

確率ボラティリティ・モデルの下での 平均オプションのプライシングについて*

白谷 健一郎^{† ‡} 高橋 明彦[§] 戸田真史[¶]

平成 21 年 1 月 23 日

概要

本論文は、商品市場では標準的となっている平均オプション (Average Option) の価格評価に関し、2つの確率ボラティリティ・モデル、Heston モデルと λ -SABR モデルの下で漸近展開を用いた近似評価式を導出し、数値例によりその精度を検証する。

1 はじめに

コモディティの OTC 取引では一般に平均オプションが用いられているが、Black-Scholes モデルに基づくもの以外には平均オプション価格の解析的導出法は近似解を含めてあまり知られていない。NYMEX に上場されている WTI 先物オプション市場は、上場されている商品先物オプションの中でとりわけ高い流動性を有する市場であり、その価格の信頼性は他の先物オプションに比べ高い。しかし様々な行使価格や満期の市場価格を一つのパラメータ・セットに基づく Black-Scholes モデルにより再現することは極めて困難であり、従って Black-Scholes モデルに基づく平均オプションのプライシングは望ましいとは言えない。本稿では上場オプション価格を再現するために確率ボラティリティ・モデルを用い、それに基づく平均オプション価格を計算する手法として漸近展開による近似を考える。漸近展開法の平均オプション価格評価への適用例は [15], [9], [10] などにあるが、具体的な確率ボラティリティ・モデルの下での 3 次迄の近似式の導出と、これに基づく数値計算及びその精度検証は、筆者の知る限り本稿が初めてと思われる。

市場オプション価格を再現するためのモデルには、確率ボラティリティ・モデルとしては、Heston モデル [4], SABR モデル [3], λ -SABR モデル [6] 等があり、局所ボラティリ

*本論文の初稿の改訂にあたり、金融研究研修センター長の吉野直行教授および査読者から有益なコメントを頂きましたので、ここに謝意を表します。

[†]みずほ第一フィナンシャルテクノロジー株式会社

[‡]論文の中で示された内容は全て執筆者の個人的見解であり、みずほ第一フィナンシャルテクノロジー株式会社の公式見解を示すものではありません。

[§]東京大学大学院経済学研究科

[¶]東京大学大学院経済学研究科

ティ・モデル (local volatility model) としては, CEV モデルや shifted log-normal モデル等がある. しかし, WTI のインプライド・ボラティリティはその期間構造の傾きが急であるため, SABR モデルや局所ボラティリティ・モデルだけでは全期間にわたる価格の再現は困難である. また市場オプション価格から局所ボラティリティ・モデルを導出する [2] の方法においては, 清算値の発表されている限月・行使価格におけるオプション価格の再現は可能であっても, WTI のように満期の短い限月と JUN, DEC の限月のみが主な取引対象である商品に対しては, 補間や補外に課題が残る. 本稿ではこれらのことを踏まえ, 上場オプション価格の再現により適していると思われる λ -SABR モデルと Heston モデルに基づき平均オプション価格を計算する. そして, 上場オプションのデータを用いてカリブレーション (calibration) したパラメータを用い, 平均オプション価格の近似精度を検証する. ただし, NYMEX 上場の WTI オプションはアメリカンタイプであるが, 確率ボラティリティ・モデルのパラメータを直接アメリカン・オプション価格からカリブレーションにより求めることは計算時間の観点で困難を伴う. 従って, 一つの簡易的な方法として, まず Black モデルにおけるインプライド・ボラティリティを求め, そのボラティリティに基づき計算したヨーロピアン・オプション価格に対しカリブレーションを行う. 次に, この手法により推計されたパラメータを用い, 平均オプションの中でも現時点から満期までの平均をとるタイプのオプションに対するプライシングを行い, その精度をモンテカルロ法により推計された価格と比較して検証する.

以下, 2 節では漸近展開の理論的な背景について説明し, 3 節では実際に λ -SABR モデル, Heston モデルに対する平均オプションのプライシング方法について簡単にまとめる. 4 節では, 漸近展開の精度についてモンテカルロ法による結果と比較を行う. λ -SABR モデルに対し様々なパラメータに対し網羅的に検証するとともに, Heston モデルとあわせ実際の上場オプションのデータを用いてカリブレーションを行い, 平均オプション価格の近似精度が実務上有用であることを確認する. 5 節では結果についてまとめる. 付録では 4 節で行った数値検証の結果, 条件付期待値の計算公式及び, より高次の漸近展開の計算法について記載する.

2 漸近展開

最初に次の確率微分方程式の解となる d 次元拡散過程 $X^{(\epsilon)}$ を考える:

$$dX_t^{(\epsilon)} = V_0(X_t^{(\epsilon)}, \epsilon)dt + \epsilon V(X_t^{(\epsilon)})dW_t; X_0^{(\epsilon)} = x_0, t \in [0, T]. \quad (1)$$

ここで $W = (W^1, \dots, W^m)$ は m 次元標準ブラウン運動を表し, $\epsilon \in [0, 1]$ は既知のパラメータとする. また, 係数 $V_0: \mathbf{R}^d \times [0, 1] \mapsto \mathbf{R}^d$, $V: \mathbf{R}^d \mapsto \mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^m$ は滑らかで, それらの任意の階数の導関数が有界な関数とする.

次に $g: \mathbf{R}^d \mapsto \mathbf{R}$ を滑らかで, 全ての導関数は高々多項式の増大度であると仮定する. このとき $\epsilon \downarrow 0$ に対し, $g(X_T^{(\epsilon)})$ は漸近展開を持つ.

$$g(X_T^{(\epsilon)}) = g_{0T} + \epsilon g_{1T} + \epsilon^2 g_{2T} + \epsilon^3 g_{3T} + o(\epsilon^3). \quad (2)$$

この漸近展開の数学的，統計学的正当化は Malliavin Calculus に基づく渡辺理論により [13], [14] 等によりなされた．ファイナンスの問題を対象とした数学的議論については [15], [5], [9], [11], [12] などを参照されたい．以下では，漸近展開の具体的な計算法に焦点を当てて解説する．

まず，展開の係数 $g_{0T}, g_{1T}, g_{2T}, \dots$ は Wiener-Itô 重積分 (multiple Wiener-Itô integrals) を用いて表現される．特に $D_t = \frac{\partial X_t^{(\epsilon)}}{\partial \epsilon} |_{\epsilon=0}$, $E_t = \frac{\partial^2 X_t^{(\epsilon)}}{\partial \epsilon^2} |_{\epsilon=0}$, $F_t = \frac{\partial^3 X_t^{(\epsilon)}}{\partial \epsilon^3} |_{\epsilon=0}$ とおくと $g_{0T}, g_{1T}, g_{2T}, g_{3T}$ は次のように書き表すことができる．

$$\begin{aligned} g_{0T} &= g(X_T^{(0)}), \quad g_{1T} = \sum_{i=1}^d \partial_i g(X_T^{(0)}) D_T^i, \\ g_{2T} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \partial_i \partial_j g(X_T^{(0)}) D_T^i D_T^j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \partial_i g(X_T^{(0)}) E_T^i, \\ g_{3T} &= \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^d \partial_i \partial_j \partial_k g(X_T^{(0)}) D_T^i D_T^j D_T^k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \partial_i \partial_j g(X_T^{(0)}) E_T^i D_T^j \\ &\quad + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^d \partial_i g(X_T^{(0)}) F_T^i. \end{aligned}$$

ここで D_t^i, E_t^i, F_t^i , ($i = 1, \dots, d$) はそれぞれ D_t, E_t, F_t の i 番目の要素で， D_t, E_t, F_t は次のように表される．

$$\begin{aligned} D_t &= \int_0^t Y_t Y_u^{-1} [\partial_\epsilon V_0(X_u^{(0)}, 0) du + V(X_u^{(0)}) dW_u], \\ E_t &= \int_0^t Y_t Y_u^{-1} \left(\sum_{j,k=1}^d \partial_j \partial_k V_0(X_u^{(0)}, 0) D_u^j D_u^k du + \partial_\epsilon^2 V_0(X_u^{(0)}, 0) du \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{j=1}^d \partial_\epsilon \partial_j V_0(X_u^{(0)}, 0) D_u^j du + 2 \sum_{j=1}^d \partial_j V(X_u^{(0)}) D_u^j dW_u \right), \\ F_t &= \int_0^t Y_t Y_u^{-1} \left(\sum_{j,k,l=1}^d \partial_j \partial_k \partial_l V_0(X_u^{(0)}, 0) D_u^j D_u^k D_u^l du + 3 \sum_{j,k=1}^d \partial_j \partial_k V_0(X_u^{(0)}, 0) E_u^j D_u^k du \right. \\ &\quad \left. + 3 \sum_{j,k=1}^d \partial_j \partial_k \partial_\epsilon V_0(X_u^{(0)}, 0) D_u^j D_u^k du + 3 \sum_{j=1}^d \partial_j \partial_\epsilon V_0(X_u^{(0)}, 0) E_u^j du \right. \\ &\quad \left. + 3 \sum_{j=1}^d \partial_j \partial_\epsilon^2 V_0(X_u^{(0)}, 0) D_u^j du + \partial_\epsilon^3 V_0(X_u^{(0)}, 0) du \right. \\ &\quad \left. + 3 \sum_{j,k=1}^d \partial_j \partial_k V(X_u^{(0)}) D_u^j D_u^k dW_u + 3 \sum_{j=1}^d \partial_j V(X_u^{(0)}) E_u^j dW_u \right). \end{aligned}$$

ただし, Y は以下の常微分方程式の解である.

$$dY_t = \partial V_0(X_t^{(0)}, 0)Y_t dt; Y_0 = I_d.$$

ここで, ∂V_0 は $d \times d$ 行列, その (j, k) は $\partial_k V_0^j$ である ($\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$, V_0^j は V_0 の j 番目の要素を表す.) また, I_d は $d \times d$ 単位行列を表す.

次に $g(X_T^{(\epsilon)})$ を $\epsilon \in (0, 1]$ に対し正規化したものを次のように置く.

$$G^{(\epsilon)} = \frac{g(X_T^{(\epsilon)}) - g_{0T}}{\epsilon}.$$

更に

$$a_t = a_t^{(0)} = (\partial g(X_T^{(0)}))' [Y_T Y_t^{-1} V(X_t^{(0)})],$$

とし, 次を仮定する.

$$(\text{仮定 1}) \quad \Sigma_T = \int_0^T a_t a_t' dt > 0. \quad (3)$$

Σ_T は正規分布に従う確率変数 g_{1T} の分散より, (仮定 1) は g_{1T} の分布が退化しないための条件となる.

このとき, $G^{(\epsilon)}$ の特性関数 $\psi_{G^{(\epsilon)}}(\xi)$ は次のように近似できる.

$$\begin{aligned} \psi_{G^{(\epsilon)}}(\xi) &= \mathbf{E}[\exp(i\xi G^{(\epsilon)})] \\ &= \mathbf{E}[\exp(i\xi g_{1T})] + \epsilon(i\xi)\mathbf{E}[\exp(i\xi g_{1T})g_{2T}] \\ &\quad + \epsilon^2(i\xi)\mathbf{E}[\exp(i\xi g_{1T})g_{3T}] + \frac{\epsilon^2}{2}(i\xi)^2\mathbf{E}[\exp(i\xi g_{1T})g_{2T}^2] + o(\epsilon^2) \\ &= \exp\left(\frac{(i\xi)^2 \Sigma_T}{2}\right) + \epsilon(i\xi)\mathbf{E}[\exp(i\xi g_{1T})\mathbf{E}[g_{2T}|g_{1T}]] \\ &\quad + \epsilon^2(i\xi)\mathbf{E}[\exp(i\xi g_{1T})\mathbf{E}[g_{3T}|g_{1T}]] + \frac{\epsilon^2}{2}(i\xi)^2\mathbf{E}[\exp(i\xi g_{1T})\mathbf{E}[g_{2T}^2|g_{1T}]] + o(\epsilon^2). \end{aligned}$$

ここで $\mathbf{E}[g_{2T}|g_{1T}]$, $\mathbf{E}[g_{2T}^2|g_{1T}]$ 及び $\mathbf{E}[g_{3T}|g_{1T}]$ は g_{1T} の多項式となる.

このとき近似された特性関数を反転することにより確率密度関数の近似, G^ϵ が得られ, それは次のように表される.

$$\begin{aligned} f_{G^\epsilon} &= n[x; 0, \Sigma_T] + \epsilon \left[-\frac{\partial}{\partial x} \{h_2(x)n[x; 0, \Sigma_T]\} \right] \\ &\quad + \epsilon^2 \left[-\frac{\partial}{\partial x} \{h_3(x)n[x; 0, \Sigma_T]\} \right] + \frac{1}{2}\epsilon^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \{h_{22}(x)n[x; 0, \Sigma_T]\} \right] + o(\epsilon^2). \end{aligned}$$

ここで, $h_2(x) = \mathbf{E}[g_{2T}|g_{1T} = x]$, $h_{22}(x) = \mathbf{E}[g_{2T}^2|g_{1T} = x]$, $h_3(x) = \mathbf{E}[g_{3T}|g_{1T} = x]$ であり, $n[x; 0, \Sigma_T]$ は平均 0 分散 Σ_T の正規分布の密度関数を表す.

$$n[x; 0, \Sigma_T] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma_T}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\Sigma_T}\right\}.$$

さて，全ての導関数が高々多項式の増大度である滑らかな関数を $\phi: \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ とおく．このとき期待値 $\mathbf{E}[\phi(G^{(\epsilon)})I_B(G^{(\epsilon)})]$ は漸近展開を持ち，次のように表される．

$$\mathbf{E}[\phi(G^{(\epsilon)})I_B(G^{(\epsilon)})] = \Phi_0 + \epsilon\Phi_1 + \epsilon^2\Phi_2 + o(\epsilon^2). \quad (4)$$

B は \mathbf{R} 上のボレル集合を表し， $G^{(\epsilon)} \in B$ のとき $I_B(G^{(\epsilon)}) = 1$ となり，それ以外では $I_B(G^{(\epsilon)}) = 0$ とする．

展開の各項の具体的な表現に関しては，例えば Φ_0, Φ_1, Φ_2 は次のように書ける．

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \int_B \phi(x)n[x; 0, \Sigma_T]dx, \\ \Phi_1 &= - \int_B \phi(x)\partial_x \{\mathbf{E}[g_{2T}|g_{1T} = x]n[x; 0, \Sigma_T]\}dx, \\ \Phi_2 &= \int_B \left(\frac{1}{2}\phi(x)\partial_x^2 \{\mathbf{E}[g_{2T}^2|g_{1T} = x]n[x; 0, \Sigma_T]\} - \phi(x)\partial_x \{\mathbf{E}[g_{3T}|g_{1T} = x]n[x; 0, \Sigma_T]\} \right) dx. \end{aligned}$$

満期 T における原資産の価値が $g(X_T^\epsilon)$ で，行使価格が任意の $y \in \mathbf{R}$ に対して $K = g(X_T^0) - \epsilon y$ のコールオプションのペイオフは，次のように書き表すことできる．

$$\max\{g(X_T^\epsilon) - K, 0\} = \epsilon\phi(G^\epsilon)I_B(G^\epsilon).$$

ここで $\phi(x) = (x + y)$ ， $B = \{G^\epsilon \geq -y\}$ とする．

注意． $\mathbf{E}[g_{2T}|g_{1T} = x]$ ， $\mathbf{E}[g_{2T}^2|g_{1T} = x]$ ， $\mathbf{E}[g_{3T}|g_{1T} = x]$ は x の多項式となり，期待値は簡単に計算できる．これら条件付期待値の計算に便利な公式 ([14], [15], [9], [10]) は付録 B を参照のこと．また，この条件付期待値公式を用いない近似計算の手法に関しては付録 C を参照されたい．

3 漸近展開による平均オプションの近似

本節では，確率ボラティリティ・モデルに対する平均オプションの価格を，ある漸近展開法により近似する．平均オプションとは期間 $[0, T]$ における平均価格と，あらかじめ定められた行使価格との差額を受け取る権利を有するオプションと定義できる． $S(t)$ を原資産の時刻 t での価格とし，期間 $[0, T]$ における原資産の平均価格 $X(T)$ を次のように定義する．

$$X(T) = \frac{1}{T} \int_0^T S(t)dt. \quad (5)$$

このとき，満期 T における行使価格 K の平均コールオプションの価値 $C(T)$ は

$$C(T) = \max\{X(T) - K, 0\},$$

により表される．

漸近展開法は一般的な伊藤過程に基づくモデルに対して適用可能であるが，ここでは λ -SABR モデルと Heston モデルについて計算を行う．それ以外のモデルも同様の手順により計算可能である．

3.1 λ -SABR モデル

λ -SABR モデルにおいては，原資産価格 $S(t)$ はリスク中立測度の下で次の確率微分方程式に従う．

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma(t)S(t)^\beta dW^1(t), \quad (6)$$

$$d\sigma(t) = \lambda(\theta - \sigma(t))dt + \nu_1\sigma(t)dW^1(t) + \nu_2\sigma(t)dW^2(t). \quad (7)$$

ここで，原資産とボラティリティの相関を $\rho(\in [-1, 1])$ とすると， $\nu_1 = \rho\nu$ ， $\nu_2 = (\sqrt{1 - \rho^2})\nu$ と表すことができる．ただし ν は正の実数とする． λ -SABR モデルはボラティリティ・スキュー (volatility skew) やスマイル (smile) を表現するだけでなく，ボラティリティの期間構造も表すことができるモデルである．ヨーロピアン・オプションの近似解については，本稿の漸近展開法の他に [6] による手法などがある．

λ -SABR モデルを実際に展開する．(5)，(6)，(7) はスケール変換することでパラメータ $\epsilon \in (0, 1]$ を用いて次のように表すことができる．

$$S^{(\epsilon)}(T) = S(0) + \alpha \int_0^T S^{(\epsilon)}(t)dt + \epsilon \int_0^T \sigma^{(\epsilon)}(t)S^{(\epsilon)}(t)^\beta dW^1(t), \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{(\epsilon)}(T) &= \sigma(0) + \int_0^T \lambda(\theta - \sigma^{(\epsilon)}(t))dt \\ &\quad + \epsilon \left(\int_0^T \nu_1 \sigma^{(\epsilon)}(t)dW^1(t) + \int_0^T \nu_2 \sigma^{(\epsilon)}(t)dW^2(t) \right), \end{aligned} \quad (9)$$

$$X^{(\epsilon)}(T) = \frac{1}{T} \int_0^T S^{(\epsilon)}(t)dt. \quad (10)$$

ここで ϵ が十分小さいとき，方程式の解は ϵ について次のように展開できる．

$$X(T) = \sum_{n=0}^m \epsilon^n X^{(n)}(T) + o(\epsilon^m). \quad (11)$$

係数 $X^{(n)}(T)$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) は (10) に (8) を代入し， $\epsilon = 0$ のまわりで ϵ に関して n 階微分したものと係数を比較することで得られる．平均オプションのプライシングについては $X^{(n)}(T)$ を求めればよく，具体的には以下のように表される．

$$X^{(0)}(T) = \frac{e^{\alpha T} - 1}{\alpha T} S(0), \quad (12)$$

$$X^{(1)}(T) = \int_0^T f_{11}(s)' dW(s), \quad (13)$$

$$X^{(2)}(T) = \sum_{i=1}^2 \int_0^T \int_0^s f_{2i}(u)' dW(u) g_{2i}(s)' dW(s), \quad (14)$$

$$X^{(3)}(T) = \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_0^s \int_0^u f_{3i}(v)' dW(v) g_{3i}(u)' dW(u) h_{3i}(s)' dW(s)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^2 \int_0^T \left(\int_0^s g_{4i}(u)' dW(u) \right) \left(\int_0^s f_{4i}(u)' dW(u) \right) \\
& \times h_{4i}(s)' dW(s). \tag{15}
\end{aligned}$$

ここで $f_{11}(t)$, $f_{2i}(t)$ ($i = 1, 2$), $f_{3i}(t)$ ($i = 1, 2, 3$), f_{4i} ($i = 1, 2$), $g_{2i}(t)$ ($i = 1, 2$), $g_{3i}(t)$ ($i = 1, 2, 3$), $g_{4i}(t)$ ($i = 1, 2$), $h_{3i}(t)$ ($i = 1, 2, 3$), $h_{4i}(t)$ ($i = 1, 2$) は次のように表される .

$$f_{21}(t) = f_{31}(t) = f_{41}(t) = g_{41}(t) = g_{42}(t) = \begin{pmatrix} e^{-\alpha t} (S(0)e^{\alpha t})^\beta (\theta + (\sigma(0) - \theta)e^{-\lambda t}) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f_{11}(t) = \frac{e^{\alpha(T-t)} - 1}{\alpha T} e^{\alpha t} f_{21}(t),$$

$$f_{22}(t) = f_{32}(t) = f_{33}(t) = f_{42}(t) = \begin{pmatrix} \nu_1 (\theta e^{\lambda t} + \sigma(0) - \theta) \\ \nu_2 (\theta e^{\lambda t} + \sigma(0) - \theta) \end{pmatrix},$$

$$g_{31}(t) = \begin{pmatrix} \beta (S(0)e^{\alpha t})^{\beta-1} (\theta + (\sigma(0) - \theta)e^{-\lambda t}) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$g_{21}(t) = h_{31}(t) = h_{32}(t) = \frac{e^{\alpha(T-t)} - 1}{\alpha T} g_{31}(t), \quad g_{32}(t) = \begin{pmatrix} (S(0)e^{\alpha t})^\beta e^{(-\alpha-\lambda)t} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$g_{22}(t) = h_{33}(t) = \frac{e^{\alpha(T-t)} - 1}{\alpha T} g_{32}(t), \quad g_{33}(t) = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix},$$

$$h_{41}(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^{\alpha(T-t)} - 1}{2\alpha T} \beta (\beta - 1) (S(0)e^{\alpha t})^{\beta-2} (\theta + (\sigma(0) - \theta)e^{-\lambda t}) e^{\alpha t} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$h_{42}(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^{\alpha(T-t)} - 1}{\alpha T} \beta (S(0)e^{\alpha t})^{\beta-1} e^{-\lambda t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

この展開式を用いて平均オプションのプライシングを行う . 2 節の議論を用いると , 平均コールオプションの価格は次で与えられる .

$$\begin{aligned}
C(0) &= e^{-rT} \left(\epsilon \left(y \int_{-y}^{\infty} n[x; 0, \Sigma] dx + \int_{-y}^{\infty} x n[x; 0, \Sigma] dx \right) \right. \\
&+ \epsilon^2 \int_{-y}^{\infty} \mathbf{E} \left[X^{(2)}(T) | X^{(1)}(T) = x \right] n[x; 0, \Sigma] dx \\
&+ \epsilon^3 \left(\int_{-y}^{\infty} \mathbf{E} \left[X^{(3)}(T) | X^{(1)}(T) = x \right] n[x; 0, \Sigma] dx \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \mathbf{E} \left[\left(X^{(2)}(T) \right)^2 | X^{(1)}(T) = y \right] n[y; 0, \Sigma] \right) \right) + o(\epsilon^3).
\end{aligned}$$

ただし $y = \frac{X^{(0)}(T) - K}{\epsilon}$, $\Sigma = \int_0^T f_{11}(s)' f_{11}(s) ds$, $n[x; 0, \Sigma] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\Sigma}\right)$ とする .

この式の条件付期待値を計算することで以下の定理を得る (条件付期待値計算に関する公式は付録 B を参照のこと .)

定理 3.1. 無リスク金利を $r > 0$ とする . このとき行使価格 K の平均オプションの価格 $C(0)$ は次のように表すことができる .

$$\begin{aligned}
C(0) &= e^{-rT} \left[\epsilon \left\{ yN \left(\frac{y}{\sqrt{\Sigma}} \right) + \Sigma n[y; 0, \Sigma] \right\} \right. \\
&\quad + \epsilon^2 \int_{-y}^{\infty} C_1 \frac{H_2(x; \Sigma)}{\Sigma^2} n[x; 0, \Sigma] dx \\
&\quad + \epsilon^3 \left\{ \int_{-y}^{\infty} C_2 \frac{H_3(x; \Sigma)}{\Sigma^3} n[x; 0, \Sigma] dx + C_3 n[y; 0, \Sigma] \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(C_4 \frac{H_4(y; \Sigma)}{\Sigma^4} + C_5 \frac{H_2(y; \Sigma)}{\Sigma^2} + C_6 \right) n[y; 0, \Sigma] \right\} \right] \\
&\quad + o(\epsilon^3). \tag{16}
\end{aligned}$$

ただし, $N(x)$ は標準正規分布の分布関数を表し, $H_k(x; \Sigma)$ は以下で定義される k 次の Hermite 多項式である .

$$H_k(x; \Sigma) := (-\Sigma)^k e^{x^2/2\Sigma} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2/2\Sigma}.$$

例えば, $H_0(x; \Sigma) = 1$, $H_1(x; \Sigma) = x$, $H_2(x; \Sigma) = x^2 - \Sigma$, $H_3(x; \Sigma) = x^3 - 3\Sigma x$, $H_4(x; \Sigma) = x^4 - 6\Sigma x^2 + 3\Sigma^2$ である. さらに,

$$\begin{aligned}
y &= \frac{X^{(0)}(T) - K}{\epsilon}, \\
\Sigma &= \int_0^T f_{11}(s)' f_{11}(s) ds, \\
C_1 &= \sum_{i=1}^2 \int_0^T f_{11}(s)' g_{2i}(s) \int_0^s f_{11}(u)' f_{2i}(u) dud s, \\
C_2 &= \sum_{i=1}^3 \int_0^T f_{11}(s)' h_{3i}(s) \int_0^s f_{11}(u)' g_{3i}(u) \int_0^u f_{11}(v)' f_{3i}(v) dvduds \\
&\quad + \sum_{i=1}^2 \int_0^T f_{11}(s)' h_{4i}(s) \int_0^s f_{11}(u)' g_{4i}(u) du \int_0^s f_{11}(u)' f_{4i}(u) dud s, \\
C_3 &= \sum_{i=1}^2 \int_0^T f_{11}(s)' h_{4i}(s) \int_0^s g_{4i}(u)' f_{4i}(u) dud s, \\
C_4 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\int_0^T f_{11}(s)' g_{5i}(s) \int_0^s f_{11}(s)' f_{5i}(u) dud s \right) \\
&\quad \times \left(\int_0^T f_{11}(s)' k_{5i}(s) \int_0^s f_{11}(s)' h_{5i}(u) dud s \right), \\
C_5 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\int_0^T f_{11}(s)' k_{5i}(s) \int_0^s f_{11}(u)' g_{5i}(u) \int_0^u f_{5i}(v)' h_{5i}(v) dvduds \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^T f_{11}(s)' g_{5i}(s) \int_0^s f_{11}(u)' k_{5i}(u) \int_0^u f_{5i}(v)' h_{5i}(v) dv du ds \\
& + \int_0^T f_{11}(s)' g_{5i}(s) \int_0^s f_{5i}(u)' k_{5i}(u) \int_0^u f_{11}(v)' h_{5i}(v) dv du ds \\
& + \int_0^T g_{5i}(s)' k_{5i}(s) \int_0^s f_{11}(u)' h_{5i}(u) du \int_0^s f_{11}(u)' f_{5i}(u) du ds \\
& + \int_0^T f_{11}(s)' k_{5i}(s) \int_0^s g_{5i}(u)' h_{5i}(u) \int_0^u f_{11}(v)' f_{5i}(v) dv du ds \Big), \\
C_6 & = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_0^T g_{5i}(s)' k_{5i}(s) \int_0^s f_{11}(u)' h_{5i}(u) du ds,
\end{aligned}$$

である。ここで $f_{11}(t)$, $f_{2i}(t)$ ($i = 1, 2$), $f_{3i}(t)$ ($i = 1, 2, 3$), f_{4i} ($i = 1, 2$), $g_{2i}(t)$ ($i = 1, 2$), $g_{3i}(t)$ ($i = 1, 2, 3$), $g_{4i}(t)$ ($i = 1, 2$), $h_{3i}(t)$ ($i = 1, 2, 3$), $h_{4i}(t)$ ($i = 1, 2$) は前述のとおりであり, $f_{5i}(t)$, $g_{5i}(t)$, $h_{5i}(t)$, $k_{5i}(t)$ ($i = 1, 2, 3$) は次のとおり。

$$\begin{aligned}
f_{51}(t) & = f_{53}(t) = h_{51}(t) = f_{21}(t), f_{52}(t) = h_{52}(t) = h_{53}(t) = f_{22}(t), \\
g_{51}(t) & = g_{53}(t) = k_{51}(t) = g_{21}(t), g_{52}(t) = k_{52}(t) = \frac{1}{2} k_{53}(t) = g_{22}(t).
\end{aligned}$$

注意．(16) 式の右辺に現れる積分は, *Hermite* 多項式の定義より得られる次の等式を用いて容易に計算できる．

$$\int_{-y}^{\infty} \frac{1}{\Sigma^k} H_k(x; \Sigma) n[x; 0, \Sigma] dx = \frac{1}{\Sigma^{k-1}} H_{k-1}(-y; \Sigma) n[y; 0, \Sigma] \quad (k \geq 1).$$

注意．通常の *SABR* モデルにおけるオプションの近似価格は, $\lambda = \alpha = 0$ として, ロピタルの定理を用いることにより得ることができる．

これらの価格を計算する際には時間に関する積分を解く必要があり, その積分は重積分により表わされるが, 仮にそれらを数値積分で計算する場合でも 1 回の Loop で計算可能な形となっている．従って各係数関数さえ求めれば, 数値積分を行うことで機械的に極めて短時間で価格を算出することができる．また, 離散時間における価格の平均をとる平均オプションであっても, 一部の積分を離散和に書き換えることにより少し計算は煩雑になるが, 同様の方法が適用できる．

注意．ここでは $X(T)$ に対する計算をまとめているが, $S(T)$ に関しても同様の計算を行うことによりヨーロピアン・オプションに対する 3 次の近似式を導出することができる．

3.2 Heston モデル

Heston モデルを考える． W_1, W_2 を標準ブラウン運動とし, 原資産価格 $S(t)$ の変動を以下の確率微分方程式により考える．

$$dS(t) = \alpha S(t) dt + S(t) \sqrt{V(t)} dW^1(t), \tag{17}$$

$$dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \nu_1\sqrt{V(t)}dW^1(t) + \nu_2\sqrt{V(t)}dW^2(t). \quad (18)$$

ここで原資産とボラティリティの相関を $\rho(\in [-1, 1])$ とすると $\nu_1 = \rho\nu$, $\nu_2 = (\sqrt{1 - \rho^2})\nu$ と表すことができる．ただし, ν は正の実数とする．Heston モデルも λ -SABR モデル同様, ボラティリティ・スキューやスマイルを表現するだけでなく, ボラティリティの期間構造も表すことができるモデルとなっている．

Heston モデルに対するヨーロピアン・オプションは, 逆フーリエ変換の手法を用いることで一部数値積分が必要ではあるが, 準解析的な解を得ることができる．詳細は [4] を参照のこと．

Heston モデルにおける平均オプションも λ -SABR モデルと同様に計算できる．具体的には, 定理 3.1 の式の係数を以下のように定めればよい．

$$\begin{aligned} f_{21}(t) &= f_{31}(t) = g_{31}(t) = f_{41}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{\theta + (V(0) - \theta)e^{-\kappa t}} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ f_{11}(t) &= g_{21}(t) = h_{31}(t) = 2h_{32}(t) = \frac{e^{\alpha(T-t)} - 1}{\alpha T} S(0)f_{21}(t), \\ f_{22}(t) &= f_{32}(t) = f_{33}(t) = f_{42}(t) = g_{41}(t) = g_{42}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{\theta + (V(0) - \theta)e^{-\kappa t}}\nu_1 e^{\kappa t} \\ \sqrt{\theta + (V(0) - \theta)e^{-\kappa t}}\nu_2 e^{\kappa t} \end{pmatrix}, \\ g_{32}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{e^{-\kappa t}}{\sqrt{\theta + (V(0) - \theta)e^{-\kappa t}}} \\ 0 \end{pmatrix}, g_{22}(t) = 2h_{33}(t) = h_{41}(t) = \frac{e^{\alpha(T-t)} - 1}{2\alpha T} S(0)g_{32}(t), \\ g_{33}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{\nu_1}{\sqrt{\theta + (V(0) - \theta)e^{-\kappa t}}} \\ \frac{\nu_2}{\sqrt{\theta + (V(0) - \theta)e^{-\kappa t}}} \end{pmatrix}, h_{42}(t) = \begin{pmatrix} \frac{-(e^{\alpha(T-t)} - 1)e^{-2\kappa t} S(0)}{8\alpha T (\sqrt{\theta + (V(0) - \theta)e^{-\kappa t}})^3} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

また, $f_{5i}(t), g_{5i}(t), h_{5i}(t), k_{5i}(t)$ ($i = 1, 2, 3$) は次のとおり．

$$\begin{aligned} f_{51}(t) &= f_{53}(t) = h_{51}(t) = f_{21}(t), f_{52}(t) = h_{52}(t) = h_{53}(t) = f_{22}(t), \\ g_{51}(t) &= g_{53}(t) = k_{51}(t) = g_{21}(t), g_{52}(t) = k_{52}(t) = \frac{1}{2}k_{53}(t) = g_{22}(t). \end{aligned}$$

4 数値検証

本節では最初に λ -SABR モデルに対してさまざまな設定の下で精度について検証を行う．そして, 後半では λ -SABR モデルと Heston モデルに関して, 実際のマーケットデータを用いてカリブレーションを行い, そのパラメータの下での精度検証を行う．

4.1 λ -SABR モデルのパラメータと平均オプションの精度

漸近展開による近似解の精度について検証を行う．比較にはモンテカルル口法により計算された値を用いる．モンテカルル口法は期間分割数を 2,000 分割とし, 試行回数を 500 万回

とした¹．検証に用いたパラメータの組み合わせは表 1 のとおり．

表 1:

Parameter	λ	$\sigma(0)$	β	ρ	θ	ν	T
i	0.5	3.0	0.5	-0.3	3.0	0.3	1
ii	0.5	0.3	1.0	-0.3	0.3	0.3	1
iii	0.5	12.0	0.2	-0.3	12.0	0.3	1
iv	0.5	3.0	0.5	-0.7	3.0	0.3	1
v	0.5	3.0	0.5	0	3.0	0.3	1
vi	0.5	2.0	0.5	-0.3	2.0	0.3	1
vii	0.5	5.0	0.5	-0.3	3.0	0.3	1
viii	0.5	3.0	0.5	-0.3	3.0	0.1	1
ix	0.5	3.0	0.5	-0.3	3.0	0.7	1
x	0.1	3.0	0.5	-0.3	3.0	0.3	1
xi	1.0	3.0	0.5	-0.3	3.0	0.3	1
xii	0.5	3.0	0.5	-0.3	3.0	0.3	2

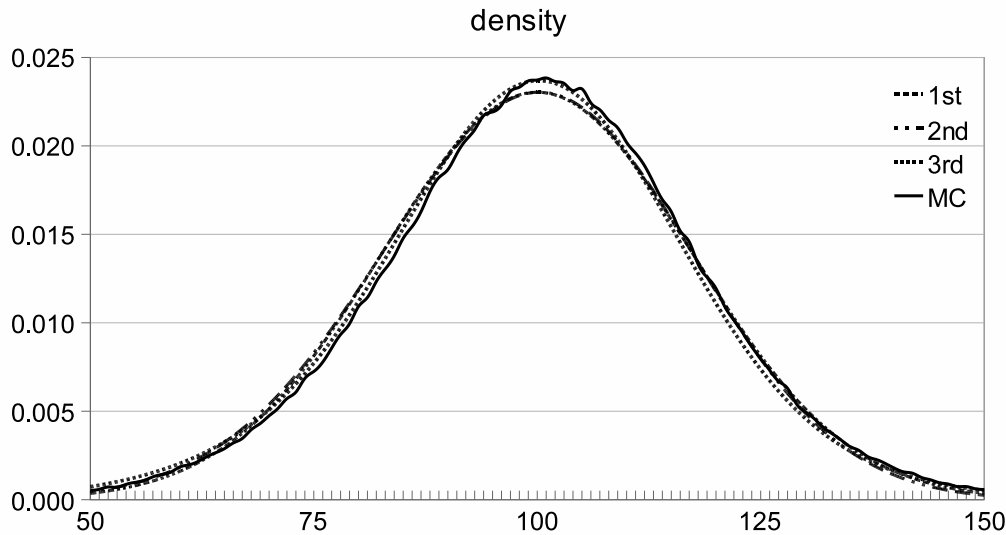
i を基準とし, ii と iii では β の値を変化させた場合の検証を行う．原資産の変動がほぼ一定 (対数正規過程で 30%程度) になるように $\sigma(0)$ と θ を調整した．iv と v は原資産とボラティリティの相関を変化させた場合の検証となっている．vi と vii ではボラティリティの水準を変化させた場合について検証を行い, viii と ix ではボラティリティのボラティリティを変化させた場合の検証を行った．x と xi では中心回帰スピードの変化による検証を行い, xii では満期の長さを変えている．上記以外のパラメータとして原資産価格 $S(0) = 100$ とし金利及び原資産のドリフト (α) は 0 と仮定した．また, 行使価格 70, 90 のプットオプションと, 行使価格 100, 120, 150 のコールオプションのプ価格についての比較を行った．結果の詳細は付録 A.1 を参照．

検証の結果より, 全体的な傾向は, 漸近展開の精度がやや落ちる場合としてボラティリティが大きい場合 (vii), ボラティリティのボラティリティが大きい場合 (ix), 満期が長くなる場合 (xii) があげられる．また, 原資産とボラティリティの相関が 0 に近い場合 (v) についても若干精度が悪くなっている．しかし, どの場合においても 3 次の漸近展開では誤差が 3 セント程度に収まっており非常に高精度な近似が得られていることが分かる．

図 1 は, 漸近展開の次数の違いによる精度の違いが顕著であった ix の場合の密度関数を表している．1 次と 2 次の近似では ATM(100) 近辺でモンテカルロにより推定された密度関数と乖離が生じているのに対し, 3 次の漸近展開ではモンテカルロにより求めた値と非常に近い結果が得られていることが見てとれる．

¹ λ -SABR において離散化したためにボラティリティ過程が 0 以下の値をとった場合は, $\sigma(t_{i+1}) = \sigma(t_i) + \lambda\theta\Delta t$, $S(t_{i+1}) = S(t_i) + \alpha S(t_i)\Delta t$ とした．また, 原資産が 0 以下の値となった場合には $S(t_{i+1}) = 0$ とした．

図 1:



4.2 カリブレーションされたパラメータでの平均オプションの精度

NYMEX 上場の WTI 先物オプションはアメリカン・タイプのオプション²であり，これに対して確率ボラティリティ・モデルを用いて直接カリブレーションすることによりパラメータを推定することが望ましい．しかし，確率ボラティリティを含んだモデルに対するアメリカン・オプションのカリブレーションは計算時間の観点で実務上困難を要する．従って，今回はヨーロピアン・オプションの解析近似解及び準解析解を用い，以下の手順によりカリブレーションを行うこととする．

- i. アメリカン・オプション価格 (取引所の清算値) より Black モデルにおけるインプライド・ボラティリティを求める．
- ii. i で求めたインプライド・ボラティリティを用い，Black モデルによりヨーロピアン・オプションの価格を算出する．
- iii. ii で求めたヨーロピアン・オプションの価格と，モデルより算出されるオプション価格の差をとり，その差の二乗和が最小になるパラメータを推定する．

カリブレーション誤差がない場合，この手順で求められたパラメータを用い計算されたヨーロピアン・オプションの Black モデルのインプライド・ボラティリティは，i で求められたインプライド・ボラティリティと一致する．しかし Heston モデルや λ -SABR モデルから直

²ここでは平均オプションの精度検証が目的であるので，簡単化のため，実際の値洗いや資金決済方法に関わらず，オプション売買の時点でオプション・プレミアムの受け取り・支払いが発生し，行使時点で資金決済を行うと仮定する．

接アメリカン・オプションを求めた場合，その価格は必ずしもカリブレーションに用いた i のアメリカン・オプション価格とは一致しないことに注意を要する．また，Heston モデルは準解析解が存在するためヨーロッパンオプション価格の誤差はほぼないが， λ -SABR モデルは前節の解析近似解を元に計算を行うため，カリブレーション時にも近似誤差が生じる．しかし，今回は平均オプションの漸近展開での精度検証が目的であるため，カリブレーション時の近似誤差については深く言及しない．

時刻 t における満期 T の先物の価格を $F(t, T)$ とするとき，先物価格はリスク中立確率の下でマルチンゲールであることを踏まえ，以下のモデルに従うとする．

λ -SABR モデル;

$$dF(t, T) = \mu(t, T)\sigma(t)F(t, T)^\beta dW^1(t),$$

$$d\sigma(t) = \lambda(\theta - \sigma(t))dt + \nu_1\sigma(t)dW^1(t) + \nu_2\sigma(t)dW^2(t).$$

Heston モデル;

$$dF(t, T) = \mu(t, T)F(t, T)\sqrt{V(t)}dW^1(t),$$

$$dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \nu_1\sqrt{V(t)}dW^1(t) + \nu_2\sqrt{V(t)}dW^2(t).$$

パラメータ数を減らし簡略なモデルで考えるため，先物の限月に依らずボラティリティは全て同一の確率過程に従い，時間に依存する確定的な関数 $\mu(t, T)$ により調整するとする．またここでは簡単のため $\mu(t, T) := 1_{\{t < T\}}$ とおく．

今回カリブレーションを行うのは 2007 年 10 月 1 日，2008 年 7 月 1 日，2008 年 10 月 1 日の 3 日間とする．2007 年 10 月 1 日は標準的なボラティリティ構造のパターンであり，2008 年 7 月 1 日は WTI 先物価格が史上最高値近辺となった際のボラティリティ構造を表し，2008 年 10 月 1 日は先物価格が急落し，ボラティリティが上昇した局面を表している．カリブレーション対象限月及び行使価格，無リスク金利，先物価格については表 2 のとおり．

表 2:

日付	限月	行使価格					先物価格	満期	金利
		Put-1	Put-2	Call-1	Call-2	Call-3			
2007/10/01	Z7	50	70	80	90	110	79.28	0.12	5.19 %
	M8	50	70	80	90	110	76.05	0.62	5.06 %
	Z8	40	60	70	80	100	74.25	1.13	4.83 %
	M9	40	60	70	80	100	73.10	1.62	4.67 %
2008/07/01	Z8	110	130	140	150	170	142.47	0.38	2.98 %
	M9	110	130	140	150	170	142.18	0.87	3.27 %
	Z9	110	130	140	150	170	140.90	1.38	3.40 %
	M0	110	130	140	150	170	139.79	1.88	3.49 %
2008/10/01	Z8	70	90	100	110	130	97.92	0.13	4.06 %
	M9	70	90	100	110	130	99.34	0.62	4.04 %
	Z9	70	90	100	110	130	100.99	1.13	3.96 %
	M0	70	90	100	110	130	102.03	1.62	3.55 %

また，ヨーロピアンに変換後の先物オプション価格（前述の ii の価格）は表 3 のとおりである．

表 3:

日付	限月	Put-1	Put-2	Call-1	Call-2	Call-3
2007/10/01	Z7	0.01	0.52	2.63	0.33	0.03
	M8	0.28	3.13	3.64	1.19	0.15
	Z8	0.22	2.17	8.84	4.07	0.79
	M9		2.74	8.52	4.16	0.97
2008/07/01	Z8	3.43	9.04	15.85	11.74	6.43
	M9	7.10	14.00	20.78	16.85	
	Z9	9.50	17.05	22.81	19.15	13.82
	M0	10.80	18.74	23.61		
2008/10/01	Z8	0.43	4.12	6.76	3.55	0.95
	M9	3.06	9.47	13.82	10.16	5.53
	Z9	4.35	11.22	17.13	13.40	8.47
	M0	4.87	11.73	18.36	14.72	9.71

一部の箇所が空欄になっているのは，取引が行われておらず清算値が存在していなかったためである．

これらの値を用い，前述の方法でカリブレーションされたパラメータは表 4 のとおり．

表 4:

日付	Heston					λ -SABR					
	κ	$V(0)$	ρ	θ	ν	λ	$\sigma(0)$	β	ρ	θ	ν
2007/10/01	1.180	0.082	-0.408	0.032	0.560	1.590	0.281	1.000	-0.341	0.133	1.156
2008/07/01	0.463	0.218	-0.028	0.040	0.811	0.877	0.808	0.889	0.056	0.184	1.081
2008/10/01	1.128	0.328	-0.050	0.011	0.700	0.837	0.575	1.000	-0.023	0.025	0.706

今回のカリブレーションでは簡単のため，全ての限月の先物価格と分散との相関を一定と置いた．推定されたパラメータは，Heston, λ -SABR とともにボラティリティ初期値³は 2007 年 10 月 1 日が 30%程度，2008 年 7 月 1 日が 50%弱，2008 年 10 月 1 日が 60%弱の非常に大きな値であるのに対し， θ は小さく，ボラティリティの期間構造が右下がりとなっていることが分かる．そして，分散（または，ボラティリティ）のボラティリティ(ν)が大きく，スマイルがきつめであることが見てとれる．また相関(ρ)は 2008 年 7 月 1 日，2008 年 10 月 1 日においてほぼ 0 になっており，2008 年後半のボラティリティ・サーフェスが（スキューというよりも）スマイルの形状であることを表している．

このパラメータを用いてプライシングした際，推定された価格と表 3 の価格との差がどの程度乖離しているかについてまとめたものが表 5 である．

³Heston は分散からボラティリティに変換した値． λ -SABR は β による効果を補正した値．

表 5:

日付	限月	Heston					λ -SABR				
		Put-1	Put-2	Call-1	Call-2	Call-3	Put-1	Put-2	Call-1	Call-2	Call-3
2007/10/01	Z7	-0.01	-0.09	-0.02	-0.08	-0.03	-0.01	-0.09	-0.06	-0.08	-0.03
	M8	0.06	0.07	0.09	0.06	-0.00	0.14	0.02	0.11	0.09	-0.04
	Z8	0.06	-0.05	-0.12	-0.06	-0.06	0.15	-0.05	-0.15	-0.01	-0.09
	M9		0.04	0.02	0.04	-0.03		0.00	-0.00	0.10	-0.09
2008/07/01	Z8	-0.14	-0.04	0.14	0.08	-0.05	-0.09	-0.10	0.09	0.06	0.02
	M9	-0.07	-0.07	0.10	0.07		-0.04	-0.09	0.11	0.09	
	Z9	-0.02	-0.14	-0.04	-0.06	-0.02	-0.01	-0.12	-0.00	-0.04	-0.06
	M0	0.21	-0.01	0.01			0.18	-0.02	-0.00		
2008/10/01	Z8	-0.09	-0.04	-0.04	-0.08	-0.18	-0.07	-0.04	-0.03	-0.06	-0.17
	M9	0.01	0.06	0.10	0.15	0.14	0.00	0.03	0.08	0.15	0.15
	Z9	0.01	-0.12	-0.15	-0.07	-0.11	0.00	-0.12	-0.13	-0.05	-0.12
	M0	0.07	-0.04	0.09	0.07	-0.01	0.06	-0.04	0.12	0.09	-0.05

概ね市場価格を再現できているが、直近限月や Far Out of the Money のオプションにおいて再現性が相対的に良くない場合もある。しかし上場先物オプションの Offer-Bid がプレミアム対比で概ね 5%以上あることを考えると、それほど問題になる水準ではない。

表 4 のパラメータを用いて Heston モデル及び λ -SABR モデルにより直接アメリカン・オプションの価格を計算した場合、いくらかの誤差を持ったものとなると考えられる。しかし、大きく外れたパラメータではないと考えられるため、今回はこのパラメータを用いて平均オプション価格に対する漸近展開の精度を検証する。

先物に対する満期 $T^*(\leq T)$ の平均コールオプションの 0 時点における価格 $C(0)$ は、リスク中立測度において以下の期待値を計算することで得られるオプションとする。

$$C(0) = e^{-rT^*} \mathbf{E} \left[\max \left\{ \frac{1}{T^*} \int_0^{T^*} F(t, T) dt - K, 0 \right\} \right].$$

ここでは ATM 近辺と ± 20 ドル程度の OTM のコール及びプットオプションを計算した。比較には、モンテカルロ法により計算された値を用いる⁴。モンテカルロ法は期間分割数を 1,000 分割とし、試行回数を 500 万回とした。

検証に用いた原資産価格、無リスク金利は、満期 0.5 年のオプションに対しては 2007 年 10 月 1 日が M8、それ以外が M9、満期 1 年のオプションに対しては 2007 年 10 月 1 日が Z8、それ以外が Z9、満期 1.5 年のオプションには 2007 年 10 月 1 日が M9、それ以外が M0 の値を用いた (表 2 参照)。またパラメータの組み合わせは表 4 のとおりとした。結果は付録 A.2, A.3 を参照のこと。

この検証の結果より、期間が長くなると精度が下がり、特にプットオプションは相対的に精度がやや悪くなっていることが分かる。しかし、平常時 (2007 年 10 月 1 日) において

⁴Heston モデルにおいて離散化したために分散過程が 0 以下の値をとった場合、 $V(t_{i+1}) = V(t_i) + \kappa\theta\Delta t$, $S(t_{i+1}) = S(t_i) + \alpha S(t_i)\Delta t$ とした。また、原資産が 0 以下の値となった場合には $S(t_{i+1}) = 0$ とした。

は、3 次の漸近展開では Heston, λ -SABR とともに誤差は最大で 5 セント程度と非常に高い精度で近似できていた。また、ボラティリティ自体が非常に高水準であった 2008 年 7 月、10 月においても、3 次の漸近展開では ATM 近辺で誤差が 3 セント程度、満期 1 年の OTM でも 15 セント程度に収まっており、実際の市場の Offer-Bid を勘案すればかなりの高精度な近似が得られていることが分かる。これらの結果により、平均オプションについて漸近展開法を用いることで、確率ボラティリティ・モデルの下で高速・高精度なプライシングが可能であると考えられる。

5 まとめ

確率ボラティリティ・モデルの下での平均オプション価格に対する漸近展開による近似精度について、実務で頻繁に平均オプションが用いられるコモディティを対象に検証を行った。漸近展開による手法は、微積分の簡単な演算により比較的容易に実装可能であり、その精度についても良いことが確認された。さらに計算時間に関しては、仮に数値積分を用いたとしても、モンテカルロ法やその他の手法と比較して非常に高速なプライシングが可能であることが分かった。また、実際に取引されているコモディティ平均オプションは平均参照期間などの点で本稿で分析したものと若干異なるが、これらに対しても多少煩雑になるものの同様の近似計算が可能である。今回は NYMEX に上場されている WTI オプションに対して簡易的なカリブレーションを行い、その精度を確認したが、その他の原資産に対しても同様の方法が有効であると考えられる。

参考文献

- [1] L.Andersen and V.Piterbarg, *Moment Explosions in Stochastic Volatility Models*, Finance and Stochastics, Vol.11, 2007, 29-50.
- [2] B.Dupire, *Pricing with a smile*, Risk, 7(1), 1994.
- [3] P.S.Hagan, D.Kumar, A.S.Lesniewski and D.E.Woodward, *Managing smile risk*, Willmott Magazine, 2002, 84-108.
- [4] S.Heston, *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options*, Review of financial studies, 6, 1993, 327-343.
- [5] Kunitomo, N. and Takahashi, A., *On Validity of the Asymptotic Expansion Approach in Contingent Claim Analysis*, Annals of Applied Probability, Vol.13(3), 2003.
- [6] P.H.Labordere, *A General Asymptotic Implied Volatility for Stochastic Volatility Models*, cond-mat/0504317, 2006.

- [7] P.H.Labordere, *Analysis, Geometry and Modeling in Finance : Advanced Methods in Options Pricing*, Chapman and Hall, 2008.
- [8] Ninomiya, S. and Victoir, N., *Weak Approximation of Stochastic Differential Equations and Application to Derivative Pricing*, 2006.
- [9] Takahashi, A., *Essays on the Valuation Problems of Contingent Claims*, Unpublished Ph.D. Dissertation, Haas School of Business, University of California, Berkeley, 1995.
- [10] Takahashi, A., *An Asymptotic Expansion Approach to Pricing Contingent Claims, Asia-Pacific Financial Markets*, Vol. 6, 1999, 115-151.
- [11] Takahashi, A. and Yoshida, N., *An Asymptotic Expansion Scheme for Optimal Investment Problems*, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, Vol.7(2), 2004, 153-188.
- [12] Takahashi, A. and Yoshida, N., *Monte Carlo Simulation with Asymptotic Method*, *Journal of Japan Statistical Society* , Vol. 35(2), 2005, 171-203.
- [13] Watanabe, S., *Analysis of Wiener Functionals (Malliavin Calculus) and Its Applications to Heat Kernels*, *The Annals of Probability*, Vol.15, 1987, 1-39.
- [14] Yoshida, N., *Asymptotic Expansion for Small Diffusions via the Theory of Malliavin- Watanabe*, *Probability Theory and Related Fields*, Vol. 92, 1992a, 275-311.
- [15] Yoshida, N., *Asymptotic Expansions for Statistics Related to Small Diffusions*, *Journal of Japan Statistical Society*, Vol.22, 1992b, 139-159.

A 平均オプション推定結果

モンテカルロ法との比較を行った数値検証結果について記載する。検証に用いたパラメータに関しては4節を参照のこと。

A.1 λ -SABR モデルの各パラメータにおける平均オプションの推定結果

Case	行使価格	MC	漸近展開			差額		
			1st	2nd	3rd	1st	2nd	3rd
i	70 Put	0.237	0.293	0.229	0.242	0.056	-0.007	0.005
	90 Put	2.958	3.031	2.950	2.958	0.072	-0.008	-0.000
	100 Call	6.919	6.910	6.910	6.915	-0.009	-0.009	-0.004
	110 Call	1.183	1.066	1.163	1.175	-0.117	-0.020	-0.008
	130 Call	0.024	0.010	0.017	0.021	-0.014	-0.007	-0.003
ii	70 Put	0.132	0.293	0.091	0.134	0.160	-0.042	0.001
	90 Put	2.774	3.031	2.775	2.770	0.257	0.001	-0.003
	100 Call	6.904	6.910	6.910	6.900	0.005	0.005	-0.005
	110 Call	1.400	1.066	1.376	1.394	-0.334	-0.024	-0.006
	130 Call	0.069	0.010	0.033	0.056	-0.059	-0.036	-0.014
iii	70 Put	0.335	0.300	0.320	0.338	-0.034	-0.015	0.004
	90 Put	3.104	3.058	3.083	3.103	-0.045	-0.021	-0.001
	100 Call	6.963	6.943	6.943	6.959	-0.020	-0.020	-0.004
	110 Call	1.082	1.082	1.052	1.076	0.001	-0.029	-0.006
	130 Call	0.012	0.010	0.008	0.011	-0.002	-0.004	-0.001
iv	70 Put	0.308	0.293	0.330	0.318	-0.016	0.021	0.010
	90 Put	3.051	3.031	3.077	3.053	-0.020	0.026	0.002
	100 Call	6.888	6.910	6.910	6.885	0.022	0.022	-0.003
	110 Call	0.999	1.066	1.009	0.989	0.067	0.010	-0.010
	130 Call	0.006	0.010	0.006	0.004	0.004	-0.001	-0.002
v	70 Put	0.185	0.293	0.154	0.189	0.108	-0.031	0.004
	90 Put	2.879	3.031	2.855	2.877	0.151	-0.024	-0.003
	100 Call	6.933	6.910	6.910	6.929	-0.023	-0.023	-0.005
	110 Call	1.315	1.066	1.278	1.309	-0.250	-0.037	-0.007
	130 Call	0.047	0.010	0.026	0.039	-0.037	-0.021	-0.009

Case	行使価格	MC	漸近展開			差額		
			1st	2nd	3rd	1st	2nd	3rd
vi	70 Put	0.017	0.017	0.014	0.018	-0.001	-0.003	0.001
	90 Put	1.230	1.234	1.216	1.230	0.004	-0.014	-0.000
	100 Call	4.618	4.607	4.607	4.616	-0.012	-0.012	-0.003
	110 Call	0.222	0.195	0.207	0.219	-0.027	-0.016	-0.004
	130 Call	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000	-0.000
vii	70 Put	1.554	1.937	1.586	1.568	0.383	0.031	0.014
	90 Put	6.493	6.716	6.517	6.493	0.223	0.025	-0.000
	100 Call	10.982	11.000	11.000	10.977	0.018	0.018	-0.005
	110 Call	4.089	3.773	4.099	4.074	-0.316	0.010	-0.015
	130 Call	0.612	0.381	0.585	0.597	-0.231	-0.026	-0.015
viii	70 Put	0.181	0.293	0.179	0.179	0.112	-0.001	-0.001
	90 Put	2.878	3.031	2.887	2.874	0.153	0.009	-0.003
	100 Call	6.904	6.910	6.910	6.899	0.006	0.006	-0.004
	110 Call	1.234	1.066	1.240	1.230	-0.169	0.006	-0.004
	130 Call	0.028	0.010	0.023	0.028	-0.018	-0.005	-0.000
ix	70 Put	0.420	0.293	0.330	0.453	-0.127	-0.090	0.034
	90 Put	3.185	3.031	3.077	3.205	-0.154	-0.108	0.020
	100 Call	7.009	6.910	6.910	7.011	-0.099	-0.099	0.002
	110 Call	1.188	1.066	1.009	1.163	-0.123	-0.180	-0.025
	130 Call	0.045	0.010	0.006	0.027	-0.035	-0.040	-0.018
x	70 Put	0.245	0.293	0.236	0.252	0.048	-0.009	0.007
	90 Put	2.969	3.031	2.958	2.969	0.061	-0.011	0.000
	100 Call	6.921	6.910	6.910	6.917	-0.011	-0.011	-0.004
	110 Call	1.179	1.066	1.153	1.170	-0.113	-0.025	-0.009
	130 Call	0.024	0.010	0.016	0.020	-0.015	-0.008	-0.004
xi	70 Put	0.228	0.293	0.223	0.232	0.065	-0.006	0.004
	90 Put	2.947	3.031	2.942	2.946	0.084	-0.005	-0.001
	100 Call	6.917	6.910	6.910	6.912	-0.007	-0.007	-0.004
	110 Call	1.188	1.066	1.173	1.181	-0.123	-0.015	-0.007
	130 Call	0.024	0.010	0.018	0.021	-0.014	-0.006	-0.003
xii	70 Put	1.099	1.306	1.096	1.119	0.207	-0.003	0.020
	90 Put	5.445	5.575	5.439	5.448	0.131	-0.006	0.004
	100 Call	9.783	9.772	9.772	9.779	-0.011	-0.011	-0.004
	110 Call	3.104	2.860	3.073	3.088	-0.244	-0.031	-0.015
	130 Call	0.322	0.186	0.279	0.303	-0.136	-0.043	-0.019

A.2 λ -SABR モデルのカリブレーションされたパラメータでの推定結果

日付	満期	行使価格	MC	漸近展開			差額		
				1st	2nd	3rd	1st	2nd	3rd
2007/10/01	0.5Y	55 Put	0.04	0.01	0.02	0.04	-0.03	-0.02	0.00
		75 Call	3.70	3.64	3.65	3.70	-0.06	-0.05	0.01
		95 Call	0.06	0.02	0.01	0.05	-0.04	-0.05	-0.01
	1Y	55 Put	0.24	0.11	0.15	0.27	-0.12	-0.09	0.03
		75 Call	3.65	3.54	3.54	3.66	-0.11	-0.11	0.01
		95 Call	0.20	0.08	0.05	0.16	-0.12	-0.15	-0.04
	1.5Y	55 Put	0.67	0.54	0.57	0.70	-0.13	-0.09	0.04
		75 Call	3.10	3.00	2.98	3.10	-0.10	-0.12	0.00
		95 Call	0.16	0.05	0.03	0.12	-0.11	-0.13	-0.04
2008/07/01	0.5Y	120 Put	2.24	2.53	1.91	2.28	0.29	-0.33	0.04
		140 Call	11.09	10.92	10.83	11.10	-0.17	-0.26	0.01
		160 Call	4.37	3.43	4.01	4.35	-0.93	-0.36	-0.02
	1Y	120 Put	4.75	5.00	4.11	4.87	0.25	-0.64	0.11
		140 Call	13.58	13.06	13.01	13.63	-0.53	-0.57	0.05
		160 Call	7.07	5.48	6.32	7.06	-1.59	-0.74	-0.00
	1.5Y	120 Put	3.28	3.55	2.96	3.32	0.28	-0.32	0.04
		140 Call	9.82	9.55	9.56	9.82	-0.27	-0.26	0.00
		160 Call	3.77	2.80	3.40	3.75	-0.97	-0.38	-0.02
2008/10/01	0.5Y	80 Put	1.55	2.04	1.44	1.57	0.49	-0.11	0.02
		100 Call	8.08	7.97	8.00	8.08	-0.10	-0.07	-0.00
		120 Call	2.57	1.82	2.43	2.56	-0.75	-0.15	-0.01
	1Y	80 Put	2.82	3.55	2.62	2.87	0.73	-0.21	0.05
		100 Call	11.35	11.24	11.19	11.37	-0.11	-0.17	0.01
		120 Call	5.15	4.00	4.89	5.13	-1.14	-0.25	-0.02
	1.5Y	80 Put	3.66	4.50	3.37	3.74	0.84	-0.29	0.08
		100 Call	13.31	13.19	13.06	13.34	-0.12	-0.25	0.03
		120 Call	6.87	5.53	6.52	6.87	-1.35	-0.35	-0.01

A.3 Heston モデルのカリブレーションされたパラメータでの推定結果

日付	満期	行使価格	MC	漸近展開			差額		
				1st	2nd	3rd	1st	2nd	3rd
2007/10/01	0.5Y	55 Put	0.03	0.02	0.03	0.04	-0.01	0.00	0.01
		75 Call	3.74	3.85	3.86	3.74	0.11	0.12	-0.00
		95 Call	0.05	0.04	0.02	0.03	-0.01	-0.03	-0.01
	1Y	55 Put	0.22	0.20	0.26	0.27	-0.02	0.04	0.05
		75 Call	3.68	3.96	3.95	3.67	0.28	0.27	-0.01
		95 Call	0.17	0.14	0.09	0.11	-0.02	-0.07	-0.05
	1.5Y	55 Put	0.66	0.63	0.70	0.71	-0.02	0.04	0.05
		75 Call	3.12	3.41	3.38	3.10	0.29	0.27	-0.01
		95 Call	0.13	0.10	0.06	0.08	-0.03	-0.07	-0.04
2008/07/01	0.5Y	120 Put	2.26	2.94	2.29	2.21	0.67	0.03	-0.05
		140 Call	11.14	11.51	11.42	11.12	0.37	0.28	-0.02
		160 Call	4.34	3.90	4.49	4.34	-0.43	0.15	0.01
	1Y	120 Put	4.85	6.17	5.18	4.70	1.32	0.33	-0.15
		140 Call	13.66	14.45	14.40	13.61	0.79	0.74	-0.05
		160 Call	7.06	6.67	7.60	7.07	-0.39	0.54	0.01
	1.5Y	120 Put	3.30	3.97	3.36	3.25	0.67	0.06	-0.05
		140 Call	9.84	10.11	10.12	9.83	0.28	0.29	-0.01
		160 Call	3.72	3.21	3.83	3.73	-0.50	0.11	0.01
2008/10/01	0.5Y	80 Put	1.56	2.19	1.57	1.54	0.63	0.01	-0.02
		100 Call	8.08	8.19	8.22	8.08	0.11	0.14	-0.00
		120 Call	2.55	1.96	2.58	2.56	-0.59	0.04	0.01
	1Y	80 Put	2.87	3.97	2.98	2.80	1.10	0.11	-0.07
		100 Call	11.39	11.79	11.73	11.37	0.40	0.34	-0.02
		120 Call	5.15	4.44	5.38	5.17	-0.70	0.23	0.02
	1.5Y	80 Put	3.75	5.20	3.97	3.63	1.45	0.22	-0.12
		100 Call	13.38	14.05	13.92	13.34	0.68	0.54	-0.04
		120 Call	6.90	6.28	7.35	6.93	-0.62	0.45	0.03

B 条件付期待値計算公式

以下では，本論において解説した，漸近展開による平均オプションなどのデリバティブの価値評価において必要となる，条件付期待値計算に関する公式を与える． W を m 次元ブラウン運動とし， $q_i : [0, T] \mapsto \mathbf{R}^m, i = 1, 2, 3, 4, 5$ を時間に依存する非確率的な（確定的な）関数とする．また $\Sigma = \int_0^T q'_{1v} q_{1v} dv$ とし， z' を z の転置とする．また $0 < \Sigma < \infty$ を仮定するとき次の等式が成り立つ．

1.

$$\mathbf{E} \left[\int_0^T q'_{2t} dW_t \mid \int_0^T q'_{1v} dW_v = x \right] = \left(\int_0^T q'_{2t} q_{1t} dt \right) \frac{H_1(x; \Sigma)}{\Sigma}$$

2.

$$\mathbf{E} \left[\int_0^T \int_0^t q'_{2u} dW_u q'_{3t} dW_t \mid \int_0^T q'_{1v} dW_v = x \right] = \left(\int_0^T \int_0^t q'_{2u} q_{1u} du q'_{3t} q_{1t} dt \right) \frac{H_2(x; \Sigma)}{\Sigma^2}$$

3.

$$\mathbf{E} \left[\left(\int_0^T q'_{2u} dW_u \right) \left(\int_0^T q'_{3s} dW_s \right) \mid \int_0^T q'_{1v} dW_v = x \right] = \left(\int_0^T q'_{2u} q_{1u} du \right) \left(\int_0^T q'_{3s} q_{1s} ds \right) \frac{H_2(x; \Sigma)}{\Sigma^2} + \int_0^T q'_{2t} q_{3t} dt$$

4.

$$\mathbf{E} \left[\int_0^T \int_0^t \int_0^s q'_{2u} dW_u q'_{3s} dW_s q'_{4t} dW_t \mid \int_0^T q'_{1v} dW_v = x \right] = \left(\int_0^T q'_{4t} q_{1t} \int_0^t q'_{3s} q_{1s} \int_0^s q'_{2u} q_{1u} du ds dt \right) \frac{H_3(x; \Sigma)}{\Sigma^3}$$

5.

$$\mathbf{E} \left[\int_0^T \left(\int_0^t q'_{2u} dW_u \right) \left(\int_0^t q'_{3s} dW_s \right) q'_{4t} dW_t \mid \int_0^T q'_{1v} dW_v = x \right] = \left\{ \int_0^T \left(\int_0^t q'_{2u} q_{1u} du \right) \left(\int_0^t q'_{3s} q_{1s} ds \right) q'_{4t} q_{1t} dt \right\} \frac{H_3(x; \Sigma)}{\Sigma^3} + \left(\int_0^T \int_0^t q'_{2u} q_{3u} du q'_{4t} q_{1t} dt \right) \frac{H_1(x; \Sigma)}{\Sigma}$$

6.

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[\left(\int_0^T \int_0^t q'_{2s} dW_s q'_{3t} dW_t \right) \left(\int_0^T q'_{4u} dW_u \right) \mid \int_0^T q'_{1v} dW_v = x \right] = \\ & \left(\int_0^T q'_{3t} q_{1t} \int_0^t q'_{2s} q_{1s} ds dt \right) \left(\int_0^T q'_{4u} q_{1u} du \right) \frac{H_3(x; \Sigma)}{\Sigma^3} \\ & + \left(\int_0^T q'_{3t} q_{1t} \int_0^t q'_{2s} q_{4s} ds dt + \int_0^T q'_{3t} q_{4t} \int_0^t q'_{2s} q_{1s} ds dt \right) \frac{H_1(x; \Sigma)}{\Sigma} \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[\left(\int_0^T \int_0^t q'_{2s} dW_s q'_{3t} dW_t \right) \left(\int_0^T \int_0^r q'_{4u} dW_u q'_{5r} dW_r \right) \mid \int_0^T q'_{1v} dW_v = x \right] = \\ & \left(\int_0^T q'_{3t} q_{1t} \int_0^t q'_{2s} q_{1s} ds dt \right) \left(\int_0^T q'_{5r} q_{1r} \int_0^r q'_{4u} q_{1u} du dr \right) \frac{H_4(x; \Sigma)}{\Sigma^4} \\ & + \left\{ \int_0^T q'_{3t} q_{1t} \int_0^t q'_{5r} q_{1r} \int_0^r q'_{2u} q_{4u} du dr dt + \int_0^T q'_{5t} q_{1t} \int_0^t q'_{3r} q_{1r} \int_0^r q'_{2u} q_{4u} du dr dt \right. \\ & + \int_0^T q'_{3t} q_{1t} \int_0^t q'_{2r} q_{5r} \int_0^r q'_{4u} q_{1u} du dr dt + \int_0^T q'_{3t} q_{5t} \left(\int_0^t q'_{2s} q_{1s} ds \right) \left(\int_0^t q'_{4u} q_{1u} du \right) dt \\ & \left. + \int_0^T q'_{5r} q_{1r} \int_0^r q'_{3u} q_{4u} \int_0^u q'_{2s} q_{1s} ds du dr \right\} \frac{H_2(x; \Sigma)}{\Sigma^2} \\ & + \int_0^T \int_0^t q'_{2u} q_{4u} du q'_{3t} q_{5t} dt \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[\left(\int_0^T q'_{2t} dW_t \right) \left(\int_0^T q'_{3s} dW_s \right) \left(\int_0^T \int_0^r q'_{4u} dW_u q'_{5r} dW_r \right) \mid \int_0^T q'_{1v} dW_v = x \right] = \\ & \left(\int_0^T q'_{2t} q_{1t} dt \right) \left(\int_0^T q'_{3s} q_{1s} ds \right) \left(\int_0^T q'_{5r} q_{1r} \int_0^r q'_{4u} q_{1u} du dr \right) \frac{H_4(x; \Sigma)}{\Sigma^4} \\ & + \left\{ \left(\int_0^T q'_{3s} q_{1s} ds \right) \left(\int_0^T q'_{2r} q_{5r} \int_0^r q'_{4u} q_{1u} du dr \right) + \left(\int_0^T q'_{2t} q_{3t} dt \right) \left(\int_0^T q'_{5r} q_{1r} \int_0^r q'_{4u} q_{1u} du dr \right) \right. \\ & + \left(\int_0^T q'_{2t} q_{1t} dt \right) \left(\int_0^T q'_{5r} q_{1r} \int_0^r q'_{3s} q_{4s} ds dr \right) + \left(\int_0^T q'_{3t} q_{1t} dt \right) \left(\int_0^T q'_{5r} q_{1r} \int_0^r q'_{2u} q_{4u} du dr \right) \\ & \left. + \left(\int_0^T q'_{2t} q_{1t} dt \right) \left(\int_0^T q'_{3r} q_{5r} \int_0^r q'_{4u} q_{1u} du dr \right) \right\} \frac{H_2(x; \Sigma)}{\Sigma^2} \\ & + \int_0^T q'_{2t} q_{5t} \int_0^t q'_{3s} q_{4s} ds dt + \int_0^T q'_{3r} q_{5r} \int_0^r q'_{2u} q_{4u} du dr \end{aligned}$$

C より高次の漸近展開の計算方法

本節では，漸近展開の計算方法として，付録 B の条件付期待値の公式を用いずに計算できる方法を紹介する．本論では 3 次までの漸近展開の計算結果を示したが，この方法を用いれば，より高次の漸近展開の具体的な計算を，それに必要な条件付期待値の公式を導出することなく行うことが可能となる．

その例として，以下では，プレーン・バニラオプション (Plain-Vanilla Options) 及び平均オプションの 4 次までの漸近展開計算に必要な表現を与える．さらに， λ -SABR モデルの下でのプレーン・バニラオプションに対して 5 次までの漸近展開の数値計算を行い，その精度検証を行う．

C.1 より高次の漸近展開の導出

簡単のため，ここでは次のマルチンゲールとなる N 次元拡散過程 $S^{(\epsilon)} = (S^{(\epsilon),1}, \dots, S^{(\epsilon),N})$ の漸近展開を考える：

$$dS_t^{(\epsilon),i} = \epsilon \sum_{j=1}^d V_j^i(S_t^{(\epsilon)}, t) dW_t^j \quad (i = 1, \dots, N),$$

$$S_0^{(\epsilon)} = S_0 \in \mathbf{R}^N.$$

ここで $W = (W^1, \dots, W^d)$ は d 次元標準ブラウン運動を表し，また，各 $V_j^i : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ は滑らかで，それらの任意の階数の導関数が有界な関数とする．

注意．対象となる確率過程が必ずしもマルチンゲールでなくとも，適当な変数変換によってマルチンゲールに帰着出来ればよい．例えば，3.1 節などで取り上げた，次の λ -SABR モデルを考える．

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma(t)S(t)^\beta dW^1(t), \quad (19)$$

$$d\sigma(t) = \lambda(\theta - \sigma(t))dt + \nu_1\sigma(t)dW^1(t) + \nu_2\sigma(t)dW^2(t). \quad (20)$$

ここで， $\beta \in (0, 1]$ ，また，原資産とボラティリティの相関を $\rho \in [-1, 1]$ とすると， $\nu_1 = \rho\nu$ ， $\nu_2 = (\sqrt{1 - \rho^2})\nu$ と表すことができる．ただし， ν は正の実数とする．

特に， $\alpha = \lambda = 0$ の場合は SABR モデルと呼ばれる．SABR モデルにおいて， $\beta \in (0, 1)$ の時は S が 0 に到達する確率が 0 でなくなるため， $S = 0$ における境界条件が必要となる． $S = 0$ で吸収壁を仮定すれば弱解の一意性が言え，さらに S はマルチンゲールとなる．また， $\beta = 1$ の時は， $\rho \leq 0$ であれば弱解が一意的に存在し，さらに S がマルチンゲールとなる．(詳細は [1], [7]などを参照.)

さて，

$$\hat{S}(t) = e^{-\alpha t} S(t),$$

$$\hat{\sigma}(t) = e^{\lambda t} \sigma(t) - \theta(e^{\lambda t} - 1),$$

とおけば, $\hat{S}, \hat{\sigma}$ は

$$\begin{aligned} d\hat{S}(t) &= e^{\alpha(\beta-1)t}(e^{-\lambda t}\hat{\sigma}(t) + \theta(1 - e^{-\lambda t}))\hat{S}(t)^\beta dW_t^1, \\ d\hat{\sigma}(t) &= \nu(\hat{\sigma}(t) + \theta(e^{\lambda t} - 1))[\nu_1 dW^1(t) + \nu_2 dW^2(t)], \end{aligned}$$

となるためマルチンゲールとなる.

2節の結果を用いると, $S^{(\epsilon)}$ は $\epsilon \downarrow 0$ の時, 以下のように漸近展開される:

$$S_t^{(\epsilon)} = S_t^{(0)} + \epsilon A_{1t} + \frac{\epsilon^2}{2} A_{2t} + \frac{\epsilon^3}{6} A_{3t} + \frac{\epsilon^4}{24} A_{4t} + o(\epsilon^3).$$

ただし, $S_t^{(0)} = S_0$, A_1, A_2, A_3, A_4 は以下の確率微分方程式の解として与えられる:

$$\begin{aligned} dA_{1t} &= \sum_{j=1}^d V_j(S_t^{(0)}, t) dW_t^j, \\ dA_{2t} &= 2 \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^N A_{1t}^i \frac{\partial}{\partial x_i} V_j(S_t^{(0)}, t) dW_t^j, \\ dA_{3t} &= 3 \left\{ \sum_{i=1}^N A_{2t}^i \frac{\partial}{\partial x_i} V_j(S_t^{(0)}, t) + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N A_{1t}^i A_{1t}^k \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} V_j(S_t^{(0)}, t) \right\} dW_t^j, \\ dA_{4t} &= 4 \left\{ \sum_{i=1}^N A_{3t}^i \frac{\partial}{\partial x_i} V_j(S_t^{(0)}, t) + 3 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N A_{1t}^i A_{2t}^k \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} V_j(S_t^{(0)}, t) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N A_{1t}^i A_{1t}^k A_{1t}^l \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} V_j(S_t^{(0)}, t) \right\} dW_t^j. \end{aligned}$$

ここで, 各 A_{kt}^i ($i = 1, \dots, N, k = 1, 2, 3, 4$) は任意の次数のモーメントを持つことに注意しておく. 実際, A_{1t}^i は正規分布に従うことから明らかであり, A_{kt}^i ($k \geq 2$) は自身よりも低次の (k より小さい) 項の多項式の確率積分として表現されるため, 帰納的に任意の次数のモーメントが存在することを示すことが出来る.

ここで, $\xi \in \mathbb{R}$ に対し, 複素数値確率過程 $Z_t = Z_t^{(\xi)}$ を以下のように定義する:

$$Z_t^{(\xi)} = \exp\{(i\xi)A_{1t}^1 - \frac{1}{2}(i\xi)^2 \langle A_{1t}^1 \rangle_t\}.$$

$Z_t^{(\xi)}$ はマルチンゲールとなり, 次の確率微分方程式を満たす:

$$dZ_t^{(\xi)} = (i\xi) \sum_{j=1}^d V_j^1(S_t^{(0)}, t) Z_t^{(\xi)} dW_t^j.$$

また, 定義より,

$$\exp\{(i\xi)A_{1t}^1\} = Z_t^{(\xi)} \exp\{-\frac{\xi^2}{2} \Sigma_t\},$$

となることに注意しておく．ただし，

$$\Sigma_t := \int_0^t \sum_{j=1}^d V_j^1(S_s^{(0)}, t)^2 ds,$$

とおいた． $Z_t^{(\xi)}$ を用いると， $S_T^{(\epsilon),1}$ を正規化した $X_T^{(\epsilon)} = \frac{S_T^{(\epsilon),1} - S_T^{(0),1}}{\epsilon}$ の特性関数 $\psi_{X_T^{(\epsilon)}}(\xi)$ の ϵ^3 のオーダーまでの近似は，

$$\begin{aligned} \psi_{X_T^{(\epsilon)}}(\xi) &:= \mathbf{E}[\exp\{(i\xi)X_T^{(\epsilon)}\}] \\ &= \left\{ 1 + \epsilon \frac{(i\xi)}{2} \mathbf{E}[A_{2T}^1 Z_T] + \epsilon^2 \left\{ \frac{(i\xi)}{6} \mathbf{E}[A_{3T}^1 Z_T] + \frac{(i\xi)^2}{8} \mathbf{E}[(A_{2T}^1)^2 Z_T] \right\} \right. \\ &\quad \left. + \epsilon^3 \left\{ \frac{(i\xi)}{24} \mathbf{E}[A_{4T}^1 Z_T] + \frac{(i\xi)^2}{12} \mathbf{E}[A_{2T}^1 A_{3T}^1 Z_T] + \frac{(i\xi)^3}{48} \mathbf{E}[(A_{2T}^1)^3 Z_T] \right\} \right\} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2} \Sigma_T\right\} + o(\epsilon^3), \end{aligned}$$

と表わされる．この特性関数の近似の右辺を計算するためには各期待値を計算する必要があるが，以下で見ると，各期待値を時間の関数と見た時，それらが満たす常微分方程式を機械的に求めることが出来る．例として， $\mathbf{E}[A_{2T}^1 Z_T]$ の計算を考えてみよう． $\eta_{2,1}^i(t) := \mathbf{E}[A_{2t}^1 Z_t]$ とおく．伊藤の公式を用いると，

$$\begin{aligned} d(A_{2t}^1 Z_t) &= A_{2t}^1 dZ_t + Z_t dA_{2t}^1 + dA_{2t}^1 dZ_t \\ &= \left\{ 2(i\xi) \sum_{j=1}^d V_j^1(S_t^{(0)}, t) Z_t \sum_{i=1}^N A_{1t}^i \frac{\partial}{\partial x_i} V_j^1(S_t^{(0)}, t) \right\} dt \\ &\quad + \sum_{j=1}^d \left\{ (i\xi) V_j^1(S_t^{(0)}, t) A_{2t}^1 Z_t + 2 \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} V_j^1(S_t^{(0)}, t) A_{1t}^i Z_t \right\} dW_t^j. \end{aligned}$$

各 A_{kt}^i ， Z_t は任意の次数のモーメントを持つことに注意すると，右辺の第2項はマルチンゲールとなることが分かるから，両辺の期待値をとると， $\eta_{2,1}^i$ に関する次の常微分方程式が得られる：

$$\frac{d}{dt} \eta_{2,1}^i(t) = 2(i\xi) \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^N V_j^1(S_t^{(0)}, t) \frac{\partial}{\partial x_i} V_j^1(S_t^{(0)}, t) \eta_{1,1}^i(t).$$

ただし， $\eta_{1,1}^i(t) := \mathbf{E}[A_{1t}^i Z_t]$ とおいた．右辺の $\eta_{1,1}^i(t)$ も同様に伊藤の公式を用いれば，

$$\begin{aligned} d(A_{1t}^i Z_t) &= A_{1t}^i dZ_t + Z_t dA_{1t}^i + dA_{1t}^i dZ_t \\ &= (i\xi) \sum_{j=1}^d V_j^1(S_t^{(0)}, t) V_j^i(S_t^{(0)}, t) Z_t dt \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=1}^d \left\{ (i\xi) V_j^1(S_t^{(0)}, t) A_{1t}^i Z_t + V_j^i(S_t^{(0)}, t) Z_t \right\} dW_t^j.$$

従って,

$$\frac{d}{dt} \eta_{1,1}^i(t) = (i\xi) \sum_{j=1}^d V_j^1(S_t^{(0)}, t) V_j^i(S_t^{(0)}, t) \mathbf{E}[Z_t].$$

特に $\mathbf{E}[Z_t] = 1$ であるから,

$$\eta_{1,1}^i(t) = (i\xi) \int_0^t \sum_{j=1}^d V_j^1(S_s^{(0)}, s) V_j^i(S_s^{(0)}, s) ds,$$

となる．他の項に関しても,

$$\begin{aligned} \eta_{2,2}^{i,k}(t) &= \mathbf{E}[A_{1t}^i A_{1t}^k Z_t], & \eta_{3,1}^i(t) &= \mathbf{E}[A_{3t}^i Z_t], & \eta_{3,2}^{i,k}(t) &= \mathbf{E}[A_{1t}^i A_{2t}^k Z_t], \\ \eta_{3,3}^{i,k,l}(t) &= \mathbf{E}[A_{1t}^i A_{1t}^k A_{1t}^l Z_t], & \eta_{4,1}^i(t) &= \mathbf{E}[A_{4t}^i Z_t], & \eta_{4,2,1}^{i,k}(t) &= \mathbf{E}[A_{1t}^i A_{3t}^k Z_t], \\ \eta_{4,2,2}^{i,k}(t) &= \mathbf{E}[A_{2t}^i A_{2t}^k Z_t], & \eta_{4,3}^{i,k,l}(t) &= \mathbf{E}[A_{1t}^i A_{1t}^k A_{2t}^l Z_t], & \eta_{5,2}^{i,k}(t) &= \mathbf{E}[A_{2t}^i A_{3t}^k Z_t], \\ \eta_{5,3}^{i,k,l}(t) &= \mathbf{E}[A_{1t}^i A_{2t}^k A_{2t}^l Z_t], & \eta_{6,3}^{i,k,l}(t) &= \mathbf{E}[A_{2t}^i A_{2t}^k A_{2t}^l Z_t], \end{aligned}$$

などと定義すれば, 全く同様の方法によってこれらのみならず常微分方程式系を導出する事が出来る．重要な点として, 各常微分方程式の右辺にはその項よりも次数の低い項しか現れないことに注意する．この階層構造のため, これらの常微分方程式は解析的, あるいは数値的にも比較的簡単に計算する事が可能である．実際に ϵ^3 のオーダー (原資産価格 $S_T^{(\epsilon)}$ の ϵ^4 のオーダー) までの計算を行った結果をまとめると以下ようになる．

命題 C.1. $X_T^{(\epsilon)}$ の特性関数の ϵ^3 のオーダーまでの漸近展開は以下のように与えられる．

$$\begin{aligned} \psi_{X_T^{(\epsilon)}}(\xi) &= \left\{ 1 + \epsilon \frac{(i\xi)}{2} \eta_{2,1}^1(T) + \epsilon^2 \left\{ \frac{(i\xi)}{6} \eta_{3,1}^1(T) + \frac{(i\xi)^2}{8} \eta_{4,2,2}^{1,1}(T) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \epsilon^3 \left\{ \frac{(i\xi)}{24} \eta_{4,1}^1(T) + \frac{(i\xi)^2}{12} \eta_{5,2}^{1,1}(T) + \frac{(i\xi)^3}{48} \eta_{6,3}^{1,1,1}(T) \right\} \right\} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2} \Sigma_T\right\} + o(\epsilon^3). \end{aligned} \tag{21}$$

ここで $\eta_{2,1}^1(T), \eta_{3,1}^1(T), \eta_{4,2,2}^{1,1}(T), \eta_{4,1}^1(T), \eta_{5,2}^{1,1}(T), \eta_{6,3}^{1,1,1}(T)$ は以下の常微分方程式系を解くことで得られる．

$$\eta_{1,1}^i(t) = (i\xi) \int_0^t \sum_{j=1}^d V_j^1(S_s^{(0)}, s) V_j^i(S_s^{(0)}, s) ds,$$

$$\begin{aligned}
\eta_{2,1}^i(t) &= (i\xi) \int_0^t \sum_{j=1}^d \sum_{i'=1}^N V_j^1(S_t^{(0)}, t) \frac{\partial}{\partial x_{i'}} V_j^i(S_t^{(0)}, t) \eta_{1,1}^{i'}(s) ds, \\
\eta_{2,2}^{i,k}(t) &= (i\xi) \int_0^t \sum_{j=1}^d \left\{ V_j^1(S_s^{(0)}, s) V_j^i(S_s(0), s) \eta_{1,1}^k(s) + V_j^1(S_s^{(0)}, s) V_j^k(S_s^{(0)}, s) \eta_{1,1}^i(s) \right\} ds \\
&\quad + \int_0^t \sum_{j=1}^d V_j^i(S_s^{(0)}, s) V_j^k(S_s^{(0)}, s) ds, \\
\eta_{3,1}^i(t) &= (i\xi) \int_0^t \sum_{j=1}^d \left\{ 3 \sum_{i'=1}^N V_j^1(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial}{\partial x_{i'}} V_j^i(S_t^{(0)}, t) \eta_{2,1}^{i'}(s) \right. \\
&\quad \left. + 3 \sum_{i'=1}^N \sum_{k'=1}^N V_j^1(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial^2}{\partial x_{i'} \partial x_{k'}} V_j^i(S_s^{(0)}, s) \eta_{2,2}^{i',k'}(s) \right\} ds, \\
\eta_{3,2}^{i,k}(t) &= (i\xi) \int_0^t \sum_{j=1}^d \left\{ V_j^1(S_s^{(0)}, s) V_j^i(S_s^{(0)}, s) \eta_{2,1}^k(s) \right. \\
&\quad \left. + 2 \sum_{i'=1}^N V_j^1(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial}{\partial x_{i'}} V_j^k(S_s^{(0)}, s) \eta_{2,2}^{i,i'}(s) \right\} ds \\
&\quad + \int_0^t \sum_{j=1}^d \left\{ 2 \sum_{i'=1}^N V_j^i(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial}{\partial x_{i'}} V_j^k(S_t^{(0)}, t) \eta_{1,1}^{i'}(s) \right\} ds, \\
\eta_{3,3}^{i,k,l}(t) &= (i\xi) \int_0^t \sum_{j=1}^d \left\{ V_j^1(S_s^{(0)}, s) V_j^i(S_s(0), s) \eta_{2,2}^{k,l}(s) \right. \\
&\quad \left. + V_j^1(S_s^{(0)}, s) V_j^k(S_s^{(0)}, s) \eta_{2,2}^{i,l}(s) + V_j^1(S_s^{(0)}, s) V_j^l(S_s^{(0)}, s) \eta_{2,2}^{i,k}(s) \right\} ds \\
&\quad + \int_0^t \sum_{j=1}^d \left\{ V_j^k(S_s^{(0)}, s) V_j^l(S_s(0), s) \eta_{1,1}^i(s) \right. \\
&\quad \left. + V_j^i(S_s^{(0)}, s) V_j^l(S_s(0), s) \eta_{1,1}^k(s) + V_j^i(S_s^{(0)}, s) V_j^k(S_s(0), s) \eta_{1,1}^l(s) \right\} ds, \\
\eta_{4,1}^i(t) &= (i\xi) \int_0^t \sum_{j=1}^d \left\{ 3 \sum_{i'=1}^N V_j^1(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial}{\partial x_{i'}} V_j^i(S_t^{(0)}, t) \eta_{3,1}^{i'}(s) \right. \\
&\quad \left. + 12 \sum_{i'=1}^N \sum_{k'=1}^N V_j^1(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial^2}{\partial x_{i'} \partial x_{k'}} V_j^i(S_s^{(0)}, s) \eta_{3,2}^{i',k'}(s) \right. \\
&\quad \left. + 3 \sum_{i'=1}^N \sum_{k'=1}^N \sum_{l'=1}^N V_j^1(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial^3}{\partial x_{i'} \partial x_{k'} \partial x_{l'}} V_j^i(S_s^{(0)}, s) \eta_{3,3}^{i',k',l'}(s) \right\} ds, \\
\eta_{4,2,1}^{i,k}(t) &= (i\xi) \int_0^t \sum_{j=1}^d \left\{ V_j^1(S_s^{(0)}, s) V_j^i(S_s^{(0)}, s) \eta_{3,1}^k(s) + 3 \sum_{i'=1}^N V_j^1(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial}{\partial x_{i'}} V_j^k(S_s^{(0)}, s) \eta_{3,2}^{i,i'}(s) \right\} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +3 \sum_{i'=1}^N \sum_{k'=1}^N V_j^1(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial^2}{\partial x_{i'} \partial x_{k'}} V_j^k(S_s^{(0)}, s) \eta_{3,3}^{i',k'}(s) \Big\} ds \\
& + \int_0^t \sum_{j=1}^d \left\{ 3 \sum_{i'=1}^N V_j^i(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial}{\partial x_{i'}} V_j^k(S_s^{(0)}, s) \eta_{2,1}^{i'}(s) \right. \\
& \left. + 3 \sum_{i'=1}^N \sum_{k'=1}^N V_j^i(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial^2}{\partial x_{i'} \partial x_{k'}} V_j^k(S_s^{(0)}, s) \eta_{2,2}^{i',k'}(s) \right\} ds, \\
\eta_{4,2,2}^{i,k}(t) &= (i\xi) \int_0^t \sum_{j=1}^d \left\{ 2 \sum_{i'=1}^N V_j^1(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial}{\partial x_{i'}} V_j^i(S_s^{(0)}, s) \eta_{3,2}^{i',k}(s) \right. \\
& + 2 \sum_{i'=1}^N V_j^1(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial}{\partial x_{i'}} V_j^k(S_s^{(0)}, s) \eta_{3,2}^{i',i}(s) \Big\} ds \\
& + \int_0^t \sum_{j=1}^d \left\{ 4 \sum_{i'=1}^N \sum_{k'=1}^N \frac{\partial}{\partial x_{i'}} V_j^i(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial}{\partial x_{k'}} V_j^k(S_s^{(0)}, s) \eta_{2,2}^{i',k'}(s) \right\} ds, \\
\eta_{4,3}^{i,k,l}(t) &= (i\xi) \int_0^t \sum_{j=1}^d \left\{ V_j^1(S_s^{(0)}, s) V_j^k(S_s^{(0)}, s) \eta_{3,2}^{i,l}(s) + V_j^1(S_s^{(0)}, s) V_j^i(S_s^{(0)}, s) \eta_{3,2}^{k,l}(s) \right. \\
& + 2 \sum_{i'=1}^N V_j^1(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial}{\partial x_{i'}} V_j^l(S_s^{(0)}, s) \eta_{3,3}^{i,k,i'}(s) \Big\} ds \\
& + \int_0^t \sum_{j=1}^d \left\{ V_j^i(S_s^{(0)}, s) V_j^k(S_s^{(0)}, s) \eta_{2,1}^l(s) \right. \\
& + 2 \sum_{i'=1}^N V_j^k(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial}{\partial x_{i'}} V_j^l(S_s^{(0)}, s) \eta_{2,2}^{i,i'}(s) + 2 \sum_{i'=1}^N V_j^i(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial}{\partial x_{i'}} V_j^l(S_s^{(0)}, s) \eta_{2,2}^{k,i'}(s) \Big\} ds, \\
\eta_{5,2}^{i,k}(t) &= (i\xi) \int_0^t \sum_{j=1}^d \left\{ 2 \sum_{i'=1}^N V_j^1(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial}{\partial x_{i'}} V_j^i(S_s^{(0)}, s) \eta_{4,2,1}^{k,i'}(s) \right. \\
& + 3 \sum_{i'=1}^N V_j^1(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial}{\partial x_{i'}} V_j^k(S_s^{(0)}, s) \eta_{4,2,2}^{i,i'}(s) \\
& + 3 \sum_{i'=1}^N \sum_{k'=1}^N V_j^1(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial^2}{\partial x_{i'} \partial x_{k'}} V_j^k(S_s^{(0)}, s) \eta_{4,3}^{i',k',i}(s) \Big\} ds \\
& + \int_0^t \sum_{j=1}^d \left\{ 6 \sum_{i'=1}^N \sum_{k'=1}^N \frac{\partial}{\partial x_{i'}} V_j^i(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial}{\partial x_{k'}} V_j^k(S_s^{(0)}, s) \eta_{3,2}^{i',k'}(s) \right. \\
& \left. + 6 \sum_{i'=1}^N \sum_{k'=1}^N \sum_{l'=1}^N \frac{\partial}{\partial x_{i'}} V_j^i(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial^2}{\partial x_{k'} \partial x_{l'}} V_j^k(S_s^{(0)}, s) \eta_{3,3}^{i',k',l'}(s) \right\} ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{5,3}^{i,k,l}(t) &= (i\xi) \int_0^t \sum_{j=1}^d \left\{ V_j^1(S_s^{(0)}, s) V_j^i(S_s^{(0)}, s) \eta_{4,2}^{k,l}(s) \right. \\
&\quad + 2 \sum_{i'=1}^N V_j^1(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial}{\partial x_{i'}} V_j^l(S_s^{(0)}, s) \eta_{4,3}^{i',i,k}(s) \\
&\quad \left. + 2 \sum_{i'=1}^N V_j^1(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial}{\partial x_{i'}} V_j^k(S_s^{(0)}, s) \eta_{4,3}^{i',i,l}(s) \right\} ds \\
&\quad + \int_0^t \sum_{j=1}^d \left\{ 2 \sum_{i'=1}^N V_j^i(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial}{\partial x_{i'}} V_j^l(S_s^{(0)}, s) \eta_{3,2}^{i',k}(s) \right. \\
&\quad + 2 \sum_{i'=1}^N V_j^i(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial}{\partial x_{i'}} V_j^k(S_s^{(0)}, s) \eta_{3,2}^{i',l}(s) \\
&\quad \left. + 4 \sum_{i'=1}^N \sum_{k'=1}^N \frac{\partial}{\partial x_{i'}} V_j^k(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial}{\partial x_{k'}} V_j^l(S_s^{(0)}, s) \eta_{3,3}^{i,i',k'}(s) \right\} ds, \\
\eta_{6,3}^{i,k,l}(t) &= (i\xi) \int_0^t \sum_{j=1}^d \left\{ 2 \sum_{i'=1}^N V_j^1(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial}{\partial x_{i'}} V_j^i(S_s^{(0)}, s) \eta_{5,3}^{i',k,l}(s) \right. \\
&\quad + 2 \sum_{i'=1}^N V_j^1(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial}{\partial x_{i'}} V_j^k(S_s^{(0)}, s) \eta_{5,3}^{i',i,l}(s) \\
&\quad \left. + 2 \sum_{i'=1}^N V_j^1(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial}{\partial x_{i'}} V_j^l(S_s^{(0)}, s) \eta_{5,3}^{i',i,k}(s) \right\} ds \\
&\quad + \int_0^t \sum_{j=1}^d \left\{ 4 \sum_{i'=1}^N \sum_{k'=1}^N \frac{\partial}{\partial x_{i'}} V_j^k(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial}{\partial x_{k'}} V_j^l(S_s^{(0)}, s) \eta_{4,3}^{i',k',i}(s) \right. \\
&\quad + 4 \sum_{i'=1}^N \sum_{k'=1}^N \frac{\partial}{\partial x_{i'}} V_j^i(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial}{\partial x_{k'}} V_j^l(S_s^{(0)}, s) \eta_{4,3}^{i',k',k}(s) \\
&\quad \left. + 4 \sum_{i'=1}^N \sum_{k'=1}^N \frac{\partial}{\partial x_{i'}} V_j^i(S_s^{(0)}, s) \frac{\partial}{\partial x_{k'}} V_j^k(S_s^{(0)}, s) \eta_{4,3}^{i',k',l}(s) \right\} ds.
\end{aligned}$$

常微分方程式系の構造から，各 $\eta_{k,\cdot}$ は $(i\xi)$ の k 次の多項式となることが分かる．従って，(21) を $(i\xi)$ に関して整理すれば，

$$\begin{aligned}
\psi_{X_T^{(\epsilon)}}(\xi) &= \{1 + \epsilon\{C_{23}(i\xi)^3\} + \epsilon^2\{C_{32}(i\xi)^2 + C_{34}(i\xi)^4 + C_{36}(i\xi)^6\} \\
&\quad + \epsilon^3\{C_{43}(i\xi)^3 + C_{45}(i\xi)^5 + C_{47}(i\xi)^7 + C_{49}(i\xi)^9\}\} \\
&\quad \times \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2}\Sigma_T\right\} + o(\epsilon^3), \tag{22}
\end{aligned}$$

となる．ただし $C_{23}, C_{32}, C_{34}, C_{36}, C_{43}, C_{45}, C_{47}, C_{49}$ は各項の係数をまとめて得られる $(i\xi)$ に依存しない定数である．

(22) より，特性関数 $\psi_{X_T^{(\epsilon)}}$ の漸近展開は正規分布の特性関数と $(i\xi)$ の多項式との積で表わされることが分かる．この時， $X_T^{(\epsilon)}$ の密度関数は $\psi_{X_T^{(\epsilon)}}$ を逆 Fourier 変換することにより求められるが，それは次の良く知られた関係式を用いて容易に計算できる：

$$\mathcal{F}^{-1}[(i\xi)^k e^{-\frac{\xi^2}{2}\Sigma}](x) = \frac{1}{\Sigma^k} H_k(x; \Sigma) n[x; 0, \Sigma].$$

ただし， $\mathcal{F}^{-1}[\cdot]$ は逆 Fourier 変換を表す作用素である．よって $X_T^{(\epsilon)}$ の密度関数の漸近展開は

$$\begin{aligned} f_{X_T^{(\epsilon)}}(x) &= n[x; 0, \Sigma_T] + \epsilon \left\{ \frac{C_{23}}{\Sigma_T^3} H_3(x; \Sigma_T) \right\} n[x; 0, \Sigma_T] \\ &\quad + \epsilon^2 \left\{ \frac{C_{32}}{\Sigma_T^2} H_2(x; \Sigma_T) + \frac{C_{34}}{\Sigma_T^4} H_4(x; \Sigma_T) + \frac{C_{36}}{\Sigma_T^6} H_6(x; \Sigma_T) \right\} n[x; 0, \Sigma_T] \\ &\quad + \epsilon^3 \left\{ \frac{C_{43}}{\Sigma_T^3} H_3(x; \Sigma_T) + \frac{C_{45}}{\Sigma_T^5} H_5(x; \Sigma_T) + \frac{C_{47}}{\Sigma_T^7} H_7(x; \Sigma_T) + \frac{C_{49}}{\Sigma_T^9} H_9(x; \Sigma_T) \right\} n[x; 0, \Sigma_T] \\ &\quad + o(\epsilon^3), \end{aligned} \tag{23}$$

で与えられる．この密度関数の表現を用いれば，例えば S^1 を原資産価格とする行使価格 K のヨーロピアン・コールオプションの現在価値は，

$$\begin{aligned} C(0) &= e^{-rT} \epsilon \mathbf{E}[(y + X_T^{(\epsilon)})^+] \\ &= e^{-rT} \left\{ \epsilon \int_{-y}^{\infty} (y + x) f_{X_T^{(\epsilon)}}(x) dx \right\}, \end{aligned}$$

と計算できる．また右辺に現れる積分は，Hermite 多項式の定義より得られる次の等式を用いて容易に計算できる：

$$\begin{aligned} \int_{-y}^{\infty} \frac{1}{\Sigma^k} H_k(x; \Sigma) n[x; 0, \Sigma] dx &= \frac{1}{\Sigma^{k-1}} H_{k-1}(-y; \Sigma) n[y; 0, \Sigma] \quad (k \geq 1), \\ \int_{-y}^{\infty} x \frac{1}{\Sigma^k} H_k(x; \Sigma) n[x; 0, \Sigma] dx &= -\frac{1}{\Sigma^{k-1}} y H_{k-1}(-y; \Sigma) n[y; 0, \Sigma] \\ &\quad + \frac{1}{\Sigma^{k-2}} H_{k-2}(-y; \Sigma) n[y; 0, \Sigma] \quad (k \geq 2). \end{aligned}$$

C.2 平均オプション価格の計算について

これまでマルチンゲール及びマルチンゲールに帰着できるような拡散過程に対する高次の漸近展開の計算方法を示したが，平均オプション価格を計算するときなどに必要となる，資産価格の経路 (path) に関する平均についての漸近展開はこの枠組みには含まれない．しかし，多少の修正を施すことによりこの場合にも上記と同様の方法が適用可能となる．

例として，次のように定義された $\tilde{S}^{(\epsilon)}$ の漸近展開について考える：

$$\tilde{S}_t^{(\epsilon)} := \int_0^t S_s^{(\epsilon)} ds.$$

$S^{(\epsilon)}$ は $\epsilon \downarrow 0$ の時以下のように漸近展開される:

$$\tilde{S}_t^{(\epsilon)} = \tilde{S}_t^{(0)} + \epsilon \tilde{A}_{1t} + \frac{\epsilon^2}{2} \tilde{A}_{2t} + \frac{\epsilon^3}{6} \tilde{A}_{3t} + \frac{\epsilon^4}{24} \tilde{A}_{4t} + o(\epsilon^3).$$

ただし, $\tilde{S}_t^{(0)}, \tilde{A}_{it}, (i = 1, 2, 3, 4)$ は以下のように与えられる:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_t^{(0)} &= \int_0^t S_s^{(0)} ds, \\ d\tilde{A}_{it} &= A_{it} dt. \end{aligned}$$

$T > 0$ を固定し, \tilde{A}_{1T}^1 に対し Fubini の定理を用いると,

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{1T}^1 &= \sum_{j=1}^d \int_0^T \int_0^t V_j^1(S_s^{(0)}, s) dW_s^j dt \\ &= \sum_{j=1}^d \int_0^T \tilde{V}_j^T(S_s^{(0)}, s) dW_s^j, \end{aligned}$$

となる. ただし,

$$\tilde{V}_j^T(S_t^{(0)}, t) := (T - t) V_j^1(S_t^{(0)}, t),$$

とおいた. ここで, \hat{A}_1^T を

$$d\hat{A}_{1t}^T = \sum_{j=1}^d \tilde{V}_j^T(S_t^{(0)}, t) dW_t^j, \quad \hat{A}_{10}^T = 0,$$

と定義する. $t = T$ では $\tilde{A}_{1T}^1 = \hat{A}_{1T}^T$ となることに注意する. この \hat{A}_1^T を用いて $\xi \in \mathbf{R}$ に対し, $Z_t := Z_t^{T, (\xi)}$ を

$$Z_t^{T, (\xi)} := \exp \left\{ (i\xi) \hat{A}_{1t}^T - \frac{1}{2} (i\xi)^2 \langle \hat{A}_1^T \rangle_t \right\},$$

と定義すると $Z_t^{T, (\xi)}$ はマルチンゲールとなり, 次の確率微分方程式をみたす:

$$dZ_t^{T, (\xi)} = (i\xi) \sum_{j=1}^d \tilde{V}_j^T(S_t^{(0)}, t) Z_t^{T, (\xi)} dW_t^j.$$

また,

$$\exp\{(i\xi) \tilde{A}_{1T}^1\} = Z_T^{T, (\xi)} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2} \tilde{\Sigma}_T\right\},$$

が成り立つ. ただし,

$$\tilde{\Sigma}_T := \int_0^T \sum_{j=1}^d \tilde{V}_j^T(S_t^{(0)}, t)^2 dt.$$

$Z_t^{T,(\xi)}$ を用いれば, $\tilde{S}_T^{(\epsilon),1}$ を正規化した $\tilde{X}_T^{(\epsilon)} = \frac{\tilde{S}_T^{(\epsilon),1} - \tilde{S}_T^{(0),1}}{\epsilon}$ の特性関数の漸近展開は,

$$\begin{aligned} \psi_{\tilde{X}_T^{(\epsilon)}}(\xi) = & \left\{ 1 + \epsilon \frac{(i\xi)}{2} \mathbf{E}[\tilde{A}_{2T}^1 Z_T^{T,(\xi)}] \right. \\ & + \epsilon^2 \left\{ \frac{(i\xi)}{6} \mathbf{E}[\tilde{A}_{3T}^1 Z_T^{T,(\xi)}] + \frac{(i\xi)^2}{8} \mathbf{E}[(\tilde{A}_{2T}^1)^2 Z_T^{T,(\xi)}] \right\} \\ & + \epsilon^3 \left\{ \frac{(i\xi)}{24} \mathbf{E}[\tilde{A}_{4T}^1 Z_T^{T,(\xi)}] + \frac{(i\xi)^2}{12} \mathbf{E}[\tilde{A}_{2T}^1 \tilde{A}_{3T}^1 Z_T^{T,(\xi)}] + \frac{(i\xi)^3}{48} \mathbf{E}[(\tilde{A}_{2T}^1)^3 Z_T^{T,(\xi)}] \right\} \left. \right\} \\ & \times \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2} \tilde{\Sigma}_T\right\} + o(\epsilon^3), \end{aligned}$$

と表現できる．右辺の各期待値は以前の場合と同様に伊藤の公式を用いることで, それらがみたす微分方程式を求める事が出来る．

C.3 λ -SABR モデルの数値計算結果

λ -SABR モデルを用いて高次の漸近展開の精度の検証を行う．対象とするモデルは

$$\begin{aligned} dS(t) &= \sigma(t)S(t)^\beta dW^1(t), \\ d\sigma(t) &= \lambda(\theta - \sigma(t))dt + \nu_1\sigma(t)dW^1(t) + \nu_2\sigma(t)dW^2(t), \end{aligned}$$

とする．ここで, $\nu_1 = \rho\nu$, $\nu_2 = (\sqrt{1-\rho^2})\nu$ である (S と σ の相関は $\rho \in [-1, 1]$.) このモデルのもとで, S を原資産とするヨーロピアン・コールオプション及びプット・オプションの価格について, 漸近展開の近似式の精度の検証を行う．漸近展開の近似式の導出には上で紹介した方法を用い, 5 次までの近似式を導出した．今回のケースでは計算する際に現れる常微分方程式は全て解析的に積分する事が出来ることに注意する．精度の比較のための真値にはモンテカルル口法によって得られた値を用い, また簡単のために割引は無視した.(割引金利を 0 とした.)

検証は表 6 に挙げた i~iv の 4 通りのパラメータの組み合わせについて行い, それぞれの場合の 5 次迄の漸近展開による計算結果とその誤差を表 7, 8 にまとめた．

表 6:

Parameter	λ	$\sigma(0)$	β	ρ	θ	ν	T
i	0.1	3.0	0.5	-0.7	3.0	0.3	10
ii	0.1	0.3	1.0	-0.7	0.3	0.3	30
iii	0.1	3.0	0.5	-0.7	3.0	0.1	10
iv	0.1	3.0	0.5	-0.7	3.0	0.3	1

真値の計算に用いたモンテカルル口法は, i, iii, iv では時間の分割数を $T = 10$ の場合は 1024 分割, $T = 1$ の時は 512 分割とした Euler-Maruyama 法による離散近似を, ii の

$\beta = 1.0$ のケースについては分割数を 256 とする Ninomiya-Victoir[8] による二次の離散近似を用いた。また、試行回数は全て 1 億回とした。いずれの場合でもほぼ漸近展開の次数を上げるほど精度が改善していることが分かる。i と iii 及び、i と iv の比較から、ポラティリティのポラティリティが小さい場合、あるいは満期が短い場合ほど漸近展開による近似の精度は高くなることが分かる。

表 7:

Case	行使價格	MC	漸近展開					差額					
			1st	2nd	3rd	4th	5th	1st	2nd	3rd	4th	5th	
i	50 Put	13.109	17.985	18.109	15.421	14.176	13.369	4.876	5.000	2.313	1.067	0.260	
	60 Put	16.618	21.162	21.266	18.549	17.556	16.813	4.544	4.648	1.931	0.938	0.195	
	70 Put	20.482	24.724	24.805	22.067	21.327	20.631	4.241	4.322	1.585	0.844	0.149	
	80 Put	24.720	28.685	28.741	25.990	25.499	24.837	3.965	4.020	1.269	0.778	0.117	
	90 Put	29.347	33.057	33.085	30.327	30.083	29.442	3.710	3.738	0.980	0.735	0.094	
	100 Call	34.375	37.847	37.847	35.087	35.087	34.452	3.472	3.472	0.712	0.712	0.077	
	110 Call	29.811	33.057	33.029	30.271	30.515	29.874	3.246	3.217	0.459	0.704	0.063	
	120 Call	25.659	28.685	28.629	25.878	26.369	25.708	3.026	2.971	0.220	0.711	0.050	
	130 Call	21.914	24.724	24.643	21.905	22.645	21.950	2.809	2.728	-0.010	0.731	0.035	
	140 Call	18.571	21.162	21.058	18.341	19.333	18.589	2.591	2.487	-0.230	0.762	0.018	
	150 Call	15.615	17.985	17.861	15.174	16.420	15.613	2.370	2.246	-0.441	0.804	-0.002	
	ii	50 Put	19.801	43.565	32.907	14.452	14.995	18.766	23.764	13.106	-5.349	-4.806	-1.035
		60 Put	25.471	47.486	38.816	20.403	20.837	24.593	22.015	13.346	-5.068	-4.634	-0.878
		70 Put	31.500	51.642	45.055	26.694	27.023	30.768	20.142	13.555	-4.806	-4.478	-0.732
		80 Put	37.847	56.038	51.606	33.293	33.514	37.253	18.191	13.759	-4.554	-4.333	-0.594
90 Put		44.476	60.674	58.446	40.166	40.278	44.012	16.199	13.970	-4.309	-4.197	-0.464	
100 Call		51.357	65.553	65.553	47.286	47.286	51.017	14.196	14.196	-4.071	-4.071	-0.339	
110 Call		48.465	60.674	62.903	44.623	44.511	48.245	12.209	14.438	-3.842	-3.954	-0.220	
120 Call		45.780	56.038	60.470	42.157	41.935	45.674	10.258	14.690	-3.622	-3.844	-0.106	
130 Call		43.281	51.642	58.229	39.868	39.540	43.285	8.361	14.948	-3.413	-3.742	0.004	
140 Call		40.954	47.486	56.155	37.742	37.308	41.064	6.532	15.202	-3.212	-3.646	0.110	
150 Call		38.782	43.565	54.222	35.768	35.225	38.996	4.783	15.440	-3.014	-3.557	0.214	

表 8:

Case	行使價格	MC	漸近展開					差額					
			1st	2nd	3rd	4th	5th	1st	2nd	3rd	4th	5th	
iii	50 Put	1.682	0.768	1.713	2.157	1.865	1.667	-0.914	0.030	0.475	0.182	-0.016	
	60 Put	2.607	1.551	2.735	3.051	2.710	2.603	-1.056	0.129	0.445	0.103	-0.003	
	70 Put	3.950	2.902	4.163	4.314	4.011	3.957	-1.047	0.214	0.364	0.061	0.008	
	80 Put	5.883	5.058	6.137	6.142	5.931	5.896	-0.825	0.254	0.258	0.048	0.013	
	90 Put	8.631	8.241	8.868	8.781	8.678	8.647	-0.390	0.237	0.150	0.047	0.016	
	100 Call	12.450	12.616	12.616	12.498	12.498	12.468	0.166	0.166	0.048	0.048	0.018	
	110 Call	7.577	8.241	7.614	7.527	7.630	7.599	0.664	0.037	-0.050	0.053	0.022	
	120 Call	4.131	5.058	3.978	3.983	4.193	4.158	0.927	-0.153	-0.149	0.062	0.027	
	130 Call	2.008	2.902	1.641	1.792	2.095	2.041	0.894	-0.367	-0.217	0.086	0.033	
	140 Call	0.887	1.551	0.366	0.682	1.023	0.917	0.663	-0.522	-0.205	0.136	0.030	
	150 Call	0.372	0.768	-0.176	0.269	0.562	0.364	0.396	-0.548	-0.104	0.189	-0.009	
	iv	50 Put	0.633	0.595	0.727	0.694	0.648	0.638	-0.038	0.094	0.061	0.015	0.005
		60 Put	1.335	1.272	1.446	1.393	1.348	1.341	-0.063	0.111	0.058	0.013	0.006
		70 Put	2.571	2.499	2.692	2.619	2.583	2.577	-0.072	0.121	0.048	0.011	0.006
		80 Put	4.579	4.534	4.703	4.614	4.590	4.585	-0.046	0.124	0.034	0.010	0.005
90 Put		7.608	7.627	7.727	7.628	7.616	7.612	0.019	0.119	0.019	0.008	0.004	
100 Call		11.857	11.968	11.968	11.865	11.865	11.861	0.111	0.111	0.008	0.008	0.004	
110 Call		7.430	7.627	7.527	7.427	7.438	7.434	0.197	0.096	-0.004	0.008	0.003	
120 Call		4.289	4.534	4.364	4.274	4.298	4.293	0.244	0.074	-0.015	0.009	0.004	
130 Call		2.260	2.499	2.306	2.233	2.270	2.264	0.239	0.046	-0.027	0.009	0.003	
140 Call		1.080	1.272	1.097	1.044	1.089	1.082	0.192	0.017	-0.036	0.009	0.002	
150 Call		0.466	0.595	0.463	0.430	0.476	0.467	0.129	-0.004	-0.036	0.010	0.001	