

# 信用リスクスコアリングにおける AUC と AR 値の最大化法 \*

三浦 翔<sup>†</sup>

山下 智志<sup>‡</sup>

江口 真透<sup>§</sup>

## 概要

この論文は、企業の信用リスクスコアリングの分野において広く用いられている AUC (Area under Curve) による新しい手法を提案する。提案する手法では、AUC を最大化する線形スコアリングのパラメータの推定値を求め、モデルを作成する。従来からの手法は、2 値回帰モデル、特にロジットモデルを仮定し、最尤推定法により線形スコアリングのパラメータの推定値を求めることによってモデルを作成するものであった。このモデルの妥当性を測る指標として、以前から AUC は用いられてきた。しかし、最尤推定法によって得られるモデルは、一般的には AUC を最大化しない。AUC を目的関数として用いることによって、AUC に関して最適なモデルが得られる。

AUC は微分できない階段関数で定義されるため、最大化は困難である。そこで、本稿では、微分可能な連続関数で階段関数を近似することにより、近似 AUC を最大化するようなパラメータの推定方法を提案する。なお、AUC と AR 値は比例関係にあり、得られるパラメータの推定値は AR 値も最大化する。

本稿で提案する手法により作成されるモデルは、AUC に関して最適性を有するだけでなく、従来の手法で得られるモデルよりも財務データに含まれる異常値に対してロバストであり、推定値が不安定でないという結果が得られた。財務指標データにおいては、異常値が含まれるデータが多くみられるため、異常値に対してロバストなモデルが得られる手法は有効である。デフォルト直前期の財務指標は信頼性が低いいため、少数の異常値に依存しないことは適切な手法としての重要な要素である。

キーワード: ROC 曲線, AUC, 線形スコアリング, シグモイド関数

## 1 はじめに

新 BIS 規制に伴うバーゼル委員会レポートにより、デフォルト・非デフォルトを判別するモデルの評価方法がいくつか定められた (Basel Committee on Banking Supervision, 2005)。その一つとして、ROC (Receiver Operating Characteristic) 曲線と AUC が挙げられる。ROC 曲線は、デフォルト確率の推定モデルによって各企業のスコアリングが与えられたときに、スコアリングの値とデフォルト・非デフォルトの判別結果から過誤の確率を求めることによって得られる曲線であり、その下側面積で定義される AUC はモデルの精度を測る指標となる。デフォルト・非デフォルトの判別分析におけるモデルは、一般化線形モデル (主にロジットモデル) の最尤推定法により作成し、AUC を用いて評価することが一般的である。この従来からの手法である、ロジットモデルにおける最尤推定法によるモデル作成から AUC によるモデル評価までの流れは、2 値のラベルをもつデータの判別によく用いられる。最尤推定量は、スコアリングと仮定したモデルとのフィッティングにより得られる推定量であり、モデルを仮定せず、スコアリングの順位にしか依存しない ROC 曲線、AUC においては、一般的には最適性を有しない。つまり、従来の手法におけるモデル (ロジットモデルにおける最尤推定法により得られるモデル) は AUC を指標としたときの最適性を有さない。AUC をモデルの評価関数として用いるのであれば、それ自身を目的関数として用いることによって、AUC を最大化するようなパラメータの推定量、及びモデルが得られると考えた。本稿では AUC の値に限って述べているが、AR (Accuracy Rate) 値と AUC は正比例の関係にあるため、AUC 最大化は同時に AR 値の最大化も満たす。詳しくは補遺 7.1 節で述べる。

\*本稿は執筆者の個人的な見解であり、金融庁及び金融研究研修センターの公式見解を示すものではない。

<sup>†</sup>総合研究大学院大学、金融庁金融研究研修センター専門研究員 (E-mail:kmiura@ism.ac.jp)

<sup>‡</sup>統計数理研究所、金融庁金融研究研修センター特別研究員 (E-mail:yamashita@ism.ac.jp)

<sup>§</sup>統計数理研究所 (E-mail:eguchi@ism.ac.jp)

AUC はヘビサイド関数という階段関数の和で表され、AUC 自身も階段関数となる。そのため、微分することができず、グラディエント法などの微分法を用いて最大化を行うという手法がとれない。したがって、最大化が容易でないことから、AUC 自身をパラメータ推定の目的関数として用いるという考え方はされていない。本稿ではヘビサイド関数を近似する微分可能な関数を用いて AUC を近似し、この近似した AUC を最大化することによって AUC 最大化を実現するパラメータの推定量を求め、モデルを作成することを考えた。具体的に、ヘビサイド関数をシグモイド関数で近似し、階段関数である AUC を微分可能な近似 AUC として表わす。3.1 節で図を用いて詳しく述べる。

本稿では、AUC を最大化するモデルを説明変量 (財務指標) の線形スコアリングに限定して作成する。AUC はこの線形スコアリングの順位性をくずさない単調変換に関して不変の値をとる。したがって、このモデルは線形スコアリングだけでなく、線形スコアリングの単調変換も考慮しているという点で、より複雑なモデルを表現できる。一般化線形モデルにおいては、線形スコアリングを単調関数であるリンク関数で変換させる。したがって、線形スコアリングの単調変換のモデルという共通点があり、一般化線形モデルにおける最尤推定量により得られる従来用いられてきたモデルと、AUC を最大化させることにより得られるモデルを比較することは重要なことである。

財務指標などを含む金融のデータには、異常値が多く存在することが知られている。最尤推定法はその異常値に対して過剰にフィッティングをよくしようとするため、不安定な推定となる。それに対し、AUC はモデルを仮定せず、データのスコアリングの順位性にしかよらないため、先に述べたような AUC をパラメータ推定の目的関数として用いる推定方法は、異常値の存在するデータに対してよりロバストな推定を行うことができる。実データやシミュレーションデータにおいて、従来のモデルと AUC 最大化を実現するモデルによる AUC の値を比較することにより、どのようなデータのときに、どれほどの AUC の差が生じるのか見ていく。

以下に、第 2 章では、従来用いられてきた一般化線形モデルにおける最尤推定量によるモデル作成とそのモデル評価に用いる ROC 曲線や AUC の定義などを述べる。第 3 章では、ヘビサイド関数を近似する関数としてシグモイド関数を導入し、近似 AUC を定義する。そのもとで、近似 AUC を最大化する推定量の求め方を述べる。また、デフォルト確率の値を推計する方法を述べる。第 4 章では、実際の企業データの分析を行い、従来の手法によるモデルと 3 章で導入した推定量によるモデルとの AUC の比較を行う。第 5 章ではシミュレーションデータを用いて分析を行う。このことにより、どのようなデータのときに 2 つの異なる推定法によるモデルの結果の差が顕著になるのか考察する。第 6 章では結論及びディスカッションを、第 7 章では補遺を記す。

## 2 従来の手法と問題点

この章では、現在のデフォルト分析において多く見られる一般的な分析方法ならびにそれに対する評価方法を述べ、そこに内在する問題点を指摘し、本稿で提案する手法との比較を述べる。

### 2.1 ロジットモデル最尤推定法

Martin(1979) にみられるような、従来の一般的なモデルの作成方法、ならびに評価方法を述べる。モデル作成においては、以下のように一般化線形モデルが用いられる。 $m$  個の説明変量 (財務指標) があるものとし、企業  $i$  のそれを表す確率ベクトルを  $\mathbf{X}_i$  とし、各説明変量の係数ベクトルを  $\beta$  とすると、切片項も含めて、 $\beta, \mathbf{X}_i \in \mathbf{R}^{m+1}$  であり、財務指標から得られる企業  $i$  のデフォルト確率を  $p(\mathbf{X}_i)$  とすると、

$$g(p(\mathbf{X}_i)) = \beta^T \mathbf{X}_i$$

の関係が成立する。ここに、関数  $g$  は単調関数であり、一般化線形モデルの枠組みでは、リンク関数と呼ぶ。また、 $\beta^T \mathbf{X}_i$  は線形スコアリングである。企業のデフォルト・非デフォルトを表す企業  $i$  のラベルを  $Y_i$  とし、デフォルト企業のラベルを  $Y_i = 1$ 、非デフォルト企業のそれを  $Y_i = 0$  とする。このとき、反応変量は 2 値変量なので、リンク関数  $g$  としてロジットリンク関数

$$g(p(\mathbf{X}_i)) = \log\left(\frac{p(\mathbf{X}_i)}{1-p(\mathbf{X}_i)}\right)$$

を採用するのが通例である。したがって、一般化線形モデルにおいて、リンク関数としてロジットリンク関数を用いた場合、

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{p(\mathbf{X}_i)}{1-p(\mathbf{X}_i)}\right) &= \beta^T \mathbf{X}_i \\ \Leftrightarrow p(\mathbf{X}_i) &= \frac{1}{1 + \exp(-\beta^T \mathbf{X}_i)} \end{aligned} \quad (1)$$

となる。このときのパラメータ  $\beta$  の推定法として、最尤推定法が用いられる。以下、モデル作成に用いるパラメータの推定方法である、最尤推定法に関して述べる。

各企業のデフォルト・非デフォルトは独立に生じる事象であるとする。また、企業数は総計  $n$  社あるものとする、尤度関数  $l(\beta)$  は以下のように表される。

$$l(\beta) = \prod_{i=1}^n p(\mathbf{X}_i)^{Y_i} \{1 - p(\mathbf{X}_i)\}^{1-Y_i}$$

この尤度関数を最大化することによって最尤推定量が得られる。すなわち、 $\beta$  の最尤推定量を  $\hat{\beta}_M$  と表すと、

$$\hat{\beta}_M = \arg \max_{\beta} l(\beta)$$

として最尤推定量は得られる。実際には、 $l(\beta)$  の対数をとった対数尤度関数を最大化することにより最尤推定量を得ることが多い。

最尤推定量  $\hat{\beta}_M$  を用いて作成されるモデル  $\hat{p}_M(\mathbf{X}) = 1 / \{1 + \exp(-\hat{\beta}_M^T \mathbf{X})\}$  を、以下ではロジット・最尤推定法によるモデルとよぶ。

モデルの判別力を測る指標として、ROC 曲線とその下側面積で定義される AUC が提案されている (Basel Committee on Banking Supervision, 2005)。以下に、ROC 曲線と AUC についての説明を行う。

## 2.2 AUC によるモデル評価

デフォルト、非デフォルトを表す確率変数を  $Y$  とし、それぞれの状態を  $Y = 1, Y = 0$  とする。判別問題において、偽陽性率 (False Positive Rate, FPR)、真陽性率 (True Positive Rate, TPR) が存在する。FPR とは、非デフォルト (陰性) である企業を誤ってデフォルト (陽性) と判別する確率であり、TPR とは、デフォルト企業を正しくデフォルトと判別する確率である。この判別問題において、財務指標を用いて各企業のスコアリングを求め、このスコアリングがある値 (カットオフポイント) よりも大きいときはこの企業をデフォルトと判別し、小さいときは非デフォルトと判別するものとする。

財務指標から得られる企業のスコアリングを  $Z(\mathbf{X})$  とし、カットオフポイントを  $c$  とする。このとき、FPR, TPR は以下のように定義される。

$$\begin{aligned} \text{FPR}(c) &= P(Z(\mathbf{X}) > c | Y = 0) \\ \text{TPR}(c) &= P(Z(\mathbf{X}) > c | Y = 1) \end{aligned}$$

ROC 曲線は点  $(FPR(c), TPR(c))$  をカットオフポイント  $c$  を  $(-\infty, \infty)$  の区間で動かすことにより得られる  $[0, 1] \times [0, 1]$  の平面上の曲線である。  $c = -\infty$  のときに  $(1, 1)$ 、  $c = \infty$  のときに  $(0, 0)$  を通る上に凸な曲線となる。 Hanley and McNeil(1982) に詳しい。 また、この ROC 曲線の下側面積として、期待 AUC は以下のように定義される。

$$AUC = \int_{c=-\infty}^{c=\infty} TPR(c) dFPR(c)$$

すべての企業にランダムにスコアリングがつけられているとき、  $AUC = 1/2$  となり、デフォルト、非デフォルト企業が完全に判別できているときには、  $AUC = 1$  となる。 値が 1 に近いほど判別がうまくできているといえる。 デフォルト企業群を D、非デフォルト企業群を ND と表わし、それぞれの群に属する企業のスコアリングを表す確率変数を  $Z(\mathbf{X}_D)$ 、  $Z(\mathbf{X}_{ND})$  とすると、

$$AUC = P(Z(\mathbf{X}_D) - Z(\mathbf{X}_{ND}) > 0)$$

となる (Bamber, 1975)。したがって、それぞれの企業群の個数を  $n_D, n_{ND}$  とし、スコアリング  $Z$  の推定量を  $\hat{Z}$  とすると、データから得られる AUC を  $\overline{AUC}$  としたとき、以下のように表される。

$$\overline{AUC} = \frac{1}{n_D n_{ND}} \sum_{\substack{i \in D \\ j \in ND}} I(\hat{Z}(\mathbf{X}_i) - \hat{Z}(\mathbf{X}_j)) \quad (2)$$

ここで、 $I$  はヘビサイド関数である。ヘビサイド関数は、変数  $x$  に対して、以下のように  $x = 0$  で非連続な値をとる関数である。

$$I(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

ここから、ロジット・最尤推定法によるモデルの評価方法として AUC を用いることを考える。最尤推定量  $\hat{\beta}_M$  が得られたとき、モデルとして

$$\hat{p}_M(\mathbf{X}) = 1 / \{1 + \exp(-\hat{\beta}_M^T \mathbf{X})\}$$

が作成される。(3) で表された  $\overline{AUC}$  のスコアリングに推定値として  $\hat{Z}(\mathbf{X}) = \hat{p}_M(\mathbf{X})$  を代入して  $\overline{AUC}$  の値を得ることにより、このモデルの判別力を評価する。このときに得られる  $\overline{AUC}$  の値は、

$$\overline{AUC}(\hat{p}_M) = \frac{1}{n_D n_{ND}} \sum_{\substack{i \in D \\ j \in ND}} I(\hat{p}_M(\mathbf{X}_i) - \hat{p}_M(\mathbf{X}_j))$$

となる。モデル評価としては、この  $\overline{AUC}(\hat{p}_M)$  の値が 1 に近ければ近いほど判別力のあるモデルと評価する。(2) で得られる  $\overline{AUC}$  のスコアリングに線形スコアリングを代入しても同じ  $\overline{AUC}$  の値が得られる。これは、(1) からわかるように、 $p(\mathbf{X})$  は線形スコアリングの単調変換なので、スコアリングの順位性に関して不変であること、及び、 $\overline{AUC}$  はスコアリングの順位にのみ依存することから、 $\overline{AUC}$  の値が不変となるからである。

線形スコアリングを用いたときの  $\overline{AUC}$  を  $\overline{AUC}(\beta)$  とすると、(2) より、

$$\overline{AUC}(\beta) = \frac{1}{n_D n_{ND}} \sum_{\substack{i \in D \\ j \in ND}} I(\beta^T (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)) \quad (4)$$

と表される。したがって、

$$\overline{AUC}(\hat{\beta}_M) = \frac{1}{n_D n_{ND}} \sum_{\substack{i \in D \\ j \in ND}} I(\hat{\beta}_M^T (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j))$$

において、

$$\overline{\text{AUC}}(\hat{p}_M) = \overline{\text{AUC}}(\hat{\beta}_M)$$

が成り立つ。

よって、順位性に関して不変な単調関数をリンク関数として用いる限り、一般化線形モデルのモデル評価は、得られる線形スコアリングの推定値による  $\overline{\text{AUC}}(\beta)$  を求めれば十分である。以下ではスコアリングを線形スコアリングに限定して  $\overline{\text{AUC}}(\beta)$  の考察を行う。

以上、従来用いられてきた手法である、ロジット・最尤推定法によるモデルを AUC で評価する手法を述べたが、このモデルはあくまでも尤度を最大化するという目的でパラメータ  $\hat{\beta}$  が求められており、AUC を最大化するような  $\hat{\beta}$  を求めたものではない。次節では  $\overline{\text{AUC}}(\beta)$  をパラメータ推定の目的関数として用いる。

### 2.3 AUC 最大化によるパラメータ推定

本節では、(4) の  $\overline{\text{AUC}}(\beta)$  をパラメータ推定の目的関数として用い、 $\overline{\text{AUC}}(\beta)$  を最大化するモデルを作成する。このとき、スコアリングは線形スコアリングに限って議論を進める。先にも述べたが、従来用いられてきたモデルと比較するには、線形スコアリングにおいて考慮すれば十分だからである。また、以下では、 $m$  個の説明変量 (財務指標) があるものとし、企業  $i$  のそれを表す確率ベクトルを  $\mathbf{X}_i$  とし、各説明変量の係数ベクトルを  $\beta$  とする。以下では切片項は含まず、 $\beta, \mathbf{X}_i \in \mathbf{R}^m$  とする。

$\overline{\text{AUC}}(\beta)$  を最大化するような推定量として、以下のように  $\hat{\beta}_A$  を定義する。

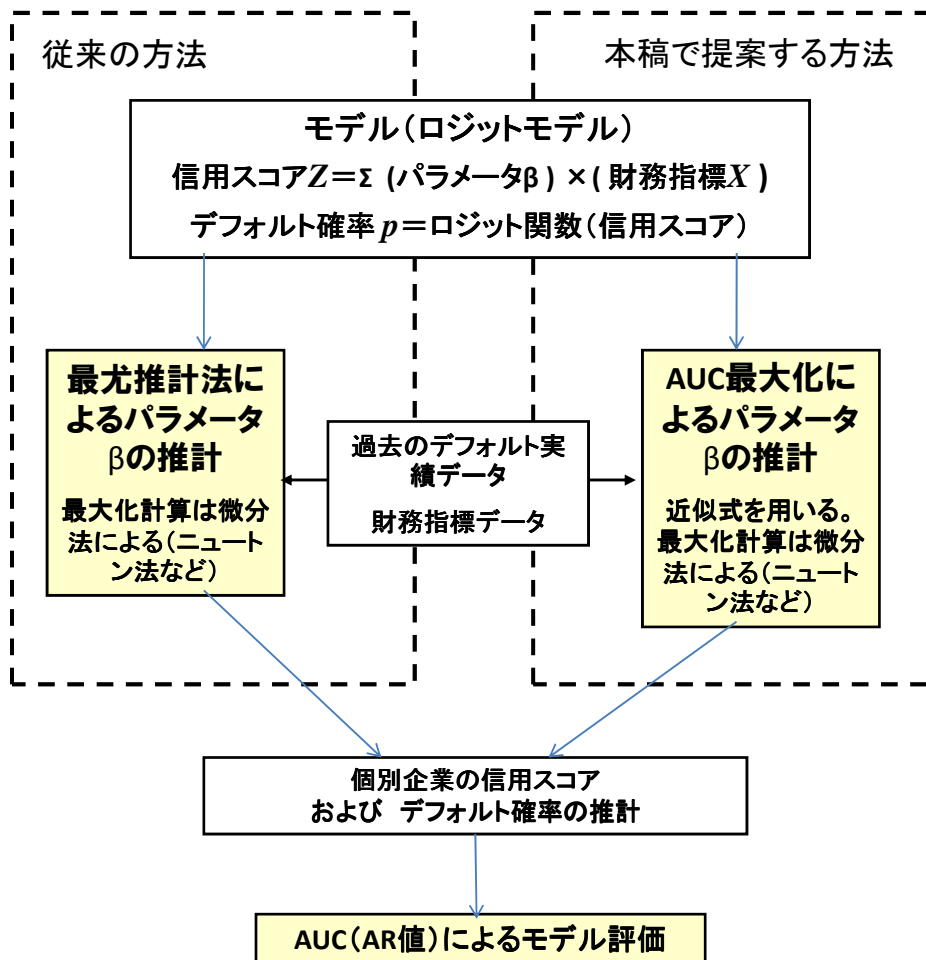
$$\begin{aligned} \hat{\beta}_A &= \arg \max_{\beta} \overline{\text{AUC}}(\beta) \\ &= \arg \max_{\beta} \frac{1}{n_D n_{ND}} \sum_{\substack{i \in D \\ j \in ND}} I(\beta^T (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)) \end{aligned} \quad (5)$$

このような推定量の一致性については Han(1987) に、漸近正規性に関しては Sherman(1993) に記されている。

(4) で定義されているように、 $\overline{\text{AUC}}(\beta)$  は  $\beta$  に対して階段関数であるヘビサイド関数の和で表されているため、 $\overline{\text{AUC}}(\beta)$  の最大化は  $\beta$  に関して不連続で微分できず、容易でない。 $\beta$  で微分可能な関数を用いてヘビサイド関数を近似し、この近似関数を用いて  $\overline{\text{AUC}}(\beta)$  を表すことにより、(4) を近似した関数として、近似  $\overline{\text{AUC}}(\beta)$  を考える。この近似  $\overline{\text{AUC}}(\beta)$  を最大化するような  $\beta$  を求め、これを推定量として採用することとし、 $\hat{\beta}_M$  を用いた  $\overline{\text{AUC}}(\hat{\beta}_M)$  と比較する。本稿ではヘビサイド関数の近似関数としてシグモイド関数を用いる。次章で詳しく述べる。以上で述べた、従来のロジット・最尤推定法と本稿で提案する手法の比較を図 1 にまとめた。

## 3 シグモイド関数を用いた近似 AUC の最大化

本章では、ヘビサイド関数の近似関数としてシグモイド関数を用いることにより、(4) で表された  $\overline{\text{AUC}}(\beta)$  を  $\beta$  で微分可能な近似関数として表す。さらに、得られた近似  $\overline{\text{AUC}}(\beta)$  を最大化する推定量の求め方について述べる。



提案する方法はAUC (AR値)を最大化しているため、尤度を最大化している従来の方法より、同じ変数同じデータを使っても評価値(AUC、AR値)が高くなる。

図 1: 従来のロジット・最尤推定法と提案する手法の比較

### 3.1 シグモイド関数によるヘビサイド関数の近似と近似 AUC

(4) で表される  $\overline{\text{AUC}}(\beta)$  は、ヘビサイド関数で定義されているため  $\beta$  に関して連続でなく微分できない。このことから、直接  $\overline{\text{AUC}}(\beta)$  を  $\beta$  で微分し、 $\beta$  に関して最大化することは困難である。(3) で表されるヘビサイド関数を近似する微分可能な関数として、シグモイド関数  $s(x) = 1/(1+\exp(-x))$  を用いる。シグモイド関数  $s(x)$  は単調増加関数であり、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} s(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} s(x) = 1$  となり、 $x$  の絶対値が大きいときにはヘビサイド関数のよい近似関数といえる。下図にシグモイド関数  $s(x)$ (曲線) とヘビサイド関数  $I(x)$ (階段関数) の様子を描く。

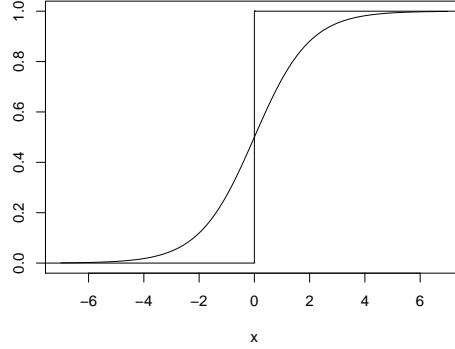


図 2: シグモイド関数 (曲線) とヘビサイド関数 (階段関数)

$x$  が 0 から離れるにつれ近似がよくできていることが見てとれる。しかし、ヘビサイド関数と異なる挙動をとるのが、 $x$  の絶対値が 0 に近いときである。(3) からわかるように、ヘビサイド関数は  $x = 0$  を境界とし非連続に 0, 1 の値をとるが、シグモイド関数は  $x = 0$  でも連続な値をとり、さらにヘビサイド関数ではとれない  $s(0) = 1/2$  という値をとる。したがって、 $x$  の絶対値が 0 に近いときには、よい近似とはいえない。そこで、 $x = 0$  付近での近似をよくするためにチューニングパラメータを用いる。チューニングパラメータを用いることによって、 $x = 0$  付近で  $x$  の値に対して敏感に変化する関数を表現することができる。チューニングパラメータとして  $\sigma (> 0)$  を用いて、 $s_\sigma(x) = 1/(1+\exp(-x/\sigma))$  とし、このシグモイド関数をヘビサイド関数の近似関数として採用する。ヘビサイド関数をチューニングパラメータを用いたシグモイド関数で近似した  $\overline{\text{AUC}}(\beta)$  を  $\text{sAUC}_\sigma(\beta)$  とすると、(4) より

$$\begin{aligned} \text{sAUC}_\sigma(\beta) &= \frac{1}{n_D n_{ND}} \sum_{\substack{i \in D \\ j \in ND}} s_\sigma(\beta^T(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)) \\ &= \frac{1}{n_D n_{ND}} \sum_{\substack{i \in D \\ j \in ND}} \frac{1}{1 + \exp(-\beta(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)/\sigma)} \end{aligned} \quad (6)$$

と表される。 $\sigma (> 0)$  の値が小さいとき、シグモイド関数は  $x = 0$  付近でもヘビサイド関数のよい近似となる。以下に、ヘビサイド関数による  $\overline{\text{AUC}}(\beta)$  の図と、 $\sigma$  の値を変えることにより得られる  $\text{sAUC}_\sigma(\beta)$  がどのような曲面を描くのかみる。

図 3, 4 は、2 変量の場合、すなわち  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  のときに、 $x$  軸、 $y$  軸に  $\beta_1, \beta_2$  の値を、 $z$  軸に  $\overline{\text{AUC}}(\beta)$ ,  $\text{sAUC}_\sigma(\beta)$  の値を描いたものである。データは、デフォルト・非デフォルト企業が 10 個ずつあり、各説明変量が正規分布に従うものとしたものである。

図 3 はヘビサイド関数を用いた  $\overline{\text{AUC}}(\beta)$  である。先に述べたように、階段状の関数となっているため、微分法により最大化することが不可能である。以下、図 4 は、 $\sigma$  の値を、0.01、0.1 と変化させることにより  $\text{sAUC}_\sigma(\beta)$  の図である。階段状であった  $\overline{\text{AUC}}(\beta)$  が  $\sigma$  の値が大きくなるにつれ、徐々に滑らかな曲面を描く。

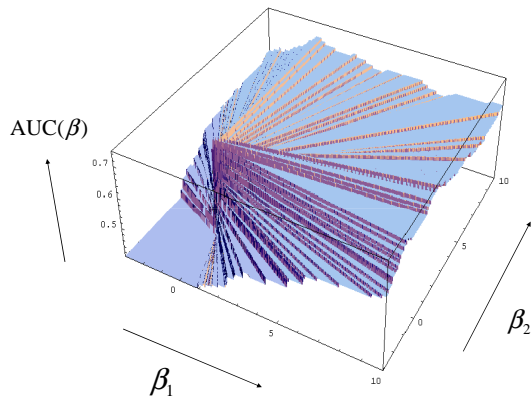
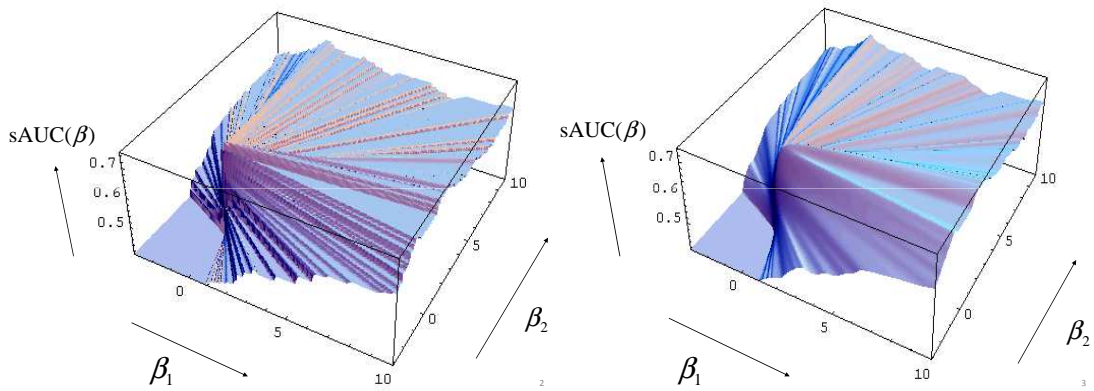


図 3: 近似を用いない、階段関数である  $\overline{\text{AUC}}(\beta)$



(a)  $\sigma=0.01$

(b)  $\sigma=0.1$

図 4:  $\overline{\text{AUC}}(\beta)$  を近似した  $\overline{\text{sAUC}}_{\sigma}(\beta)$



以下、この  $\overline{\text{sAUC}}_\sigma(\beta)$  を  $\beta$  に関して最大化することにより得られる  $\beta_\sigma$  を推定値  $\hat{\beta}_\sigma$  として採用する。すなわち、

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_\sigma &= \arg \max_{\beta} \overline{\text{sAUC}}_\sigma(\beta) \\ &= \arg \max_{\beta} \frac{1}{n_D n_{ND}} \sum_{\substack{i \in D \\ j \in ND}} s_\sigma(\beta^T (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)) \\ &= \arg \max_{\beta} \frac{1}{n_D n_{ND}} \sum_{\substack{i \in D \\ j \in ND}} \frac{1}{1 + \exp(-\beta(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)/\sigma)}\end{aligned}\quad (7)$$

このような  $\hat{\beta}_\sigma$  の存在については、Ma and Huang(2005.a) に記されている。

$\sigma$  とシグモイド関数のヘビサイド関数に対する近似精度について考えると、 $\sigma$  が小さければ小さいほどよくなる。しかし、 $\sigma$  の値をいくら小さくしようと、シグモイド関数は定点として  $s(0) = 1/2$  をとり、依然として  $x = 0$  の近傍においてはヘビサイド関数の近似としてはよくない。これを回避する方法として、Gamerman(1996) では経験則 (rule of thumb) が提案されている。これは、任意の  $x$  に対して  $|x/\sigma| > 5$  となるように  $\sigma$  を設定することにより、絶対値が 0 付近の値をとらないようにするというものである。これにより、先に述べたヘビサイド関数とシグモイド関数の近似精度のよくない  $x$  の絶対値が 0 に近いような  $x$  の定義域にデータが存在しないようにすることができる。しかし、 $|x/\sigma| > 5$  という条件は、あくまでも近似精度をよくする、ある程度の閾値を示しているに過ぎないことに留意する必要がある。 $x/\sigma = -5$  のときにシグモイド関数は  $6.69 \times 10^{-3}$  の値をとり、 $x/\sigma = 5$  のとき、 $9.93 \times 10^{-1}$  という値をとることがわかるが、この値よりも  $x/\sigma$  の絶対値が大きいたくにはヘビサイド関数のとる 0, 1 の近似として十分であるとみなすルールなのである。(6) で表された  $\overline{\text{sAUC}}_\sigma(\beta)$  に対して上で述べた経験則は、任意の  $i \in D, j \in ND$  の組み合わせに対して、 $|\beta^T(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)/\sigma| > 5$  となるように  $\sigma$  の値を与えることによりシグモイド関数の近似精度をよくする条件である。

しかし、得られる  $\overline{\text{sAUC}}_\sigma(\beta)$  の最大値は、 $\sigma$  の値にほとんど依存しない。(7) 式より、 $\sigma$  の値を変化させるとき、得られる  $\hat{\beta}_\sigma$  の値が  $\sigma$  の値の変化を打ち消すように変化するからである。すなわち、任意の実数  $k(> 0)$  に対して、

$$\overline{\text{sAUC}}_\sigma(\beta) = \overline{\text{sAUC}}_{k\sigma}(k\beta)$$

が成り立ち、したがって、

$$\hat{\beta}_{k\sigma} = \arg \max_{\beta} \overline{\text{sAUC}}_{k\sigma}(\beta)$$

とすると、

$$\hat{\beta}_{k\sigma} = k\hat{\beta}_\sigma$$

が成り立つことが理由である。これにより、 $\hat{\beta}_\sigma$  を求めるとき、 $\sigma$  を固定して求めれば十分である。以下の章においては、 $\sigma$  ,  $\|\beta_\sigma\|$  の値は、それぞれ  $\sigma = 0.01, \|\beta_\sigma\| = 1$  とした。

Ma and Huang(2005.b) は、クロスバリデーションによって最適な  $\sigma$  の値を選択しているが、 $\sigma$  の値は  $\overline{\text{sAUC}}_\sigma(\beta)$  の最大化の結果にほとんど影響を与えないと報告している。具体的な  $\hat{\beta}_\sigma$  の計算方法は第 7 章の補遺 7.2 節で述べる。

### 3.2 信用スコアリング $\hat{\beta}_\sigma^T \mathbf{X}$ からデフォルト確率を算出する場合の処理

$\hat{\beta}_\sigma$  が得られると、個別企業の信用スコアリングと順位を推計することができるが、デフォルト確率を計算する必要がある場合には、信用スコアリング  $\hat{\beta}_\sigma^T \mathbf{X}$  をデフォルト確率に変換するステップが必要である。

実務で用いられることの多い手法として、各企業の信用スコアリングの順位からいくつかのグループをつくり、過去の実績データから同程度の順位におけるデフォルトの割合を計算し、それを各グループのデフォルト確率として採用する方法である。そのほかの方法として、統計モデルを用いて、モデルに対する当てはめからデフォルト確率を求める方法がある。ここでは、ロジットモデルを仮定することにより、各企業のデフォルト確率を求める方法を述べる。(7) で得られるパラメータの推定量  $\hat{\beta}_\sigma$  の他に、切片に相当するパラメータ  $\beta_0$  の推定量が必要になる。切片項にあたるパラメータの推定量を  $\hat{\beta}_0$  とし、得られた線形スコアリング  $\hat{\beta}_\sigma^T \mathbf{X}$  に対して、1 変量のロジスティック分布を仮定した最尤推定法によって切片項  $\beta_0$  と線形スコアリングの係数  $\alpha$  の最尤推定量を求める。このようにして得られるモデルを

$$\hat{p}_\sigma(\mathbf{X}) = \frac{1}{1 + \exp\{-\hat{\beta}_0 + \hat{\alpha}\hat{\beta}_\sigma^T \mathbf{X}\}} \quad (8)$$

とする。線形スコアリング  $\hat{\beta}_\sigma^T \mathbf{X}_i$  の  $\alpha(> 0)$  倍に各企業に等しく切片項  $\hat{\beta}_0$  を足すことになるが、これは明らかに線形スコアリングの単調変換であり、データのスコアリングの順位性は線形スコアリングと不変となる。よって、 $\overline{\text{AUC}}$  の値は変化しない。すなわち、

$$\overline{\text{AUC}}(\hat{\beta}_\sigma) = \frac{1}{n_D n_{ND}} \sum_{\substack{i \in D \\ j \in ND}} I(\hat{\beta}_\sigma^T (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j))$$

$$\overline{\text{AUC}}(\hat{p}_\sigma) = \frac{1}{n_D n_{ND}} \sum_{\substack{i \in D \\ j \in ND}} I(\hat{p}_\sigma(\mathbf{X}_i) - \hat{p}_\sigma(\mathbf{X}_j))$$

において、

$$\overline{\text{AUC}}(\hat{\beta}_\sigma) = \overline{\text{AUC}}(\hat{p}_\sigma(\mathbf{X}))$$

が成り立つ。これにより、 $\overline{\text{sAUC}}_\sigma(\beta)$  を最大化するモデル  $\hat{p}_\sigma(\mathbf{X})$  が作成される。

提案する新手法を用いてモデル  $\hat{p}_\sigma(\mathbf{X})$  を得るまでの流れをフローチャートとして示す (図 5 参照)。

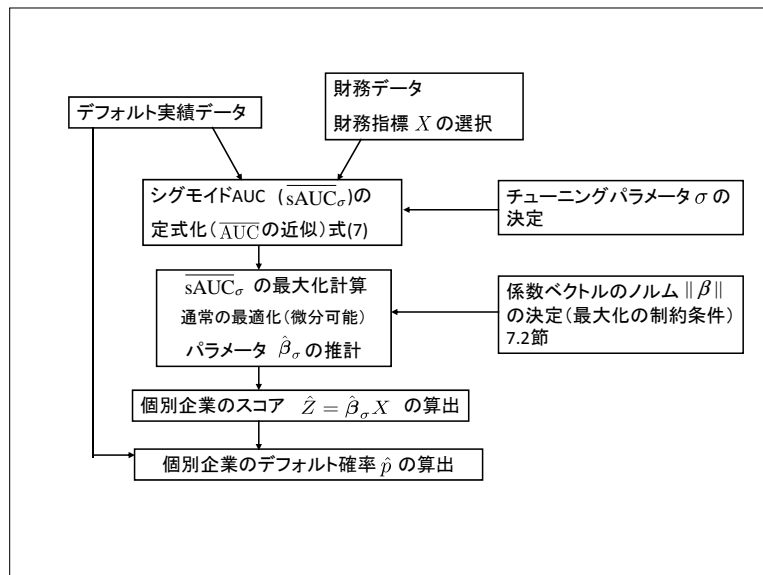


図 5: 提案する新手法におけるモデル作成までのフローチャート

## 4 実データの分析

この節では、実データを用いて提案する手法の有効性を検証する<sup>1</sup>。用いるデータは、1999~2003年までの期間における東証・大証・名証の一部・二部上場企業における企業である。財務指標の性質が他業種とは異なる金融業・建設業を除き、その他の業種で観測されたデフォルト企業25社を用いた。また、業種や企業規模を説明変量にせず、デフォルト企業と同業種、かつ、同程度の規模の非デフォルト企業を1:2の割合のなるように、50社を選び出し、合計75社のデータを用いた。本稿では、民事再生法、会社更生法、債務免除、私的整理、破産、自己破産をデフォルトと定義した。

説明変量は経営評価に用いられる指標の3つのカテゴリである、安全性、収益性、効率性の中から選んだ。ここでは、安全性として自己資本比率、収益率として売上高営業利益率、効率性として流動比率の3つを用いた。一般的に、AUCをより大きくする方法として、説明変量を入れ替える、企業の業種や企業規模を考慮するといったことが試みられているが、本項では所与の説明変量においてAUCを最大化することが目的であるため、ここでは説明変量はこの3つに固定する。パラメータの推定値として、 $\hat{\beta}_0$ :切片項、 $\hat{\beta}_1$ :自己資本比率、 $\hat{\beta}_2$ :売上高営業利益率、 $\hat{\beta}_3$ :流動比率の係数の推定値を求める。最尤推定量は切片項も含めて推定値が得られるが、 $\beta_0$ は $\overline{AUC}(\beta)$ の値に寄与しないため、 $\hat{\beta}_0$ を $\overline{AUC}(\beta)$ の最大化からは求められない。 $\hat{\beta}_0$ は、モデル $p_\sigma(\mathbf{X})$ を得るために3.2節で述べた求め方により計算している。また、以下で求めたデフォルト確率は、推計信用スコアが平均的企業のデフォルト確率が、データ観測期間の平均的なデフォルト確率と一致するよう調整して求めている<sup>2</sup>。

以下、4.1節では、実データに対してロジット・最尤推定法によるモデルと本稿で提案する手法によるモデルをROC曲線、AUCに関して比較する。また、結果の一部を表にする。4.2節では、企業のデフォルト・非デフォルトを表すラベルを張り替えることによって人為的に異常値を発生させたデータに対して同様の分析を行う。財務指標のデータにおいては、異常値の存在はめずらしいものではないが、実際のデータ解析においては異常値をデータから除去して解析が行われる。しかし、異常値とみなす基準は恣意的であることが多い。ロジット・最尤推定法は、仮定したモデルへのフィッティングによりパラメータの推定値が決まるので、スコアリングの順位にしかよらないAUCを目的関数とした最適化により得られるモデルは、異常値に対してロバストであると考えた。実データには異常値とみなせるデータがなかったため、ラベルを張り替えることにより人為的に異常値とみなせるデータを発生させた。

### 4.1 従来手法と新手法による $\overline{AUC}$ の比較

#### 4.1.1 ロジット・最尤推定法による分析

ロジット・最尤推定法によるモデルを求める。得られる $\hat{\beta}_M$ 、及びモデル $\hat{p}(\hat{\beta}_M)$ は、

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_M &= (-5.28, -0.781, -10.3, -1.39) \\ \hat{p}_M(\mathbf{X}) &= 1/\{1 + \exp(5.28 + 0.781X_1 + 10.3X_2 + 1.39X_3)\}\end{aligned}$$

得られる説明変量の係数はすべて負の値である。各説明変量の値が小さいほどデフォルトしやすいと考えられるので、この結果は直観と整合している。

このとき得られる $\overline{AUC}(\hat{\beta}_M)$ は、

$$\overline{AUC}(\hat{\beta}_M) = 0.790$$

<sup>1</sup>今回の実データによる分析は、データサンプリングの方法やデフォルトの定義、観測期間の設定など、実務的な面から見れば不十分な分析であるが、本論文の目的は方法論の提案であるため、簡単な実証方法を選択した。

<sup>2</sup>今回用いたデータはデフォルト企業が全数データであるのに対して、非デフォルト企業は抽出したサンプルデータであるため、データベース内のデフォルト企業の比率が実際の比率より大きくなっている。そのため推計デフォルト確率の平均が、上場企業全体のデフォルト率である0.0023(1999年~2003年)と同じになるよう、バイアス調整を行っている。このような調整方法は、新BIS規制の内部格付モデルがまず各企業の格付を推計し、その後過去に過去の平均実績デフォルト確率を各格付に与える方法と、概念的には同じものである。

となる。この値から、モデルは判別力を有するといえる。図 6 に得られる ROC 曲線、及び  $\overline{\text{AUC}}(\hat{\beta}_M)$  を描く。

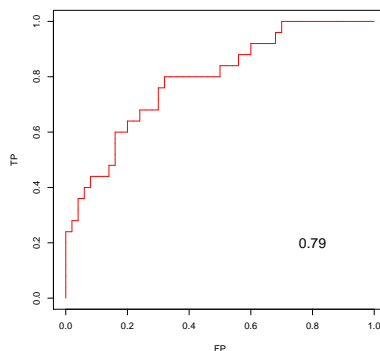


図 6: 従来のロジット・最尤推定法により得られる ROC 曲線、及び  $\overline{\text{AUC}}(\hat{\beta}_M)$  の値

FPR の値が 0~ 0.2 の範囲における TPR の値が小さいことが見てとれる。これは、スコアリングのわるい非デフォルト企業が多く存在していることが理由である。中央板紙 (株) や三興製紙 (株) などが挙げられる。表 1 に得られるモデルを用いた結果の一部を記す。

表 1: 実データに対して、従来のロジット・最尤推定法により得られるモデルを用いた結果の一部

順位	企業名	$\hat{p}$	ラベル	順位	企業名	$\hat{p}$	ラベル
1	(株) 日清製粉グループ本社	$3.46 \times 10^{-5}$	0	61	(株) 岩田屋	$2.76 \times 10^{-3}$	1
2	神戸発動機 (株)	$3.82 \times 10^{-4}$	0	62	ミサワ東洋 (株)	$2.88 \times 10^{-3}$	0
3	(株) 日立ハイテクノロジーズ	$6.06 \times 10^{-4}$	0	63	市田 (株)	$2.92 \times 10^{-3}$	1
4	日本車輛製造 (株)	$6.07 \times 10^{-4}$	0	64	(株) 近鉄百貨店	$3.08 \times 10^{-3}$	0
5	トヨタ紡織 (株)	$6.64 \times 10^{-4}$	0	65	(株) 長崎屋	$3.09 \times 10^{-3}$	1
6	東芝機械 (株)	$6.82 \times 10^{-4}$	0	66	大倉電気 (株)	$3.25 \times 10^{-3}$	1
7	ゼット (株)	$7.19 \times 10^{-4}$	0	67	三興製紙 (株)	$3.51 \times 10^{-3}$	0
8	中央電気工業 (株)	$7.76 \times 10^{-4}$	0	68	(株) テザック	$3.56 \times 10^{-3}$	1
9	日本電工 (株)	$7.97 \times 10^{-4}$	0	69	中央板紙 (株)	$3.78 \times 10^{-3}$	0
10	アキレス (株)	$8.47 \times 10^{-4}$	0	70	神戸生絲 (株)	$4.53 \times 10^{-3}$	1
11	(株) ニッキ	$9.65 \times 10^{-4}$	0	71	(株) カリーノ	$4.77 \times 10^{-3}$	1
12	ダイワ精工 (株)	$9.70 \times 10^{-4}$	0	72	イタリヤード (株)	$5.94 \times 10^{-3}$	1
13	丸大食品 (株)	$1.02 \times 10^{-3}$	0	73	段谷産業 (株)	$6.66 \times 10^{-3}$	1
14	三島製紙 (株)	$1.06 \times 10^{-3}$	0	74	第一家庭電器 (株)	$1.02 \times 10^{-2}$	1
15	日本紙パルプ商事 (株)	$1.09 \times 10^{-3}$	0	75	フットワークインターナショナル (株)	$1.02 \times 10^{-2}$	1

表 1 に見られるように、中央板紙 (株) や三興製紙 (株)、(株) 近鉄百貨店、ミサワ東洋 (株) などの多くの非デフォルト企業がデフォルト企業と同程度のデフォルト確率をとり、それによって  $\overline{\text{AUC}}(\hat{\beta}_M)$  の値が小さくなっていることがわかる。(株) 日清製粉グループ本社のデフォルト確率が非常に小さいこと、フットワークインターナショナル (株) や第一家庭電器 (株) が高いデフォルト確率を有していることが特徴として見られる。

#### 4.1.2 $\overline{\text{sAUC}}_\sigma(\beta)$ による分析

$\overline{\text{sAUC}}_\sigma(\beta)$  による分析結果を示す。得られる  $\hat{\beta}_\sigma$ 、及びモデル  $\hat{p}_\sigma(\mathbf{X})$  は、

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_\sigma &= (-0.356, -0.934, -0.0164) \\ \hat{p}_\sigma(\mathbf{X}) &= 1/\{1 + \exp(5.96 + 0.948X_1 + 2.49X_2 + 0.0437X_3)\}\end{aligned}$$

ロジット・最尤推定法のとときと同様、すべての係数が負である。

このとき得られる得られる  $\overline{AUC}(\hat{\beta}_\sigma)$  は、

$$\overline{AUC}(\hat{\beta}_\sigma) = 0.837$$

となり、 $\overline{AUC}(\hat{\beta}_M)$  よりも大きい値になる。図 7 に得られる ROC 曲線、及び  $\overline{AUC}(\hat{\beta}_\sigma)$  を描く。

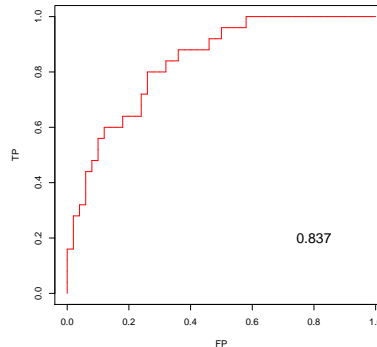


図 7: 提案する新手法により得られる ROC 曲線、及び  $\overline{AUC}(\hat{\beta}_\sigma)$  の値

ロジット・最尤推定法のモデルから得られた ROC 曲線よりも FPR の小さい範囲における TPR の値が大きい。これは、スコアリングがわるい企業中のデフォルト企業の割合が高いことが理由である。表 2 に得られたモデルによる結果の一部を記す。

表 2: 実データに対して、提案する新手法により得られるモデルを用いた結果の一部

順位	企業名	$\hat{p}$	ラベル	順位	企業名	$\hat{p}$	ラベル
1	(株) 日清製粉グループ本社	$6.24 \times 10^{-4}$	0	61	三興製紙 (株)	$2.35 \times 10^{-3}$	0
2	トヨタ紡織 (株)	$1.41 \times 10^{-3}$	0	62	(株) 長崎屋	$2.35 \times 10^{-3}$	1
3	日本電工 (株)	$1.49 \times 10^{-3}$	0	63	(株) 岩田屋	$2.37 \times 10^{-3}$	1
4	丸大食品 (株)	$1.50 \times 10^{-3}$	0	64	富士車輛 (株)	$2.40 \times 10^{-3}$	1
5	(株) マルエツ	$1.50 \times 10^{-3}$	0	65	(株) 西友	$2.41 \times 10^{-3}$	0
6	神戸発動機 (株)	$1.52 \times 10^{-3}$	0	66	(株) テザック	$2.42 \times 10^{-3}$	1
7	日本車輛製造 (株)	$1.53 \times 10^{-3}$	0	67	ミサワ東洋 (株)	$2.48 \times 10^{-3}$	0
8	三島製紙 (株)	$1.54 \times 10^{-3}$	0	68	大倉電気 (株)	$2.55 \times 10^{-3}$	1
9	(株) 杉村倉庫	$1.55 \times 10^{-3}$	0	69	(株) カリーノ	$2.71 \times 10^{-3}$	1
10	興和紡績 (株)	$1.55 \times 10^{-3}$	0	70	市田 (株)	$2.74 \times 10^{-3}$	1
11	(株) レナウン	$1.59 \times 10^{-3}$	0	71	中央板紙 (株)	$2.77 \times 10^{-3}$	0
12	(株) 日立ハイテクノロジーズ	$1.60 \times 10^{-3}$	0	72	段谷産業 (株)	$3.18 \times 10^{-3}$	1
13	アキレス (株)	$1.61 \times 10^{-3}$	0	73	神戸生絲 (株)	$3.36 \times 10^{-3}$	1
14	(株) ニッキ	$1.61 \times 10^{-3}$	0	74	第一家庭電器 (株)	$3.89 \times 10^{-3}$	1
15	中央電気工業 (株)	$1.63 \times 10^{-3}$	0	75	フットワークインターナショナル (株)	$1.61 \times 10^{-2}$	1

先のロジット・最尤推定法によるモデルと同様に非デフォルト企業が高いデフォルト確率を有していることがわかるが、デフォルト確率の上位下位ともに企業の順位に差がみてとれる。これにより  $\overline{AUC}$  に差が生じることになる。(株) 日清製粉グループ本社のデフォルト確率が非常に小さく、フットワークインターナショナル (株) のデフォルト確率が高くなっている。

次章では、データ中に異常値が存在するときの両手法の比較を行う。 $\overline{AUC}$  はデータのスコアリングの相対的な順位にしかよらないため、異常値が存在したとしてもそのデータが推定に与える影響は、仮定したモデルに対する当てはまりから得られる最尤推定法に比べて小さいのではないかと考えた。先の結果からも両手法における  $\overline{AUC}$  に大きな差が見られたが、異常値の存在するデータにおいてはより大きくなること予想される。次の節では異常値を発生させ、2つの手法から得られるモデルを比較する。

## 4.2 異常値が存在するときの両手法の比較

異常値が存在するときの、2つの手法によるモデルを比較する。先のロジット・最尤推定法により得られた  $\hat{\beta}_M$ 、 $\overline{sAUC}_\sigma(\beta)$  を用いた分析により得られた  $\hat{\beta}_\sigma$ 、それぞれのパラメータの推定値によってデフォルト確率を計算したときに、デフォルト企業の中で最もスコアリングのわるい企業は同一で、フットワークインターナショナル(株)であった(表1,2参照)。この企業よりもデフォルト確率のよい企業を順に調べたところ、デフォルト企業が続いた。最もスコアリングのわるいデフォルト企業(フットワークインターナショナル(株))のラベルを非デフォルト企業のラベルに張り替えることによって、異常値の存在するデータとした。デフォルト直前の企業の財務指標は信頼性の低いことがあり、異常値として存在することが見られ、このラベルの変更は特異なものではないと考えられる。

### 4.2.1 ロジット・最尤推定法による分析

ロジット・最尤推定法によるモデルを求める。得られる  $\hat{\beta}_M$ 、及びモデル  $\hat{p}(\hat{\beta}_M)$  は、

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_M &= (-5.22, -0.385, -10.8, -1.56) \\ \hat{p}_M(\mathbf{X}) &= 1/\{1 + \exp(5.22 + 0.385X_1 + 10.8X_2 + 1.56X_3)\}\end{aligned}$$

となり、4.1節で得られた  $\hat{\beta}_M$  の値と大きく異なっている。75社中、1社のラベルを張り替えることによって、これほど大きく得られるモデルが変わる従来の手法においては、異常値の有無が、得られるパラメータの推定値に大きく寄与することがわかる。このとき得られる  $\overline{AUC}(\hat{\beta}_M)$  は、

$$\overline{AUC}(\hat{\beta}_M) = 0.746$$

となり、ラベルを変更する前の94.4%の値となった。図8に、4.1.1節で得られたROC曲線及び  $\overline{AUC}(\hat{\beta}_M)$  と、ラベルを変更することにより得られる、異常値の存在するデータに対するROC曲線及び  $\overline{AUC}(\hat{\beta}_M)$  を並べて記す。

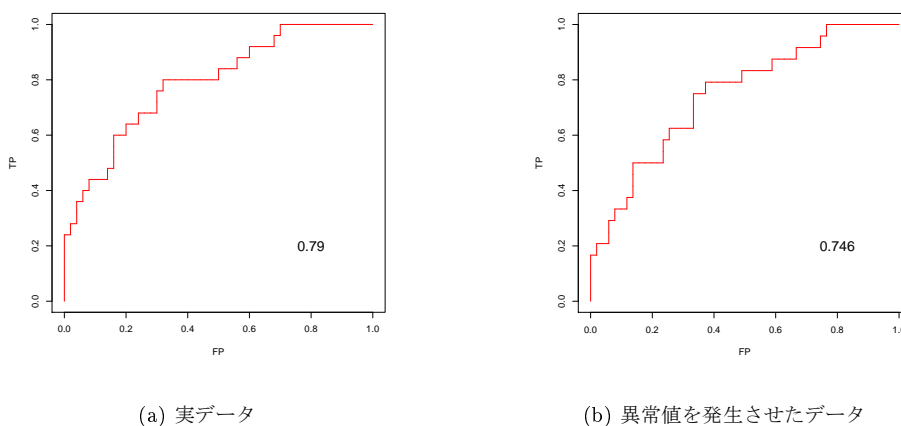


図8: ロジット・最尤推定法によるモデルから得られるROC曲線、及び  $\overline{AUC}(\hat{\beta}_M)$  の値

2つの図を見比べると、形状が大きく異なっていることがわかる。異常値によってパラメータの推定値が変化し、得られるROC曲線の形状も大きく変化する。75社中、1社のラベルを張り替えただけであるが、ロジット・最尤推定法においては、異常値の有無が大きく影響することがわかる。異常値の存在によって得られるモデルの結果が大きくことなることは結果の一部を記した表からも確認できる。表中の前回順位とは、4.1.1節において異常値を発生させる以前のロジット・最尤推定法により得られた結果の企業順位を意味する。順位の変動が見られた企業のそれは太字で示した。

表 3: 異常値を発生させたデータに対して、ロジット・最尤推定法により得られるモデルを用いた結果の一部

順位	前回順位	企業名	$\hat{p}$	ラベル	順位	前回順位	企業名	$\hat{p}$	ラベル
1	1	(株)日清製粉グループ本社	$3.57 \times 10^{-5}$	0	61	63	市田 (株)	$2.81 \times 10^{-3}$	1
2	2	神戸発動機 (株)	$3.51 \times 10^{-4}$	0	62	62	ミサワ東洋 (株)	$2.87 \times 10^{-3}$	0
3	3	(株)日立ハイテクノロジーズ	$6.15 \times 10^{-4}$	0	63	60	(株)丸栄	$3.06 \times 10^{-3}$	0
4	4	日本車輛製造 (株)	$6.27 \times 10^{-4}$	0	64	65	(株)長崎屋	$3.18 \times 10^{-3}$	1
5	6	東芝機械 (株)	$6.77 \times 10^{-4}$	0	65	64	(株)近鉄百貨店	$3.21 \times 10^{-3}$	0
6	5	トヨタ紡織 (株)	$7.16 \times 10^{-4}$	0	66	66	大倉電気 (株)	$3.37 \times 10^{-3}$	1
7	7	ゼット (株)	$7.22 \times 10^{-4}$	0	67	68	(株)テザック	$3.68 \times 10^{-3}$	1
8	8	中央電気工業 (株)	$8.00 \times 10^{-4}$	0	68	67	三興製紙 (株)	$3.70 \times 10^{-3}$	0
9	9	日本電工 (株)	$8.63 \times 10^{-4}$	0	69	69	中央板紙 (株)	$3.86 \times 10^{-3}$	0
10	10	アキレス (株)	$8.95 \times 10^{-4}$	0	70	70	神戸生絲 (株)	$4.11 \times 10^{-3}$	1
11	12	ダイワ精工 (株)	$9.41 \times 10^{-4}$	0	71	75	フットワークインターナショナル (株)	$4.32 \times 10^{-3}$	0*
12	11	(株)ニッキ	$1.02 \times 10^{-3}$	0	72	71	(株)カリーノ	$4.91 \times 10^{-3}$	1
13	16	京神倉庫 (株)	$1.07 \times 10^{-3}$	1	73	73	段谷産業 (株)	$6.67 \times 10^{-3}$	1
14	15	日本紙パルプ商事 (株)	$1.09 \times 10^{-3}$	0	74	72	イタリヤード (株)	$7.20 \times 10^{-3}$	1
15	18	(株)池貝	$1.14 \times 10^{-3}$	1	75	74	第一家庭電器 (株)	$9.76 \times 10^{-3}$	1

\* はラベルを張り替えたデータ

異常値の存在しないときと比べ、得られるパラメータの推定値に変化があったため、企業順位にも大きな差が見られる。ラベルを張り替える以前はデフォルト確率の最も高かったフットワークインターナショナル (株) の順位が変わるといった結果を得た。

#### 4.2.2 $\overline{\text{sAUC}}_{\sigma}(\beta)$ による分析

続いて、異常値の存在するデータにおいて、 $\overline{\text{sAUC}}_{\sigma}(\beta)$  による分析結果を示す。得られる  $\hat{\beta}_{\sigma}$ 、及びモデル  $\hat{p}_{\sigma}(\mathbf{X})$  は、

$$\hat{\beta}_{\sigma} = (-0.356, -0.934, -0.0164)$$

$$\hat{p}_{\sigma}(\mathbf{X}) = 1 / \{1 + \exp(5.97 + 0.730X_1 + 1.91X_2 + 0.0336X_3)\}$$

となり、4.2 節で得られた  $\hat{\beta}_{\sigma}$  とほぼ同じ値であった。これにより、本項で提案する手法は、異常値に対して安定したパラメータの推定値を得られることがわかり、異常値に対してロバストな手法であるといえる。このとき得られる得られる  $\overline{\text{AUC}}(\hat{\beta}_{\sigma})$  は、

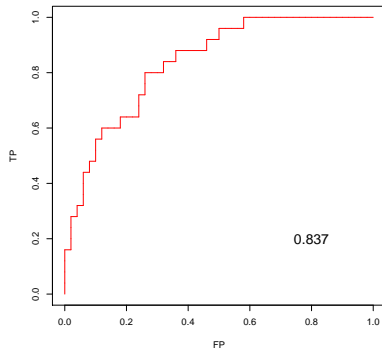
$$\overline{\text{AUC}}(\hat{\beta}_{\sigma}) = 0.814$$

となり、ラベルを変更する前の 97.3% の値となった。従来の手法において異常値が存在するとしたときよりも減少する割合が低いという結果が得られた。図 9 に、4.1.2 節で得られた ROC 曲線及び  $\overline{\text{AUC}}(\hat{\beta}_{\sigma})$  とラベルを変更することにより得られる、異常値の存在するデータにおける ROC 曲線及び  $\overline{\text{AUC}}(\hat{\beta}_{\sigma})$  を並べて記す。

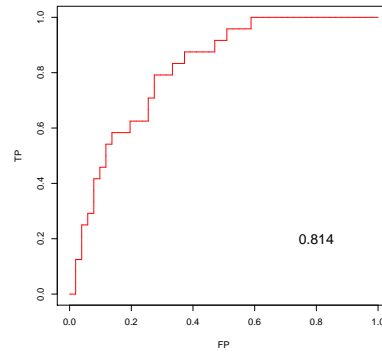
得られる  $\hat{\beta}_{\sigma}$  の推定値がほとんど変化しないため、得られる ROC 曲線の形状も変化しない。右図の異常値の存在するデータにおいて、FPR の値が 0 のとき、TPR の値が 0 となっていることが唯一の違いであり、これによって  $\overline{\text{AUC}}$  の値が減少することになる。これは、ラベルを張り替えたスコアリングのわるい企業 (フットワークインターナショナル (株)) が、非デフォルトを表すラベルを有していることが理由である。表 4 に得られるモデルによる結果の一部を記すが、異常値の存在しないときとほぼ同じである (表 4 を参照)。

得られる  $\hat{\beta}_{\sigma}$  に変化がないため、企業順位にも変化は見られない。異常値の存在するデータにおいても、異常値に大きく依存することなく  $\overline{\text{AUC}}(\beta)$  を最大化する企業順位を正しく得られることがわかる。

異常値の存在が与える影響について、次章ではシミュレーションデータを用いて、正規分布から発生させた異常値の含まれないデータと  $t$  分布から発生させた異常値の含まれるデータにおける 2 つの手法のモデルを比較する。



(a) 実データ



(b) 異常値を発生させたデータ

図 9: 提案する新手法によるモデルから得られる ROC 曲線、及び  $\overline{\text{AUC}}(\hat{\beta}_M)$  の値

表 4: 異常値を発生させたデータに対して、提案する新手法により得られるモデルを用いた結果の一部

順位	前回順位	企業名	$\hat{p}$	ラベル
1	1	(株)日清製粉グループ本社	$8.54 \times 10^{-4}$	0
2	2	トヨタ紡織 (株)	$1.60 \times 10^{-3}$	0
3	3	日本電工 (株)	$1.67 \times 10^{-3}$	0
4	4	丸大食品 (株)	$1.68 \times 10^{-3}$	0
5	5	(株) マルエツ	$1.68 \times 10^{-3}$	0
6	6	神戸発動機 (株)	$1.69 \times 10^{-3}$	0
7	7	日本車輛製造 (株)	$1.70 \times 10^{-3}$	0
8	8	三島製紙 (株)	$1.71 \times 10^{-3}$	0
9	9	(株) 杉村倉庫	$1.72 \times 10^{-3}$	0
10	10	興和紡績 (株)	$1.72 \times 10^{-3}$	0
11	11	(株) レナウン	$1.76 \times 10^{-3}$	0
12	12	(株) 日立ハイテクノロジーズ	$1.76 \times 10^{-3}$	0
13	13	アキレス (株)	$1.77 \times 10^{-3}$	0
14	14	(株) ニッキ	$1.78 \times 10^{-3}$	0
15	15	中央電気工業 (株)	$1.79 \times 10^{-3}$	0
61	61	三興製紙 (株)	$2.37 \times 10^{-3}$	0
62	62	(株) 長崎屋	$2.38 \times 10^{-3}$	1
63	63	(株) 岩田屋	$2.39 \times 10^{-3}$	1
64	64	富士車輛 (株)	$2.41 \times 10^{-3}$	1
65	65	(株) 西友	$2.42 \times 10^{-3}$	0
66	66	(株) テザック	$2.43 \times 10^{-3}$	1
67	67	ミサワ東洋 (株)	$2.47 \times 10^{-3}$	0
68	68	大倉電気 (株)	$2.52 \times 10^{-3}$	1
69	69	(株) カリーノ	$2.64 \times 10^{-3}$	1
70	70	市田 (株)	$2.67 \times 10^{-3}$	1
71	71	中央板紙 (株)	$2.70 \times 10^{-3}$	0
72	72	段谷産業 (株)	$3.00 \times 10^{-3}$	1
73	73	神戸生絲 (株)	$3.13 \times 10^{-3}$	1
74	74	第一家庭電器 (株)	$3.50 \times 10^{-3}$	1
75	75	フットワークインターナショナル (株)	$1.04 \times 10^{-2}$	0*

\* はラベルを張り替えたデータ



## 5 シミュレーションデータの分析

この節では、シミュレーションデータを用いて、ロジット・最尤推定法による手法と提案する手法を比較する。実データにおいて、異常値の存在するときには、2つの手法による  $\overline{AUC}$  の差が大きくなることを検証する。

まず、説明変量(財務指標)が正規分布に従うという仮定のもとでシミュレーションデータを発生させ、2つの手法から得られるモデルの比較を行う。この仮定のもとでは、フィッシャーの線形判別関数が AUC を最大にすることや理論的な AUC の最大値も存在することが示されている (Su and Liu, 1993)。次に、正規分布よりも異常値が発生しやすい t 分布からデータを発生させ、同様の分析を行う。

### 5.1 説明変量(財務指標)が正規分布に従うとき

ここでは、各説明変量が正規分布から発生しているという仮定のもとでのシミュレーションを行う。ここでは、3つの説明変量があるものとして考えていく。Su and Liu(1993)において、各説明変量が正規分布に従うとき、理論的に AUC を最大化する線形スコアリング  $\beta_{\text{opt}}$ 、そのときの AUC の理論的な最大値を  $AUC_{\text{opt}}$  として、以下のように示されている。

$$\begin{aligned}\beta_{\text{opt}} &\propto (\Sigma_{\text{ND}} + \Sigma_{\text{D}})^{-1} \boldsymbol{\mu} \\ AUC_{\text{opt}} &= \Phi(\sqrt{\boldsymbol{\mu}^T (\Sigma_{\text{ND}} + \Sigma_{\text{D}})^{-1} \boldsymbol{\mu}}) \\ \text{ここに、 } \boldsymbol{\mu} &= \boldsymbol{\mu}_{\text{ND}} - \boldsymbol{\mu}_{\text{D}}\end{aligned}$$

$\Phi(\cdot)$  は標準正規分布の累積分布関数を表す。

$\beta_{\text{opt}}$  が比例の関係で与えられているのは、線形スコアリングを正の比例倍しても得られる AUC の値は不変だからである。

デフォルト企業 (D)、非デフォルト (ND) 企業は以下のような平均  $\boldsymbol{\mu}$ 、共分散  $\Sigma$  をもつと仮定する。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_{\text{D}} &= (1, 2, 3) \quad , \quad \boldsymbol{\mu}_{\text{ND}} = (1/2, 3/2, 5/2) \\ \Sigma_{\text{D}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \Sigma_{\text{ND}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

このとき、

$$\begin{aligned}\beta_{\text{opt}} &\propto (-1, -1, -1) \\ AUC_{\text{opt}} &= \Phi(\sqrt{3/8}) = 0.729\end{aligned}$$

となる。

デフォルト企業が 50 社、非デフォルト企業が 300 社あるものとした (すなわち、 $n_{\text{D}} = 50, n_{\text{ND}} = 300, n = 350$ )。このとき、上のような仮定で発生させたシミュレーションデータに関して分析を行った。

### 5.1.1 ロジット・最尤推定法による分析

2章で述べた、現在多く用いられている、一般化線形モデル (ロジット・モデル) における最尤推定量によるモデルを求める。このとき、得られた  $\hat{\beta}_M$  は、

$$\hat{\beta}_M = (0.508, -0.561, -0.489, -0.370)$$

また、この  $\hat{\beta}_M$  による  $\overline{\text{AUC}}$  の値は、

$$\overline{\text{AUC}}(\hat{\beta}_M) = 0.721$$

となる。図 10 に、得られた ROC 曲線及び  $\overline{\text{AUC}}(\hat{\beta}_M)$  の図を描く。

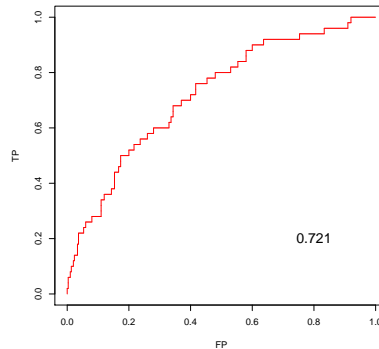


図 10:  $\overline{\text{AUC}}(\hat{\beta}_M)$

理論的な最適値  $\text{AUC}_{\text{opt}}$  と同程度の  $\overline{\text{AUC}}(\hat{\beta}_M)$  の値を実現し、十分な判別力を有すると判断できる。

### 5.1.2 $\overline{\text{sAUC}}_\sigma(\beta)$ による分析

3章で述べた、 $\overline{\text{sAUC}}_\sigma(\beta)$  を最大化する分析によるモデルを求める。このとき得られた  $\hat{\beta}_\sigma$  は、

$$\hat{\beta}_\sigma = (-0.585, -0.622, -0.520)$$

また、この  $\hat{\beta}_\sigma$  による  $\overline{\text{AUC}}(\hat{\beta}_\sigma)$  の値は、

$$\overline{\text{AUC}}(\hat{\beta}_\sigma) = 0.723$$

となる。図 11 に得られた ROC 曲線及び  $\overline{\text{AUC}}(\hat{\beta}_\sigma)$  の図を描く。

一般化線形モデルと同様に、この分析方法においても、理論的な最大値  $\text{AUC}_{\text{opt}}$  と同程度の  $\overline{\text{AUC}}$  の値を実現する。

以上からわかるように、各説明変量が正規分布に従うという仮定のもとでは、ロジット・最尤推定法によるモデルと、 $\overline{\text{sAUC}}_\sigma(\beta)$  を最大化するモデルにおいては、 $\overline{\text{AUC}}(\beta)$  の値の差はほとんどみられない。

## 5.2 説明変量 (財務指標) が t 分布に従うとき

正規分布に従うという仮定が、t 分布に従うという仮定に変更する以外はすべて同条件で、上と同じくロジット・最尤推定法によるモデルと  $\overline{\text{sAUC}}_\sigma(\beta)$  によるモデルを比較する。

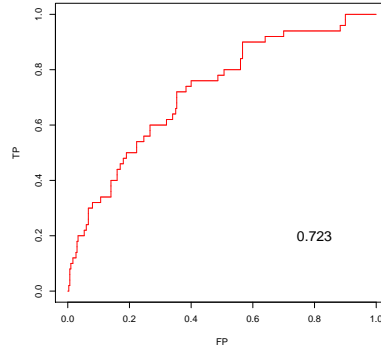


図 11:  $\overline{\text{AUC}}(\hat{\beta}_\sigma)$

データを発生させる分布は、各説明変量が自由度 1 の多変量  $t$  分布 (多変量コーシー分布) から発生させた。多変量  $t$  分布の密度関数は、平均ベクトルを  $\mu$ 、scale matrix を  $S$  とすると、

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(\frac{m+\nu}{2})\sqrt{|S|}}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{2\pi m}} \left[ 1 + \frac{1}{\nu}(\mathbf{x} - \mu)^T S (\mathbf{x} - \mu) \right]^{-(m+\nu)/2}$$

となる。発生させたデータは、多変量  $t$  分布において、デフォルト、非デフォルト企業群の平均は先の正規分布のときと同様にし、各成分は独立であるものとした。

### 5.2.1 ロジット・最尤推定法による分析

ロジット・最尤推定法によるモデルを求める。得られた  $\hat{\beta}_M$  は、

$$\hat{\beta}_M = (1.79, -0.00470, -0.000336, 0.0132)$$

この  $\hat{\beta}_M$  による  $\overline{\text{AUC}}(\beta)$  の値は、

$$\overline{\text{AUC}}(\hat{\beta}_M) = 0.531$$

となる。値が 0.5 に近く、得られたモデルは判別力を有していない。図 12 に、得られた ROC 曲線及び  $\overline{\text{AUC}}(\hat{\beta}_M)$  の図を描く。

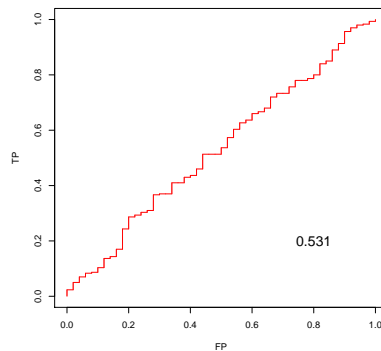


図 12:  $\overline{\text{AUC}}(\hat{\beta}_M)$

得られる ROC 曲線は、(0,0) と (1,1) を結ぶような直線となっており、得られたモデルは判別力を有していない。 $\hat{\beta}_M$  の値は、同一の分布から発生させたにも関わらず、推定値の正負が異なる。これは、発生した異常値に最尤推定値が大きく依存するためである。

### 5.2.2 $\overline{sAUC}_\sigma$ による分析

次に、3章で述べた、 $\overline{sAUC}_\sigma(\beta)$  を最大化する分析によるモデルを求める。得られた  $\hat{\beta}_\sigma$  は、

$$\hat{\beta}_\sigma = (0.537, 0.618, 0.574)$$

また、この  $\hat{\beta}_\sigma$  による  $\overline{AUC}(\beta)$  の値は、

$$\overline{AUC}(\hat{\beta}_\sigma) = 0.646$$

となる。図 13 に、得られた ROC 曲線及び  $\overline{AUC}(\hat{\beta}_\sigma)$  の図を描く。

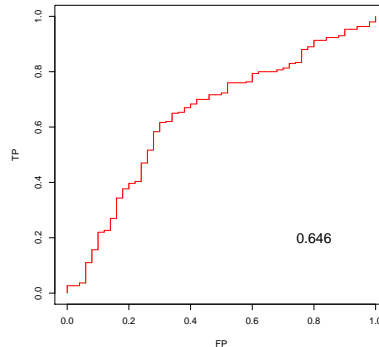


図 13:  $\overline{AUC}(\hat{\beta}_\sigma)$

得られる  $\hat{\beta}_\sigma$  の正負は  $\hat{\beta}_M$  のそれとは異なる。正規分布によるシミュレーションデータでは2つの推定量による  $\overline{AUC}$  の値には差がほとんどみられなかったが、異常値の多く存在する t 分布によるシミュレーションデータでは大きな差がみられた。これは、異常値に対して、最尤推定量は敏感に変化し、推定が不安定になってしまうのに対し、 $\overline{AUC}$  は各企業のスコアリングの順位にしかよらないので、 $\overline{AUC}$  を目的関数として用いる推定方法は異常値に対して安定しているからである。

また、本稿で提案する手法により作成されるモデルは、テストデータに対しても  $\overline{AUC}$  の値が大きくなるのがシミュレーションデータを用いて確認されている。

## 6 結論、及び、ディスカッション

信用リスクスコアリングの分野において、AUC 及び AR 値をより大きくするようなモデルを得るための試みは以前から存在する。例として、説明変数を入れ替える、データ中の異常値を除去する、などの方法がとられており、手法そのものはロジット・最尤推定法などの既存の手法を用いることが多くみられた。本稿では、ロジット・最尤推定法などによって作成されたモデルの妥当性を評価するための指標として用いられてきた AUC を、モデルを作成するための目的関数として用いることによって、信用リスクスコアリングのモデルの作成手法としては従来とは全く違う手法を提案した。4章、5章の考察から、実データ、シミュレーションデータにおいて、従来の手法よりも大きい AUC の値が得られるモデルの作成手法が有効であることが示された。

4章の実データの分析において、従来の手法と本稿で提案する手法によるモデルにおいて、AUC に大きな差が見られた。また、そのデータ中の一つの企業のラベルを張り替えることによって得られる、異常値の存在するデータにおいては、AUC の差は非常に大きくなった。これは、ロジスティック分布を仮定し最尤推定法によるモデルよりも、モデルを仮定せず、スコアリングの順位にしかよらない AUC を用いて作成されたモデルは、異常値に対してロバストであることが理由である。異常値を含むデータを用いた 5章で得られた結果は、新手法が従来の手法よりも異常値に対してロバストであることが検証された。このような

結果は、異常値を含む中小企業の財務データをベースとした分析に対して、きわめて有効な分析手法であるといえる。

## 7 補遺

### 7.1 AR 値と $\overline{\text{AUC}}$ の正比例関係

信用リスクスコアリングの分野においては AUC よりも AR (Accuracy Ratio) の方が判別力を示す指標として知名度が高いと思われるので、AR と AUC の関係について述べる。この 2 つは本質的には同じ性質をもっている指標である。これは、ROC 曲線と CAP (Cumulative Accuracy Profiles) 曲線が対応していることから得られる。具体的に、AUC と AR の間には、以下の等式が成り立つ。証明等、より詳細に関しては、山下・川口・敦賀 (2003)、及び、Engelmann, B. and Rauhmeier R. (2006) を参照のこと。

$$\text{AR} = 2\overline{\text{AUC}} - 1$$

この等式により、AUC 最大化は AR 最大化と同値であることが示される。

### 7.2 具体的な $\hat{\beta}_\sigma$ の求め方

$\hat{\beta}_\sigma$  は (7) のように、 $\overline{\text{sAUC}}_\sigma(\beta)$  を最大化することにより得られるが、ここでは、具体的な求め方について述べる。

先にも述べたとおり、 $\overline{\text{AUC}}(\beta)$  の値は、線形スコアリングの順位性を変化させない  $\beta$  の正の定数倍に関して不変である。すなわち、任意の  $a (> 0)$  に対して、以下の等式が成立する。

$$\overline{\text{AUC}}(a\beta) = \overline{\text{AUC}}(\beta) \quad (9)$$

これは、任意の  $a (> 0)$  に対し、ヘビサイド関数  $I$  が以下のような性質をもつことが理由である。

$$I(ax) = I(x)$$

したがって、(5) で定義される、 $\overline{\text{AUC}}(\beta)$  を最大化するようなパラメータ  $\hat{\beta}_A$  は、説明変量の次数  $m$  よりも自由度が 1 つ多いことになる。

ここで、 $\overline{\text{AUC}}(\beta)$  を近似した  $\overline{\text{sAUC}}_\sigma(\beta)$  について考えると、やや状況が異なる。ヘビサイド関数  $I$  をシグモイド関数で近似したことにより、差異が生じるからである。これは、先に述べたシグモイド関数の性質による、経験則と同じ理由である。すなわち、シグモイド関数  $s_\sigma(\beta^T(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)) = 1/(1 + \exp(-\beta^T(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)/\sigma))$  ( $i \in \mathcal{D}, j \in \mathcal{ND}$ ) において、 $|\beta^T(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)/\sigma|$  ( $i \in \mathcal{D}, j \in \mathcal{ND}$ ) の値が小さいとき、ヘビサイド関数に対する近似がよくないことが理由である。具体的に、2 変量データにおいて、ある固定した  $\beta_f = (\beta_1, \beta_2)$  と  $\sigma$  において、 $\overline{\text{sAUC}}_\sigma(a\beta_f)$  を  $a (> 0)$  の値を変化させると、図 14 を得る。

この  $\beta_f$  において、近似を用いない  $\overline{\text{AUC}}$  の値は  $\overline{\text{AUC}}(\beta_f) = 0.640$  であり (図 15 において点線で示している)、 $a$  の値が大きくなると経験則を満たすようになり、 $\overline{\text{sAUC}}_\sigma(a\beta)$  の値はほぼ一定値となる。すなわち、経験則を満たす  $\sigma, \beta$  においては、 $a > 1$  としたとき、 $\overline{\text{sAUC}}_\sigma(\beta)$  と  $\overline{\text{sAUC}}_\sigma(a\beta)$  の値にほとんど差がないため、得られる  $\hat{\beta}_\sigma$  には自由度が一つ多いことになる。したがって、 $\overline{\text{sAUC}}_\sigma(\beta)$  を目的関数として、制約条件を付けずにパラメータ  $\hat{\beta}_\sigma$  を求めようとすると不安定性が生じる。

この問題を解決する方法として、Ma and Huang (2005.b) では、アンカーパラメータという考え方をしている。これは、 $\beta$  のひとつをアンカーパラメータとして採用し、絶対値が 1 と固定することにより、 $\overline{\text{sAUC}}_\sigma(\beta)$  を最大化するようなパラメータ  $\beta$  を求める方法である。本稿では、パラメータのノルム  $\|\beta_\sigma\|$  を

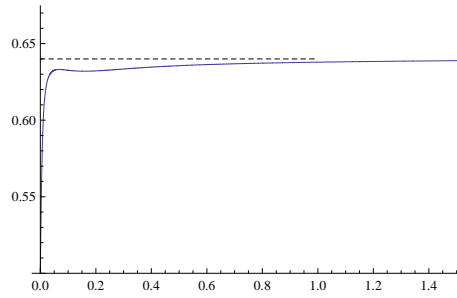


図 14: x 軸 :  $a$ , y 軸 :  $\overline{sAUC}_\sigma(a\beta_t)$

ある値で固定することにより、この問題を解決することを考えた。まず、アンカーパラメータを用いる方法と本稿で用いた方法について、図 3,4 で図示したものと同じデータで 2 変量の状況において考える。

アンカーパラメータを用いる方法は、パラメータ  $\beta$  のひとつの絶対値を 1 に固定し (ここでは、一つ目のパラメータ  $\beta_1$  の絶対値が 1 であるとする (すなわち、 $|\beta_1| = 1$ )。そのうえで  $\overline{sAUC}_\sigma(\beta)$  を最大化することであるから、図においては  $\beta_1 = 1$  または、 $\beta_1 = -1$  の直線上において  $\overline{sAUC}_\sigma(\beta)$  を最大化することを意味する。本稿で用いる、 $\|\beta_\sigma\|$  を固定する方法は、原点を中心にしたある大きさの半径をもつ円上において、 $\overline{sAUC}_\sigma(\beta)$  を最大化することを意味する。

(9) 式、また、図 3 からわかるように、 $\overline{AUC}(\beta)$  は、原点から放射線状に同じ値をもつ平面が広がる。原点を中心とした円上で  $\overline{AUC}(\beta)$  が最大となる点を求められれば、全域においても  $\overline{AUC}(\beta)$  が最大値となるパラメータ  $\hat{\beta}_A$  を求められることになる。また、 $\overline{AUC}(\beta)$  を近似した  $\overline{sAUC}_\sigma(\beta)$  においては、条件として用いる円の半径が、ある程度の大きさをもつとき、半径の大きさを変えても最大となる  $\overline{sAUC}_\sigma(\beta)$  の値はほとんど変化しない。これを、先の図 3,4 で示したデータと同様に 2 変量のときで図示する。 $\sigma = 0.01$  と固定したもとの、 $\|\beta_\sigma\|$  の大きさを変えたとき、 $\overline{AUC}(\beta)$  と  $\overline{sAUC}_\sigma(\beta)$  はどのような挙動を示すのかをみる。このとき、極座標を用いたので、2 パラメータ  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  を、極座標表現における 2 パラメータ  $(r, \theta)$  で置き換えた。すなわち、 $\beta_1 = r \cos \theta, \beta_2 = r \sin \theta$  とした。図 15~ 17 では、横軸に  $\theta(-\pi, \pi)$  を、縦軸に  $\overline{AUC}(\beta(\theta))$  と  $\overline{sAUC}_\sigma(\beta(\theta))$  を重ね書きした。図 15~ 17 のすべての図に共通して描かれているのが、 $\overline{AUC}(\beta(\theta))$  である。 $\|\beta_\sigma\| = r$  の値は、上から順に 0.05, 0.1, 1 である。

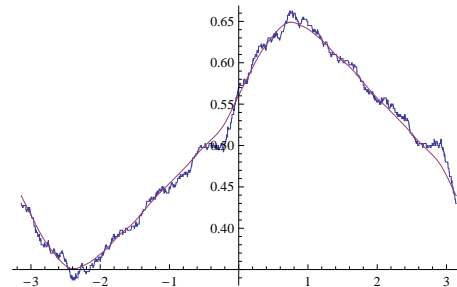


図 15: 近似を用いない  $\overline{AUC}(\beta(\theta))$  とその近似である  $\overline{sAUC}_\sigma(\beta(\theta))$  を重ね書きした図。ただし、 $\|\beta_\sigma\| = 0.05$

これらの図から、 $\sigma$  の値を固定したとき、 $\|\beta_\sigma\|$  を大きくするにつれて、 $\overline{AUC}(\beta)$  に対する  $\overline{sAUC}_\sigma(\beta)$  の近似がよくなる様子がみてとれる。したがって、 $\sigma$  を固定し、そのもとの、ある程度大きな円上において  $\overline{sAUC}_\sigma(\beta)$  の最大値を考えることにより、全域における最大値を求められることを意味する。すなわち、 $\|\beta_\sigma\|$  の大きさを制約条件にすることによって得られる  $\hat{\beta}_\sigma$  を求めればよい。

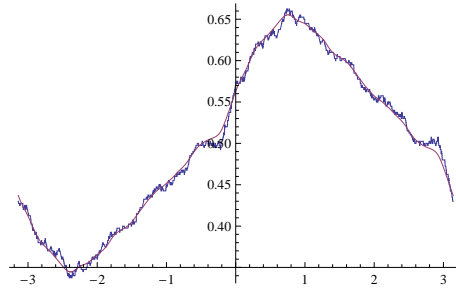


图 16:  $\|\beta_\sigma\| = 0.1$

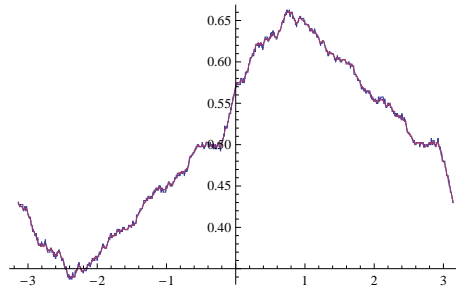


图 17:  $\|\beta_\sigma\| = 1$

## 参考文献

- [1] Bamber, D. (1975) The area above the ordinal dominance graph and the area below the receiver operating characteristic graph. *Journal of Mathematical Psychology*. Nov Vol.12(3) 387-415.
- [2] Basel Committee on Banking Supervision (2005) Studies on the Validation of Internal Rating Systems - Revised version, Working Paper No.14, May.
- [3] Engelmann B. , Hayden E., and Tasche D.(2003) Testing rating accuracy. *Credit risk*. Jan Vol.3 82-86.
- [4] Engelmann, B. and Rauheimer R. (2006) *The Bael II Risk Parameters: Estimation, Validation, and Stress Testing*. Heidelberg:Springer.
- [5] Gammerman, A.(1996) *Computational Learning and Probabilistic Reasoning*. Wiley, New York.
- [6] A.K. Han(1987) Non-parametric analysis of a generalized regression model. *Journal of Econometrics*. Vol.35 303-316.
- [7] Hanley J.A. and McNeil B.J. (1982) The meaning and use of the area under a receiver operating characteristics (ROC) curve *Diagnostic Radiology* Vol.143 No.1 29-36.
- [8] Ma,S and Huang,J(2005.a) Regularized ROC Estimation: With Applications to Disease Classification Using Microarray Data. *The University of Iowa Department of Statistics and Actuarial Science*

- [9] Ma,S and Huang,J(2005.b) Regularized ROC method for disease classification and biomarker selection with microarray data. *Bioinformatics*, Vol.21,4356-4362.
- [10] Martin, D. (1979) Early warning of bank failure : A logit refression approach. *Journal of Banking and Finance*. Nov Vol.1 249-276.
- [11] Sherman R. The Limiting Distribution of the Maximum Rank Correlation Estimator.*Econometrica* Vol.61, No.1 123-137.
- [12] Su, J.Q. and Liu, J.S. (1993) Linear Combinations of Multiple Diagnostic Markers. *Journal of the American Statistical Association*. Dec Vol 88 No.424 1350-1355.
- [13] 木島正明、小守林克哉 (1999) 信用リスク評価の数理モデル. 朝倉書店.
- [14] 山下智志、川口昇、敦賀智裕 (2003) 信用リスクモデルの評価方法に関する考察と比較 金融庁金融研修センター・ディスカッションペーパー, 2003.