50 巻 2 号, 217–240.
- 丸茂幸平, 家田明 (2000) 信用リスクのある金融商品のコックス過程を用いたプライシング方法. IMES Discussion Paper Series, 2000–J–30.
- 森本祐司, 吉羽要直 (1999) BGM 金利モデルの実用化に向けて. IMES Discussion Paper Series, 99–J–39.
- 山下智志, 木原隆夫 (2004) Reduced Form アプローチを用いた PD, LGD 同時推定. The Institute of Statistical Mathematics, Research Memorandum, No 911.
- 山下智志, 敦賀智裕 (2005) デフォルト相関係数のインプライド推計. 金融庁年報 .



# A reduced form approach for the simultaneous estimation of hazard term structure and LGD using rating and financial information

## Abstract

After the recognition of importance of credit risk measurement, lenders realized the necessity of the evaluation of various types of credit risk factors such as the hazard term structure, loss given default (LGD) on the credit exposure, default correlations, and fluctuation of exposure. In this paper, we propose a statistical method for the simultaneous estimation of the hazard term structure and the LGD on credit exposure from a cross-section of coupon bonds. These two credit risk factors are inferred adding the information on bond issuer's financial ratios, bond rating and date of maturity in the context of reduced form approach. We propose the term structure model of hazard rate using a smoothing spline with cubic B-spline bases. Then, we estimate the model parameter based on a maximum penalized likelihood approach and evaluate the goodness of fit from a Bayesian point of view.

Monte Carlo experiments are conducted to show the merits of a penalized likelihood approach. We also applied the proposed method to Japanese bond market data. This study finds that the proposed method provides meaningful findings to calculate the term structure of interest rates, hazard rates and the loss given default.

ANDO, Tomohiro

Graduate School of Business Administration Keio University Assistant Professor

YAMASHITA, Satoshi

The Institute of Statistical Mathematics Assistant professor

Credit Risk Database Association Adviser

Financial Services Agency Special research fellow