

# デフォルト相関係数のインプライド推計\* †

山下 智志‡

敦賀 智裕§

## 概 要

信用リスク管理において、複数の債務者がある場合、単一の借り手のデフォルトをチェックするだけではなく、ポートフォリオ全体でのリスク管理が必要となる。そのため、デフォルト確率を求めただけでは十分な分析ができない。一方、デフォルトの相関関係を計量化する一般的な方法は未だ確立されていない。そこで、本研究では、債務者間のデフォルト相関係数を推計する方法を示した。具体的には、誘導型フレームワークを用いてハザード過程を債券価格から推定し、ハザード過程の相関関係からデフォルトそのものの相関係数を逆に求める方法を示した。さらに日本債券市場のデータをもとに、モデルのパラメータを推計し、インプライド・デフォルト相関係数の推計例を示した。その結果、ポートフォリオ管理上、有用性が高いとの結論を得た。

キーワード：デフォルト相関係数, ハザード過程, OU 過程, SUR, 一般化最小二乗法.

\*本稿の内容は全て著者の個人的見解であり、金融庁及び金融研究研修センターの公式見解ではない。

†本研究を行うにあたり、東京工業大学の中川秀敏助教授、金融庁の永田貴洋研究官より有意義な指摘を頂いた。また、金融庁の今東宏明専門研究員にはデータの加工などを手伝って頂いた。ここに感謝したい。

‡総合研究大学院大学統計数理研究所 助教授、金融庁金融研究研修センター 特別研究員

§金融庁金融研究研修センター 専門研究員

## 1 はじめに

銀行における信用リスクのポートフォリオ管理は、BIS 規制や不良債権問題をはじめとするリスク管理の要請の高まりに応じて、洗練されつつある。信用リスクをポートフォリオ全体で管理する際、デフォルト相関を計量化することは非常に重要である。しかしながら、上場企業などの高格付け企業を対象とした信用リスク管理では、デフォルトそのものが稀な事象であり、デフォルト相関構造に対するファクターを用いた分析が大きな説明力を持たないなどの理由により、分析が技術的に困難である。対象とする企業の株価変動と株価インデックスとの相関を用いる方法と、デフォルトの起こりやすさを表すハザード過程の相関を用いてシミュレーションを行う方法が提案されているが、デフォルト相関係数を直接的な形で推定する一般的な方法は未だ確立されていない。

モデルの検証といった立場からも、デフォルト相関モデルの評価をどのように行うかという問題は未解決である。山下、川口、敦賀 [33] によると、データ全体での平均相関係数を用いたモデルが考えられているものの、その課題として、時系列データの蓄積が必要であるとしている。

そこで本研究では、マーケットで取引される社債データを用いて、インプライドにデフォルト相関係数を推計する方法を示す。マーケットデータを用いる利点は、非デフォルトデータのみによる分析が可能であることや、債券やクレジットデリバティブの評価に広く用いることができること、時系列データが入手可能であること、監督上の透明性確保にも有意義であること等の理由が考えられる。他方、推定の難しさ、直感的な理解が困難であること等がデメリットとして挙げられる。本研究では、一般的な枠組みを述べた後、具体的なモデルを与え、容易な推計方法を示す。

本論文の構成は次の通りである。まず第 2 節では、債券評価とデフォルト相関に関する既存の研究成果をまとめる。次に第 3 節では、デフォルト相関係数をインプライドに推計するための一般的枠組みを示す。第 4 節に、具体的なモデルを仮定し、大規模なポートフォリオにおけるインプライド・デフォルト相関係数の容易な推計方法を提案する。第 5 節ではインプライド・デフォルト相関係数の推計例を示す。

## 2 既存研究

本節では、はじめにデフォルト相関のメカニズムと、既に提案されているモデルを整理する。次に、デフォルトリスクのある債券の価格評価に用いられる誘導型アプローチによる債券プライシングモデルについて紹介する。

### 2.1 デフォルト相関メカニズムについての考察

まず、デフォルトの相関についての実際の特徴について考察を行う。デフォルト相関が存在するためには、企業間のデフォルト事象に、何らかの関係性がなくてはならない。企業間のデフォルトの間にどのような関係がありえるのか、その経済的原因について考えてみる。以下は Giesecke [10] の dependent default についての議論に基づく。

第一に、多くの実証的な債券価格とデフォルトデータに関する研究から明らかなように、クレジット・スプレッドや集計的なデフォルト率が、金利、GDP の成長率、株価インデックスの収益率等のビジネスサイクル指標に関して強く関係しているということである。つまり、デフォルトには共通要因があり、それによってデフォルト相関が発生する。

第二に、経済の下降期にはデフォルト・クラスターが観察される。これは連鎖倒産と呼ばれる。ある借り手のデフォルトが別の借り手のデフォルトを誘発するというものである。特に直接的な引き金となるのは、相互の資本関係、財務保証、親子会社関係などである。これらの経験的根拠から、借り手のデフォルトは確率的に独立でないと考えられる。

ここまでの議論から、デフォルト相関を導くメカニズムを次の二つに分けて考えることが適切である。

第一に、ある借り手の財務的健全性は、マクロ的経済状態に関係する共通要因に依存する。第二に、それに加えて借り手同士は直接的にリンクしており、ある借り手の健全性は他の借り手の信用度に依存する。

以上の Giesecke [10] の主張をまとめると、図 1 のようになる。

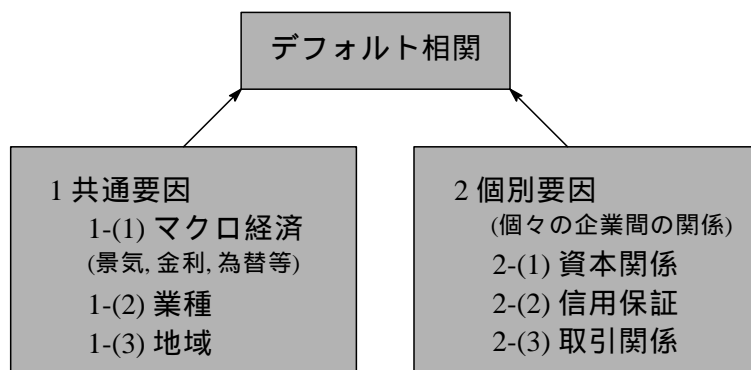


図 1: デフォルト相関を導く要因. デフォルト相関の要因は, 共通要因の存在と, 個々の企業間の関係という 2 つに大別される.

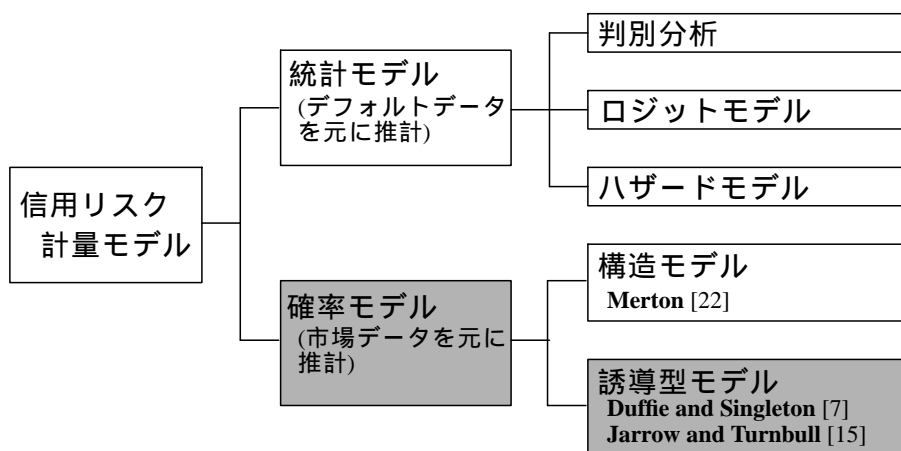


図 2: 信用リスク計量化モデルの分類. デフォルトデータを用いて分析を行う統計モデルと, 市場データを用いて分析を行う確率モデルに大別される. 確率モデルとして構造モデルと誘導型モデルが主に存在している.

これらのデフォルトのメカニズムをふまえると, ファクターを用いた共通要因の分析のみを対象に, デフォルト相関関係を分析することは十分ではない. 本研究では企業と企業のデフォルト相関関係を一つの相関係数として推計することを目的としている. その結果は, 共通要因のみならず個別の関係性を反映したものであって, 信用ポートフォリオマネジメントや当局による監督実務においても意義深い情報を与える.

## 2.2 デフォルト相関モデルの既存研究

信用リスク計量化モデルには大きく分けて統計モデルと確率モデルの 2 つのモデルが存在する. 前者はデフォルトのデータを統計的に分析することでデフォルト確率を推計するモデルである. 一方, 後者はデフォルトのデータは必要とせず, 市場データを用いる. 図 2 に信用リスク計量化モデルの大まかな分類を示した. これらの信用リスク計量化モデルは, 主にデフォルト確率を推計するためのものであり, デフォルト相関を計量化するときには, この全てのモデルが有効であるわけではない. 以下, 順に見ていく.

統計的に直接デフォルト相関を観測できない以上, ロジットモデルや判別モデルの利用は困難である. その場合, 確率モデルが有力となる. 確率モデルには主に以下の 2 つがあり, それぞれデフォルト相関を考慮する方法が提案されている.

第一に, Merton [22] によって提案された構造モデルと呼ばれる手法がある. このモデルは対象企業の経済変数が一定水準を下回った場合にデフォルトが発生するという状況を想定している. 最も

単純なものは、総資産価値が負債額面価値を下回った場合にデフォルトとするものである。総資産価値の確率変動をモデル化することによって、デフォルト確率を求めることができる。構造モデルを用いてデフォルト相関を表現しようとする場合、経済変数の確率変動に関する相関係数が必要となるが、実際にはデフォルトを決定づけるような経済変数を観察することはできない。その為、株価収益率の相関係数を用いる。もっとも、分析対象企業全てに対してこの分析を行うことが困難であることから、市場全体の経済変数を表すファクターが存在すると仮定した上で、そのファクターとの相関を考慮する単一ファクターモデルが提案されている (Gordy [13])。この場合も、JP Morgan [16] の CreditMetrics<sup>TM</sup> のように、株価インデックスの変動率と対象企業の株価変動率の相関を代理変数として用いることが多い。

第二に、Jarrow-Turnbull [15], Duffie-Singleton [7] による誘導型モデルと呼ばれる手法がある。誘導型モデルではある時点におけるデフォルトの瞬間的な発生率をハザード過程と呼ばれる確率過程を用いて表現する。一般的な誘導型モデルはデフォルト相関を求めるためのものではなく、社債価格やクレジットデリバティブを評価するためのものである<sup>1</sup>。

勿論、ハザード過程は直接観測できないため、市場で得られる社債データなどの観測データを用い推定する必要がある。またデフォルトの同時分布を計算する上で、追加的な仮定を必要とする。

本研究ではハザード過程を用いた方法を提案する。その場合、大きく分けて二つの方法がある。第一に、ハザード過程として金利モデルにしばしば用いられるような平均回帰的な確率過程を用い、そのランダム項に相関係数を導入する方法がある。この場合は主に連続的な確率過程、或いはその離散化を考えており、ジャンプは含まない。デフォルト相関は日々の連続的な共変動によってもたらされると考え、例えば一方の企業がデフォルトすることによってその瞬間に他方の企業のハザード過程が突如として高まるといった現象はモデル化されない。第二に、各企業のハザード過程に別の企業がデフォルトしたかしないかといった状態を表すデフォルト・ダミー変数を組み込み、一方の企業のデフォルトによって他方の企業のハザード過程が瞬間的に上昇させられるような表現も考えられる。前者はモデル化が容易であるが、後者については複雑な問題がある。詳しくは Kusuoka [21], Jeanblanc and Rutkowski [25], Collin-Dufresne, Goldstein and Hugonnier [4] 等を参照せよ。その他、各企業のハザード過程に、相関のあるランダム項とジャンプ過程を含む方法 (Duffie, Pan and Singleton [6]) 等も提案されている。

以上の議論を踏まえた上で、ここでは、前者の連続的な平均回帰過程である OU 過程を仮定した場合について採りあげる。ハザード過程に OU 過程を仮定した既存研究としては、Aonuma and Nakagawa [1] を挙げることができ、その主要な結果は、楠岡・青沼・中川 [29] にまとめられている。以下で誘導型モデルの基本的フレームワークを説明する。

### 2.3 誘導型アプローチによる債券のプライシング

はじめに、 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  という完備な確率空間を考える。また、時点  $t$  における情報集合、即ちフィルトレーション  $\mathcal{F}_t, (0 \leq t \leq \infty)$  を導入する。その上で、全ての  $t (0 \leq t < \infty)$  に対し次を導入する。

ただし、変数を以下のように定義する。

- $1_{\{A\}}$  : 事象  $A$  が起きたとき 1, そうでないとき 0 をとる確率変数,
- $t$  : 時点  $(0 \leq t < \infty)$ ,
- $T$  : 満期  $(t \leq T < \infty)$ ,
- $X(t, T)$  :  $t$  時点における満期  $T$  のデフォルトリスクのある債券価格,
- $X_0(t, T)$  :  $t$  時点における満期  $T$  のデフォルトリスクのない債券価格,
- $\tau$  : デフォルト時刻  $(0 \leq \tau < \infty)$ ,
- $\delta_t$  :  $t$  時点における回収可能額,
- $L(t)$  : 時点  $t$  における損失率,
- $r_0(t)$  :  $t$  時点における安全利子率.

<sup>1</sup>ハザードモデルも誘導型モデルの一種である。ここでは、ハザード過程の推定のために倒産データを必要とする場合を統計モデルとして分類し、ハザードモデルと呼んだ。

$N(t) = 1_{\{\tau \leq t\}}$  とすると, 明らかに右連続左極限を持つ確率過程である.  $\lim_{s \uparrow t} N(t) = N(-t)$  と定義する.

ここで, 以下の情報集合を定義する.

$\mathcal{G}_t$  : ハザード過程  $h$  の時点  $t$  迄の情報を要素とする情報集合.

$\mathcal{H}_t$  : 確率過程  $N(s)$  ( $0 \leq s \leq T$ ) の時点  $t$  迄の情報を要素とする情報集合.

条件付確率や条件付期待値を扱う上では, 条件となる集合をどのように考えるかが重要である. 誘導型アプローチでは, ハザードの情報集合とデフォルトしたか否かの情報集合を区別するのが通常である.  $\mathcal{F}_t$  は時点  $t$  におけるこれらの全ての情報集合であるとする. 即ち,  $\mathcal{F}_t \equiv \mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_t$  とする.

$X(t, T)$  を評価する際には, 満期までのデフォルト  $\{\tau \leq T\}$  をモデル化する必要がある.  $\tau$  はデフォルト時刻を表す確率変数とする. 本稿では, 誘導型アプローチを用いる. 誘導型アプローチのより包括的な議論については **Duffie and Singleton [9]** を参照されたい.

以下ではこの誘導型アプローチについて簡単に解説する. なお, 額面を 1 とし, クーポンは考慮しない.

まず, 我々は無裁定条件の下でのプライシングを考え, 市場の確率測度  $\mathbf{P}$  の下で借り手のデフォルト-ハザード過程  $h(t)$  を以下のように定義する.

$$1_{\{\tau > t\}}h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}[t < \tau \leq t + \Delta t | \mathcal{F}_t]}{\Delta t} \quad (1)$$

但し,  $\Delta t > 0$ . また,  $h(t)$  に関し次の条件を導入する.

- $h(t)$  は有界,  $h(t) \geq 0$
- $\int_t^\infty h(s)ds = \infty$
- $Y(t) \equiv E[\exp\{-H(t, T)\} | \mathcal{F}_t, \tau > t]$  は確率 1 でジャンプしない.<sup>2</sup>

$H(t, T) = \int_t^T h(s)ds$  と定義する.  $H(t, T)$  は  $t$  から  $T$  までの累積ハザードと呼ばれる.

このとき, 生存確率  $\mathbf{P}[\tau > T | \mathcal{F}_t] = 1 - \mathbf{P}[\tau \leq T | \mathcal{F}_t]$  に関し, 次が導かれる (**Duffie[5]**).

$$\mathbf{P}[\tau > T | \mathcal{F}_t] = 1_{\{\tau > t\}}E \left[ \exp \left\{ - \int_t^T h(s)ds \right\} \middle| \mathcal{G}_t \right] \quad (2)$$

以上の設定の下で, 債券の価格式を導出する. そのためには, 将来のキャッシュフローに関してリスク中立確率測度  $\tilde{\mathbf{P}}$  の下で期待値をとり,  $r_0(t)$  で割引けばよい.

デフォルトリスクのない債券の価格  $X_0(t, T)$  は, スポットレート  $r_0(t)$  を用いて次のように表される.

$$X_0(t, T) = \tilde{E} \left[ \exp \left\{ - \int_t^T r_0(s)ds \right\} \middle| \mathcal{G}_t \right] \quad (3)$$

いま,  $r_0(t) \geq 0$ ,  $\int_t^\infty r_0(s)ds = \infty$  が満たされているとする. 式(3)と式(2)を比較すると, 信用リスクのない割引債は, 事象  $\{\tau_0 > t\}$  の上で,  $\{\tau_0 > T\}$  が生じたときに満期  $T$  で 1 単位受け取り, 事象  $\{\tau_0 \leq T\}$  が生じたときには何も受け取らないという金融商品とみることができる. このような  $\tau_0$  を消滅時点といい, また  $r_0$  を消滅率ともいう<sup>3</sup>.  $h_0$  を事象  $\{\tau_0 > T\}$  に関するハザード過程と考え, 十分大きい  $T^*$  をとったとき  $\tilde{\mathbf{P}}$  の下で  $h_0(t) = r_0(t)$  ( $0 \leq t \leq T^*$ ) なる確率過程とする.  $H_0(t, T) = \int_t^T h_0(s)ds$  と表す.

次に, デフォルトリスクのある債券の価格決定について説明する. デフォルトリスクのある債券の場合, デフォルトの場合には回収額  $\delta_r$  が得られ, 非デフォルトの場合は満期において額面価値を得ることができる. そのようなキャッシュフローを安全利率で割引き, リスク中立確率測度  $\tilde{\mathbf{P}}$  の下で期待値をとればよい. すると, 次のような価格式が得られる.

<sup>2</sup>即ち,  $\Delta Y(t) \equiv Y(t) - \lim_{s \uparrow t} Y(s)$  とすると,  $\Delta Y(t) = 0$  a.s.

<sup>3</sup>森村・木島 ([32]) を参照.

$$X(t, T) = 1_{\{\tau > t\}} \tilde{E} [1_{\{\tau > T\}} \exp \{-H_0(t, T)\} + 1_{\{\tau \leq T\}} \delta_\tau \exp \{-H_0(t, \tau)\} | \mathcal{F}_t]. \quad (4)$$

デフォルトリスクのある債券の誘導型アプローチによるプライシングは、デフォルト時の回収額とハザード過程によって決定される。Duffie and Singleton [7] によれば、任意の時点  $t$  における額面 1 円単位での回収額  $\delta_t$  について、代表的な考え方として次の 3 通りがある。

**RMV(recovery of market value)**  $\delta_t = (1 - L(t))X(t-, T)$

**RT(recovery of treasury)**  $\delta_t = (1 - L(t))X_0(t, T)$

**RFV(recovery of face value)**  $\delta_t = (1 - L(t))$

ただし  $L(t)$  は損失率である。RMV について、 $X(t-, T)$  とは満期を  $T$  とする社債が、 $t$  時点においてデフォルトするとしたとき、その直前の社債価格である。この考え方をういた先行的研究として Duffie and Singleton [7] がある。また、Jarrow and Turnbull [15] は RT の考え方をういた。

ここで、Jarrow and Turnbull [15] のフレームワークを紹介する。社債価格の基本式 (4) において回収率を RT,  $L(t) = L$ ,  $\delta \triangleq 1 - L$  と書くと、安全資産と社債のハザードが無相関であるという仮定の下で、次が導かれる。

$$X(t, T) = 1_{\{\tau > t\}} X_0(t, T) \left\{ \delta + (1 - \delta) \tilde{E} [\exp \{-H(t, T)\} | \mathcal{G}_t] \right\} \quad (5)$$

導出は付録 A を参照せよ。

また、時点  $t$  におけるクレジット・スプレッド  $\Delta(t, T)$  は、次のように定義される。

$$\begin{aligned} \Delta(t, T) &= -\frac{1}{T-t} \log \left( \frac{X(t, T)}{X_0(t, T)} \right) \\ &= -\frac{1}{T-t} \log \left( \delta + (1 - \delta) \tilde{E} [\exp \{-H(t, T)\} | \mathcal{G}_t] \right) \end{aligned} \quad (6)$$

### 3 モデルの一般的枠組み

本節では、デフォルトの同時分布の数学的定式化と、デフォルト相関係数の定義を与える。その上で、次節以降でより具体的な計算方法を示す。

#### 3.1 モデルの全体像

本研究では、社債の各銘柄に対しハザード過程を考え、ハザード過程の変動に相関があると仮定する。この相関をハザード相関と名付ける。そして、このハザード過程を前提として、デフォルト相関係数を社債価格からインプライドに推計する。社債価格はハザード過程を用いてモデル化することができ、クレジット・スプレッドといったデータが観測することができるとする。また、市場の社債価格やスプレッドはハザード過程を反映した無裁定価格であると仮定する。このときそれらのデータを用いて、ハザード相関係数を含むハザード過程のパラメータを推計することができる。ただし、ハザード相関自体がデフォルト相関を意味するものではないことに注意しなくてはならない。我々は、推計されたハザード相関やその他のパラメータを用いて、デフォルト相関やデフォルト確率を導くという手続きをとる。以上をまとめると図 3 のようになる。

#### 3.2 デフォルトの同時分布と条件付独立

デフォルトの依存関係をモデル化する方法の代表的かつ便利なアプローチの 1 つとして、条件付独立の概念がある。

複数の借り手  $1, \dots, n$  を考えよう。各借り手  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) に対して、ハザード過程  $h_i(t)$ 、デフォルト時点  $\tau_i$  があるとする。各借り手のデフォルト事象は  $\{\tau_i \leq T\}$  と表される。

ここで、条件付独立の仮定を置く。これは、時点  $T$  迄のハザードに関する情報集合と、時点  $t$  迄のデフォルト有無に関する情報のみが与えられたとき、デフォルトが独立に生起するというものであ

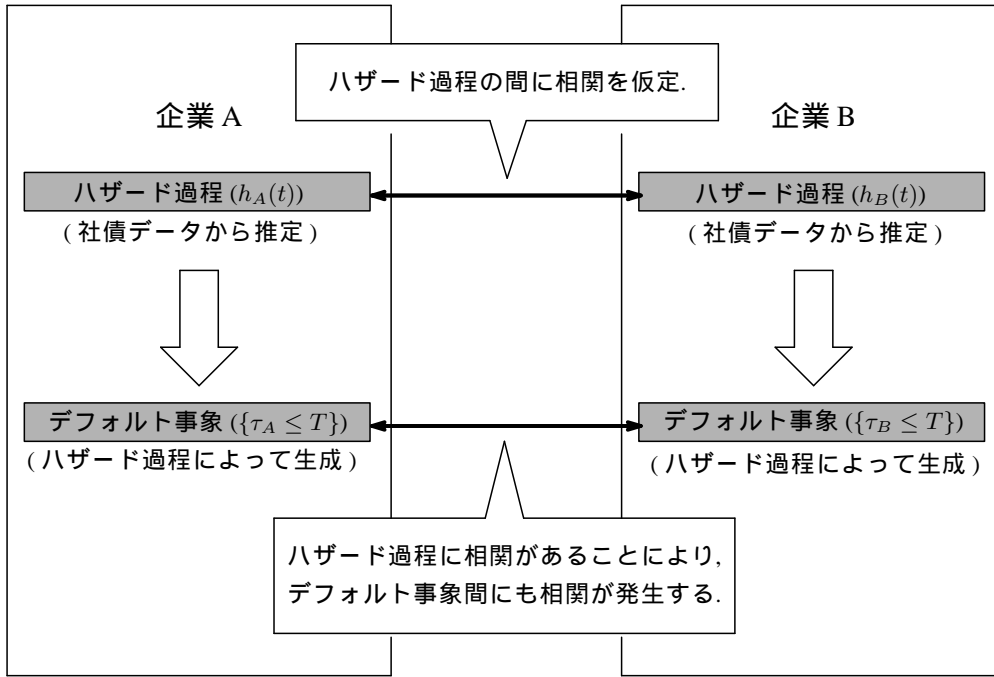


図 3: モデルの全体図. 企業 A と企業 B の 2 社を考えた場合. それぞれのハザード過程に相関があり, 社債データからそれを推計することによってデフォルト相関係数も求まる.

る. 即ち, デフォルト相関はハザード過程の相関のみによって表現されているというものである. この結果, 時点  $t$  における同時生存確率を次のように表現できる.

$\{\tau_i > t\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) の上で,

$$\mathbf{P}[\tau_1 > t_1, \dots, \tau_n > t_n | \mathcal{F}_t] = E \left[ \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n H_i(t, t_i) \right\} \middle| \mathcal{G}_t \right]. \quad (7)$$

(7) 式の導出については付録 A で示した. Kijima [18], Kijima and Muromachi [19] はバスケットタイプのクレジットスワップを評価するためにこのアプローチを用いた. また, Kijima and Muromachi [20] はこのアプローチを用いてポートフォリオの信用リスクをモンテカルロ・シミュレーションにより評価する方法を示した.

### 3.3 インプライド・デフォルト相関係数

次に, インプライド・デフォルト相関係数を定義する. 以下では  $\{\tau_i > t\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) の上で議論を進める. 時点  $t$  において, 償還日  $T$  までに借り手  $i$  と  $j$  ( $i \neq j$ ) がデフォルトするかどうかを確率変数  $1_{\{\tau_i \leq T\}}$ ,  $1_{\{\tau_j \leq T\}}$  で表す. この二つの確率変数の相関係数を求められれば, 両借り手のデフォルトの相関を表す測度となる<sup>4</sup>. 式 (7) のような条件付独立の考え方の下では, 容易に一定期間内のデフォルトの相関  $\rho(1_{\{\tau_i \leq T\}}, 1_{\{\tau_j \leq T\}} | \mathcal{F}_t)$  を計算できる.  $1_{\{\tau_i \leq T\}}$  と  $1_{\{\tau_j \leq T\}}$  の共分散は次のように表される.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(1_{\{\tau_i \leq T\}}, 1_{\{\tau_j \leq T\}} | \mathcal{F}_t) &= E[1_{\{\tau_i \leq T\}} 1_{\{\tau_j \leq T\}} | \mathcal{F}_t] - E[1_{\{\tau_i \leq T\}} | \mathcal{F}_t] E[1_{\{\tau_j \leq T\}} | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbf{P}[\tau_i \leq T, \tau_j \leq T | \mathcal{F}_t] - \mathbf{P}[\tau_i \leq T | \mathcal{F}_t] \mathbf{P}[\tau_j \leq T | \mathcal{F}_t] \end{aligned} \quad (8)$$

従って, 式 (7) から, 任意の時点におけるデフォルト相関係数が求まる.

<sup>4</sup>Giesecke [10] はこのような線形関係をとらえるだけでは不十分であるとしている. その主張として, デフォルト相関をもたらず同時デフォルト確率は各々の企業のデフォルト確率に関し, 非線形の依存関係にある可能性があり, そういった依存関係を適切に把握するためには, デフォルト相関係数ではなく, 同時デフォルト確率或いは条件付きデフォルト確率の観点からデフォルト依存性を把握したほうが良いというものである. しかし実務上は取り扱いの容易さから, 相関係数を用いることも多いであろう.

表 1: 企業 A と企業 B を考えた場合の同時分布表. 式 (9) から, 企業 A と企業 B のデフォルト相関係数は次のように求まる.  $\rho(1_{\{\tau_A \leq T\}}, 1_{\{\tau_B \leq T\}} | \mathcal{F}_t) = \{(1) - ((1) + (2))((1) + (3))\} / \{((1) + (2))((3) + (4))((1) + (3))((2) + (4))\}^{1/2}$ . ただし  $(1) + (2) + (3) + (4) = 1$ .

B \ A	デフォルト	非デフォルト	A の周辺分布
デフォルト	$P[\tau_A \leq T, \tau_B \leq T   \mathcal{F}_t] \cdots (1)$	$P[\tau_A \leq T, \tau_B > T   \mathcal{F}_t] \cdots (2)$	$P[\tau_A \leq T   \mathcal{F}_t] \cdots (1)+(2)$
非デフォルト	$P[\tau_A > T, \tau_B \leq T   \mathcal{F}_t] \cdots (3)$	$P[\tau_A > T, \tau_B > T   \mathcal{F}_t] \cdots (4)$	$P[\tau_A > T   \mathcal{F}_t] \cdots (3)+(4)$
B の周辺分布	$P[\tau_B \leq T   \mathcal{F}_t] \cdots (1)+(3)$	$P[\tau_B > T   \mathcal{F}_t] \cdots (2)+(4)$	$1 \cdots (1)+(2)+(3)+(4)$

$$\rho(1_{\{\tau_i \leq T\}}, 1_{\{\tau_j \leq T\}} | \mathcal{F}_t) = \frac{Cov(1_{\{\tau_i \leq T\}}, 1_{\{\tau_j \leq T\}} | \mathcal{F}_t)}{\sqrt{Var(1_{\{\tau_i \leq T\}} | \mathcal{F}_t) Var(1_{\{\tau_j \leq T\}} | \mathcal{F}_t)}}, \quad (i \neq j) \quad (9)$$

以上の結果は表 1 のようにまとめられる. ここで,  $\rho(1_{\{\tau_i \leq T\}}, 1_{\{\tau_j \leq T\}} | \mathcal{F}_t) = \rho(1_{\{\tau_i > T\}}, 1_{\{\tau_j > T\}} | \mathcal{F}_t)$  である. また  $t = T$  の場合, 即ち償還日におけるインプライド・デフォルト相関係数は, 条件付独立の仮定により 0 となる.

## 4 Ornstein-Uhlenbeck 過程の下での推計

前節の一般的枠組みを用いて, ハザードがある確率過程に従うと仮定を置いて具体的な推計方法を明らかにする.

以下ではまず相関を取り入れた OU 過程によるハザードの定式化と, 累積ハザードの性質について述べる. 次に, デフォルト相関について, 条件付独立という仮定を置くことにより, 同時生存確率を具体的に求められることを示す. また, インプライド・デフォルト相関係数の計算手順を示す.

### 4.1 正規ハザード過程

OU 過程は金利の変動を記述する代表的モデルである Vasicek モデルで用いられる確率過程として知られており, 一定の条件の下で平均回帰する性質がある. また, OU 過程を表す確率微分方程式の解が正規分布することから, 正規過程の一種である. 本稿では  $\mathbf{h}(t) = (h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t))'$  を次のような OU 過程として表す.<sup>5</sup>

$$dh_i(t) = (a_i - b_i h_i(t))dt + \sigma_i dW_i(t), \quad t \geq 0. \quad (10)$$

ここで,  $a_i/b_i = \bar{h}_i$  とすると, 次のようにも表される.

$$dh_i(t) = b_i(\bar{h}_i - h_i(t))dt + \sigma_i dW_i(t), \quad t \geq 0. \quad (11)$$

ここで,  $P$  の下で  $\bar{h}_i$  は  $h_i(t)$  の長期平均,  $b$  は  $\bar{h}_i$  への回帰を表す平均回帰係数,  $\sigma_i$  はボラティリティパラメータと解釈される.  $W(t)$  は標準ブラウン運動であり, 互いに次の関係で表される相関  $\rho$  を有すると仮定する.

$$dW_i(t)dW_j(t) = \rho_{ij}dt \quad (12)$$

ただし  $\rho_{ii} = 1$ . この  $\rho_{ji}$  が前述のハザード相関である.

<sup>5</sup>OU 過程は扱いやすさから実務応用上しばしば用いられるが, 負の値をとり得ることから,  $h(t)$  のモデルとしては問題がある. ここではその実務応用性や, 正規分布する性質を用いて計算の簡単化を行うために用いた. OU 過程以外のものにもできる. 例えば, 次のようなハザード過程は CIR 型と呼ばれる.

$$dh = b(\bar{h} - h(t))dt + \sigma h(t)^c dW(t), \quad t \geq 0.$$

これは例えば  $h(0) \geq 0$ ,  $c = \frac{1}{2}$  ならば負にならず, ジャンプも起こらない為, ハザード過程としての条件を満たしている. しかし推定が困難であるというデメリットがある.



$\beta_i(t)$  を時点  $t$  における債券  $i$  に関するリスクの市場価値を表すとすると、十分大きい  $T^*$  に対し

$$\tilde{W}_i(t) = W_i(t) + \int_0^t \beta_i(u) du, \quad 0 \leq t \leq T^* \quad (13)$$

はリスク中立確率測度  $\tilde{P}$  の下で標準ブラウン運動となる。

$\beta_i(t)$  は、ある  $\phi_i(t)$  に対して次のように表されるものとする。

$$\beta_i(t) = \frac{a_i - \phi_i(t)}{\sigma_i}, \quad 0 \leq t \leq T^*, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (14)$$

ここで、 $\beta_i(t) = \beta_i$  とする。また、標準ブラウン運動  $W_i(t)$  の分散共分散は測度変換によって変化しない。

このとき、 $\phi_i(t) = \phi_i$  として、 $\tilde{P}$  の下でのハザード過程を次のように表す。

$$dh_i(t) = (\phi_i - b_i h_i(t)) dt + \sigma_i d\tilde{W}_i(t), \quad 0 \leq t \leq T^*. \quad (15)$$

或いは、 $\phi_i/b_i = \tilde{h}_i$  とすると、

$$dh_i(t) = b_i(\tilde{h}_i - h_i(t)) dt + \sigma_i d\tilde{W}_i(t), \quad 0 \leq t \leq T^*. \quad (16)$$

$\tilde{P}$  の下で、 $\tilde{h}_i$  は  $h_i(t)$  の長期平均であることがわかる。

また、 $\beta_i$  は次のように表される。

$$\beta_i = \frac{b_i}{\sigma_i}(\tilde{h}_i - \tilde{h}_i), \quad 0 \leq t \leq T^*, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (17)$$

$i = 0$  のときデフォルトリスクのない債券を表すとすると、その債券価格  $X_0(t, T)$  は Vasicek [26] によって示されている。

## 4.2 インプライド・デフォルト確率

前節では、ハザード過程やハザード相関係数に関する定義を示したが、ここではインプライド・デフォルト確率の定義と性質について解説する。

$h_i$  は任意の  $t$  ( $0 \leq t \leq T$ ) について、次のように解くことができる。

$$\begin{aligned} h_i(t) = & h_i(0) \exp\{-b_i t\} + \bar{h}_i(1 - \exp\{-b_i t\}) \\ & + \sigma_i \int_0^t \exp\{-b_i(t-s)\} dW_i(s) \end{aligned} \quad (18)$$

したがって、 $h_i(t)$  の平均と分散は以下のように表現できる。

$$E[h_i(t)] = h_i(0) \exp\{-b_i t\} + \bar{h}_i(1 - \exp\{-b_i t\}), \quad (19)$$

$$V[h_i(t)] = \frac{\sigma_i^2}{2b_i} (1 - \exp\{-2b_i t\}) \quad (20)$$

$E[h_i(t)]$  において  $t \rightarrow \infty$  とすれば  $\bar{h}_i$  に一致することから、 $\bar{h}$  が  $h(t)$  の長期平均であることを確認できる。以上から、累積ハザードを次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \int_t^T h_i(s) ds = & \frac{h_i(t)}{b_i} (1 - \exp\{-b_i(T-t)\}) + \bar{h}_i \left( T - t - \int_t^T \exp\{-b_i(T-s)\} ds \right) \\ & + \frac{\sigma_i}{b_i} \int_t^T (1 - \exp\{-b_i(T-s)\}) dW_i(s) \end{aligned} \quad (21)$$

累積ハザードは、次のような平均  $\mu_i(t, T) = E \left[ \int_t^T h_i(s) ds \mid \mathcal{G}_t \right]$  を持つ。

$$\begin{aligned} \mu_i(t, T) = & \frac{h_i(t)}{b_i} (1 - \exp\{-b_i(T-t)\}) + \bar{h}_i \left( T - t - \int_t^T \exp\{-b_i(T-s)\} ds \right) \\ = & \frac{h_i(t)}{b_i} (1 - \exp\{-b_i(T-t)\}) + \bar{h}_i \left( T - t - \frac{1}{b_i} (1 - \exp\{-b_i(T-t)\}) \right) \end{aligned} \quad (22)$$

また、この累積ハザードの分散  $v_i(t, T) = V_i \left[ \int_t^T h_i(s) ds \middle| \mathcal{G}_t \right]$  は Ito's Isometry より、次のように求まる。

$$\begin{aligned} v_i(t, T) &= E \left[ \left( \frac{\sigma_i}{b_i} \int_t^T (1 - \exp\{-b_i(T-s)\}) dW_i(s) \right)^2 \middle| \mathcal{G}_t \right] \\ &= \frac{\sigma_i^2}{b_i^2} \int_t^T (1 - \exp\{-b_i(T-s)\})^2 ds \\ &= \frac{\sigma_i^2}{b_i^2} \left( T-t + \frac{2}{b_i} (1 - \exp\{-b_i(T-t)\}) - \frac{1}{2b_i} (1 - \exp\{-2b_i(T-t)\}) \right) \end{aligned} \quad (23)$$

式 (21) から、OU 過程の下では累積ハザードはこのような平均と分散をもつ正規分布に従うことがわかる。正規分布の積率母関数を利用すれば、任意の時点  $t$  ( $0 \leq t \leq T$ ) における個別企業単独の生存確率  $\mathbf{P}[\tau_i > T | \mathcal{F}_t] = E \left[ \exp\{-\int_t^T h_i(s) ds\} \middle| \mathcal{G}_t \right]$  が求まる。

$$\mathbf{P}[\tau_i > T | \mathcal{F}_t] = \exp \left\{ -\mu_i(t, T) + \frac{v_i(t, T)}{2} \right\} \quad (24)$$

以上の結果を用いて、インプライド・デフォルト確率や、次節で述べるインプライド・デフォルト相関係数を求めることができる。

### 4.3 インプライド・デフォルト相関係数の算出

前節で説明したデフォルト相関係数を、市場データより推計したものを以下ではインプライド・デフォルト相関係数と呼ぶ。ここでは、その計算方法について解説する。

ハザード過程が OU 過程であるとき、実際に同時分布を求め、インプライド・デフォルト相関係数を計算するには、次の  $v_{ij}(t, T) = Cov_{ij} \left[ \int_t^T h_i(s) ds, \int_t^T h_j(s) ds \middle| \mathcal{G}_t \right]$  が必要である。

$$\begin{aligned} v_{ij}(t, T) &= \sigma_i \sigma_j \int_t^T \frac{1}{b_i} (1 - \exp\{-b_i(T-t)\}) \frac{1}{b_j} (1 - \exp\{-b_j(T-t)\}) \rho_{ij} ds \\ &= \rho_{ij} \frac{\sigma_i \sigma_j}{b_i b_j} \left( T-t - \frac{1 - \exp\{-b_i(T-t)\}}{b_i} - \frac{1 - \exp\{-b_j(T-t)\}}{b_j} + \frac{1 - \exp\{-(b_i + b_j)(T-t)\}}{b_i + b_j} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

ただし  $v_{ii}(t, T) = v_i(t, T)$ 。

これと式 (7) を用いれば、同時生存確率は多変量正規分布の積率母関数によって、次のように計算できる。

$$\mathbf{P}[\tau_1 > T, \dots, \tau_n > T | \mathcal{F}_t] = \exp \left( -\sum_{i=1}^n \mu_i(t, T) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_{ij}(t, T) \right) \quad (26)$$

ここでデフォルト共分散  $Cov(1_{\{\tau_i \leq T\}}, 1_{\{\tau_j \leq T\}} | \mathcal{F}_t)$  が生存共分散  $Cov(1_{\{\tau_i > T\}}, 1_{\{\tau_j > T\}} | \mathcal{F}_t)$  と等しいことを利用して、(8) に従って  $Cov(1_{\{\tau_i \leq T\}}, 1_{\{\tau_j \leq T\}} | \mathcal{F}_t)$  を次のように求める。

$$Cov(1_{\{\tau_i \leq T\}}, 1_{\{\tau_j \leq T\}} | \mathcal{F}_t) = \exp \left\{ -(\mu_i(t, T) + \mu_j(t, T)) + \frac{v_i(t, T) + v_j(t, T)}{2} \right\} (\exp \{v_{ij}(t, T)\} - 1).$$

また、 $Var(1_{\{\tau_i \leq T\}} | \mathcal{F}_t) = \mathbf{P}[\tau_i \leq T | \mathcal{F}_t] \mathbf{P}[\tau_i > T | \mathcal{F}_t]$  より、(9) 式で表されるインプライド・デフォルト相関係数は、パラメータが与えられれば即座に計算できる。上記の結果を (9) 式に代入すると、次のように求まる。

$$\rho(1_{\{\tau_i \leq T\}}, 1_{\{\tau_j \leq T\}} | \mathcal{F}_t) = \frac{\exp \{v_{ij}(t, T)\} - 1}{\sqrt{(\exp \{v_{ii}(t, T)\} - 1)(\exp \{v_{jj}(t, T)\} - 1)}} \quad (27)$$

#### 4.4 ハザード過程の推定

式 (11) のように表される OU 過程  $h_i(t)$  を推定する方法を述べる. 本研究では, 国債と社債それぞれの瞬間的スポットレートとの差として定義される社債リスクプレミアムを用いてハザード過程を推定する. はじめに, 債券から得られるクレジット・スプレッドと  $h_i(t)$  との関係について述べる. ここで我々は以下の 3 つの仮定を導入する.

- 回収率として RT, すなわち  $\delta_{it} = (1 - L_i(t))X_0(t)$  を仮定する.
- $L_i(t) = L_i$  とする.
- $\tilde{h}_i$  が既知である.

債務者  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) がデフォルトリスクのある割引債を発行しているとし, この社債のスポットレートを  $\hat{r}_i(t)$  とおく. Kijima [17] と同様,  $\lim_{T \rightarrow t} \Delta_i(t, T) = \hat{r}_i(t) - r_0(t)$  は, 式 (6),(24) とロピタルの定理を用いて, 次のように表される.

$$\hat{r}_i(t) - r_0(t) = (1 - \delta_i)h_i(t) \quad (28)$$

我々は  $\delta_i$  は所与であると仮定する. このとき, 左辺は社債スポットレートと国債スポットレートの差となっており, 社債スポットレートのリスクプレミアムとして解釈できる. この関係を用いて,  $h_i(t)$  の標本をこの式から間接的に得ることができる. 実際には, 社債スポットレートを観測することは困難である<sup>6</sup>ため, ここでは最も満期の短い社債最終利回り (複利) を代理変数として推定する. ただし得られる  $h_i(t)$  の標本は  $\tilde{P}$  の下でのハザードであることに注意する.

次に, OU 過程の具体的な推定方法について述べる. OU 過程の推定方法としては最尤法, GMM などが知られているが, いずれも最適化計算が必要である. ここでは相関係数を推定するために  $h(t)$  を同時に推定することになるが, ポートフォリオの規模が大きい場合には, 最尤法や GMM の最適化計算が正確に行われなことがあり, 推定値が常に求まるとは限らない. また, 計算負荷が借り手の数に応じて飛躍的に増大してしまうという問題が生じる. そこで, ここでは  $h(t)$  を SUR モデルとみなして GLS 推定する方法を示す. これを用いることにより, 最適化計算は不要となり, 繰り返しの代数計算だけで推定値を求めることが可能である.

まず,  $\tilde{P}$  の下での  $h_i(t)$  を次のように離散化する.

$$h_i(t + \Delta t) - h_i(t) = b_i(\tilde{h}_i - h_i(t))\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\epsilon_i \quad (29)$$

ただし,  $\epsilon_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) は平均 0,  $E[\epsilon_i\epsilon_j] = \rho_{ij}$  ( $i \neq j$ ) という多変量標準正規分布に従う攪乱項である. ここでは  $h_{i0} = h_i(t)$ ,  $h_{i1} = h_i(t + \Delta t)$ ,  $\dots$ ,  $h_{ik} = h_i(t + k\Delta t)$ ,  $\dots$ ,  $h_{iK} = h_i(t + K\Delta t)$  といった観測値を得ることができるという前提で推定を行う. 日次データが得られる場合は  $\Delta t$  は  $1/250$  である. これにより, 次のような回帰式を作ることができる.

$$h_{ik+1} - h_{ik} = b_i(\tilde{h}_i - h_{ik})\Delta t + \sigma_i\sqrt{\Delta t}\epsilon_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, n, k = 0, 1, \dots, K). \quad (30)$$

このままでは非線形回帰モデルになってしまうため,  $\tilde{h}_i$  が先見的にわかっているという状況を想定する. 例えば,  $\tilde{h}_i$  は  $h_i(t)$  の長期平均であることに着目し,  $\tilde{h}_i$  は  $h_{ik}$  ( $k = 0, \dots, K$ ) の標本平均として与える. これにより次のような単純化ができる.

$$Y_{ik} = b_i Z_{ik} + u_{ik} \quad (31)$$

ただし  $Y_{ik} = h_{ik+1} - h_{ik}$  である. また,  $Z_{ik} = (\tilde{h}_i - h_{ik})\Delta t$  である.  $u_{ik}$  は平均 0, 分散  $\sigma_i^2\Delta t$  の正規分布に従う攪乱項である. これは線形回帰式に他ならない. 従って,  $h(t)$  は次のような SUR モデルとして表現できる.

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_i &= \mathbf{Z}_i b_i + \mathbf{u}_i & (i = 1, \dots, n) \\ E[u_{ik}] &= 0 & (i = 1, \dots, n, k = 0, \dots, K) \\ E[u_{ik}^2] &= \sigma_i^2 \Delta t & (i = 1, \dots, n, k = 0, \dots, K) \\ E[u_{ik}u_{jk}] &= \sigma_i\sigma_j\rho_{ij}\Delta t & (i, j = 1, \dots, n, k = 0, \dots, K) \\ E[u_{ik}u_{jl}] &= 0 & (\text{if } k \neq l) \end{aligned} \quad (32)$$

<sup>6</sup>同一の発行体が発行する債券の種類が少ない, 社債は通常利付債であり, 必要な割引債のイールドカーブが得られない等の理由による.

ただし  $\mathbf{Y}_i = (Y_{i1}, \dots, Y_{iK})'$ ,  $\mathbf{Z}_i = (Z_{i1}, \dots, Z_{iK})'$ ,  $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, \dots, u_{iK})'$  である。  $\mathbf{Y}_i$  と  $\mathbf{Y}_j$  ( $i, j = 1, \dots, N$ ,  $i \neq j$ ) は誤差項についてのみ関係していることに注意する。ここから、GLS を用いて  $b_i, \sigma_i, \rho_{ij}$  を推定することができる。

以上から  $\hat{P}$  の下でのハザード過程  $h$  が求まるが、式 (9) で表されるインプライド・デフォルト相関係数の評価には  $P$  の下でのハザード過程を特定する必要がある<sup>7</sup>。そのためにはリスクの市場価値  $\beta$  を推定し、それをを用いて  $\bar{h}_i$  を決定することとなる。 $\beta$  の推定方法は様々なものが考えられ、例えば各格付毎に公開されているデフォルト確率を用いて、式 (24) からインプライドに求めることができる。

## 5 推計結果

以上の方法を用いて実際にデフォルト相関係数の簡単な推計を行い、結果を示す。はじめに、Bloomberg データ端末より取得した格付けのある社債データに基づいて推計し、格付けごとの平均パラメータを示す。その後、具体的な企業のデフォルト相関係数を推計し、その分析例を示す。ただし以下の設定を置いた。

- $\delta_i = 0.5$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) とする。
- 簡単化のため、 $\beta_i = 0$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) として計算した。
- 社債スポットレートの代理変数として、最終利回り (複利) を用いる<sup>8</sup>。

第二の仮定について、 $\beta = 0$  のとき、 $P$  の下での  $h(t)$  と  $\hat{P}$  の下での  $h(t)$  は一致することに留意すべきである。また、第三の仮定は、本研究で扱おうとしている社債を、割引債のように扱う必要があることによる。しかし、あくまでデフォルト相関係数を求めることが本分析の目的である為、ここではクーポンは無視することにする。利付け債の情報から割引債の情報を抽出する方法としては様々あるが、例えばマカロフの方法等を用いて社債のゼロクーポン・イールドカーブを得るといえることが考えられる (McCulloch[23])。

### 5.1 日本債券市場のハザード過程の推定

式 (11) によって定義した OU 過程に従うハザード過程のパラメータ推定を行う。データは Bloomberg 端末により入手した 1998 年 9 月から 2003 年 9 月までの日次社債データである。選択した社債は、十分な取引高が存在する普通社債で、発行条件が一般的であり、さらに同一の業種に偏らない、という条件の下で選択した。その結果 25 銘柄の社債を選択した。

具体例として、麒麟麦酒株式会社と新日本石油株式会社のスポットレートのプレミアムが推移する様子を図 4 に示した。この図からは一定の相関関係を読み取ることができる。推定の結果、ハザード過程  $h(t)$  の推定パラメータは、麒麟麦酒株式会社が  $\bar{h} = 0.0036$ ,  $b = 25.4669$ ,  $\sigma = 0.0038$ , 新日本石油株式会社は  $\bar{h} = 0.0066$ ,  $b = 1.3188$ ,  $\sigma = 0.0032$  であった。さらに、両社のハザードの相関係数は  $\rho = 0.1997$  と推計された。

表 2 には選択された 25 銘柄の推定結果を格付け毎に示した。格付けデータは 2003 年 9 月 1 日現在の日本格付投資センターによるものを利用した。この表によると、平均パラメータは、 $\bar{h} = 0.0302$ ,  $b = 2.8461$ ,  $\sigma = 0.0138$  であった。また、その中から任意の 2 銘柄を選んだ場合の相関係数は概ね  $\rho = -0.4 \sim 0.8$  であった。

格付け別に見ると、格付け BB 以下の企業では、 $\bar{h} = 0.0858$ ,  $b = -0.3175$ ,  $\sigma = 0.0283$  であったのに対し、格付け A 以上の企業では、 $\bar{h} = 0.0058$ ,  $b = 3.4078$ ,  $\sigma = 0.0063$  であった。これは、格付けが低い企業ではハザード過程がよりボラタイルである傾向があったことを示している。また、BB 以下の企業の  $b$  の値が非常に小さくなっているが、これは平均から離れていくということであり、 $h(t)$  が負の値になる可能性が高いことを示唆している。

推定されたパラメータの平均を元にインプライド・デフォルト確率を格付毎に計算し、期間構造を描いたものが図 5 である。我々は  $\beta = 0$  と仮定しており、従って  $\hat{P}$  の下でのデフォルト確率である。この場合、現実のデフォルト確率として想定しているものとは意味が異なる。

<sup>7</sup>すなわち、 $\bar{h}$  を求める必要がある。 $\hat{P}$  の下でのハザードのパラメータ  $\bar{h}$  をそのまま  $\bar{h}$  に代えて式 (9) を評価すると、それはリスク中立確率分布における相関係数を意味することになる。

<sup>8</sup>即ち、クーポンの影響は無視する。

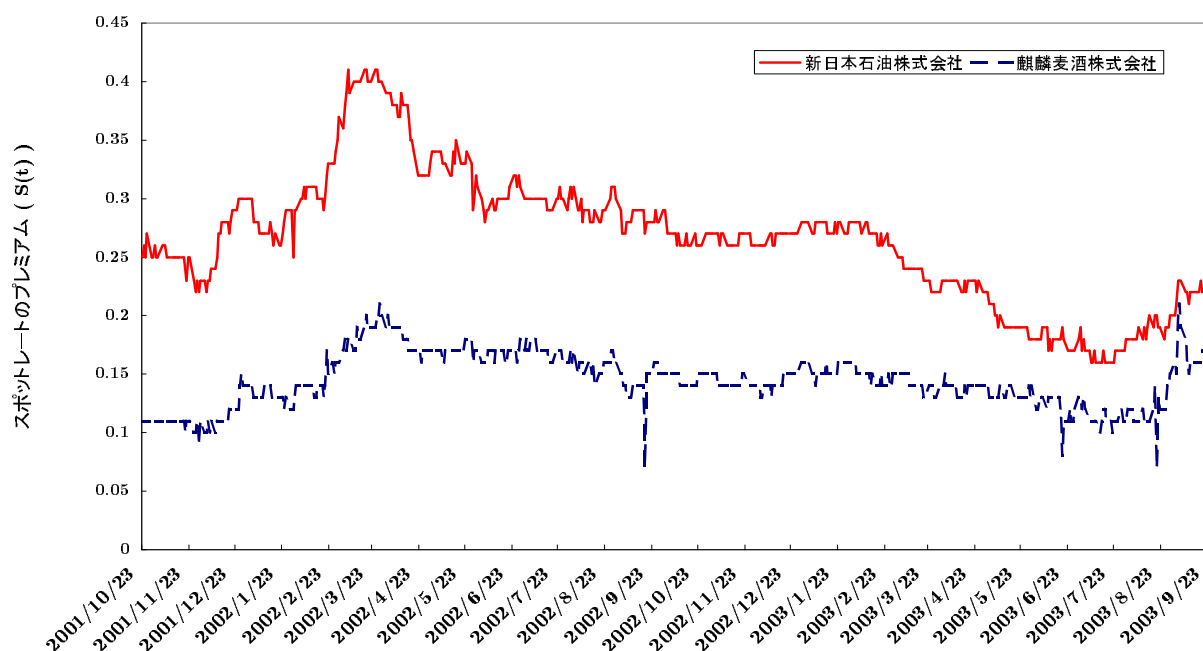


図 4: 麒麟麦酒株式会社と新日本石油株式会社のスポットレートのプレミアム. 全データのうち両銘柄とも取得できた 2001 年 10 月 23 日 ~ 2003 年 9 月 23 日迄の期間をプロットした. ハザード過程  $h(t)$  の推定パラメータは, 麒麟麦酒株式会社が  $\bar{h} = 0.0036, b = 25.4669, \sigma = 0.0038$ , 新日本石油株式会社は  $\bar{h} = 0.0066, b = 1.3188, \sigma = 0.0032$  であった. また, 両社のハザードの相関係数は  $\rho = 0.1997$  と推計された. ただしグラフの縦軸は  $S(t) = \hat{r}(t) - r_0(t)$ ,  $S(t)$  の単位は百分率である.

表 2: 推定パラメータの平均値 Bloomberg 端末より入手した 1998 年 9 月 ~ 2003 年 9 月の 25 銘柄の社債データを基に格付毎に推計. 格付は 2003 年 9 月 1 日現在の日本格付投資センターによるものを利用.

	長期平均 ( $\bar{h}$ )	平均回帰係数 ( $b$ )	ボラティリティ ( $\sigma$ )
全体	.0302	2.8461	.0138
A 以上	.0058	3.4078	.0063
BBB	.0155	1.9728	.0081
BB 以下	.0858	-.3175	.0283

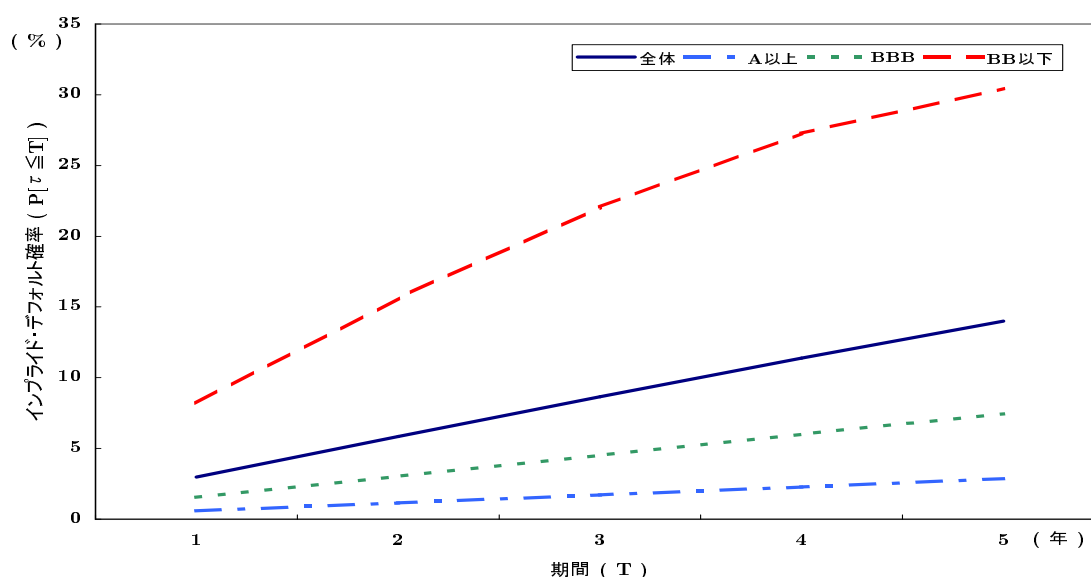


図 5: 格付毎のデフォルト期間構造 縦軸の単位はパーセント. Bloomberg 端末より入手した 1998 年 9 月 ~ 2003 年 9 月の 25 銘柄の社債データを基に格付毎に推計し, その結果得られたパラメータからインプライドに計算. ただし, ここでは現時点におけるハザード  $h(0)$  は長期平均  $\bar{h}$  として計算した. 格付けは 2003 年 9 月 1 日現在の日本格付投資センターによるものを利用.

どの格付けに関しても, 右上がりの緩やかな曲線が描かれ, 格付が低いものからインプライド・デフォルト確率が高くなっている. このようにデフォルトの期間構造を得ることができる点は誘導型モデルの特徴であり, 信用リスク分析を行う上で大きなメリットである.

## 5.2 デフォルト相関係数の推計

次に, インプライド・デフォルト相関係数の有用性を示すため, 異なる銘柄構成によるポートフォリオを作成し, 実際に満期を 1 年とした場合のデフォルト相関係数を推計する. データを入手した 25 銘柄の中から一様抽出によりランダムサンプリングを行った 10 銘柄によるポートフォリオ (サンプル・ポートフォリオ) と, それとは別に電機 10 銘柄の当該期間におけるデータを新たに入手し, 電機ポートフォリオを構成する. サンプル・ポートフォリオは利用可能なデータから無作為に抽出しており, 偏向のない標準的なポートフォリオと考えることができる.

電機ポートフォリオのハザード過程を推定した結果は表 3 のようになった. また, 両ポートフォリオのインプライド・デフォルト相関係数を計算した結果は表 4, 表 5 のようになった.

サンプル・ポートフォリオのインプライド・デフォルト相関係数は概ね 0.1 ~ 0.6 と推計された. また, 電機ポートフォリオのインプライド・デフォルト相関係数は, 0.4 ~ 0.8 で推計された. 電機ポートフォリオのインプライド・デフォルト確率は 1.5% 程度であり, 図 (5) と比較すればわかるように, デフォルト確率は非常に低い水準である. それに関わらず, この結果からは, 電機ポートフォリオに業種相関があり, その結果ポートフォリオ全体として高い相関を持っていることが示唆される.

勿論, 真の標準ポートフォリオの構成が困難であることや, 一定期間で電機業界の全ての銘柄のデータを用いることは不可能なため, 厳密な意味での業種間比較は困難である. しかし実際に銀行や投資家が保有するポートフォリオの相関構造を分析する上では有用な情報である.

## 5.3 インプライド・デフォルト相関係数とハザード相関係数

表 6 は前節で用いた電機ポートフォリオのハザード相関係数である. 表 5 と比較するとハザード相関係数に近い値となっていることがわかる. しかし完全に一致しているわけではない.

$\rho_{ij}$  と  $\rho(1_{\{\tau_i \leq T\}}, 1_{\{\tau_j \leq T\}} | \mathcal{F}_t)$  の関係については, 付録 B を参照.

表 3: 電機ポートフォリオのハザード過程の推定結果 Bloomberg より取得した 1998 年 9 月 ~ 2003 年 9 月までの日次社債データを元に推定.

企業 \ 項目	長期平均 ( $\bar{h}$ )	平均回帰係数 ( $b$ )	ボラティリティ ( $\sigma$ )	デフォルト確率 ( $P[\tau \leq 1]$ )
1	.0106	.4572	.0050	.0178
2	.0060	1.0624	.0046	.0101
3	.0110	-1.1132	.0052	.0272
4	.0093	.0768	.0050	.0171
5	.0091	1.3629	.0062	.0137
6	.0080	3.3173	.0052	.0097
7	.0085	.2988	.0050	.0126
8	.0054	4.1091	.0047	.0063
9	.0081	1.3360	.0051	.0113
10	.0127	-.0011	.0052	.0208
平均	.0089	1.0906	.0051	.0147

表 4: サンプル・ポートフォリオのインプライド・デフォルト相関係数. Bloomberg 端末より入手した 1998 年 9 月 ~ 2003 年 9 月の 25 銘柄の社債データから一様にランダム・サンプリングした 10 銘柄のデータを基に推計.

企業 \ 企業	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	.3559	.0962	.1736	.2817	.3779	.3657	.5539	.6835	.1528
2	.3559	1	.1751	.1309	.6189	.6010	.6426	.4118	.3621	.4354
3	.0962	.1751	1	.0658	.2032	.2329	.2074	.0551	.0982	.1234
4	.1836	.1309	.0658	1	.1029	.1039	.1719	.2796	.2553	.0999
5	.2817	.6159	.2032	.1028	1	.5706	.5775	.2761	.2839	.4641
6	.3779	.6010	.2329	.1039	.5706	1	.7057	.3050	.2969	.2979
7	.3657	.6426	.2074	.1719	.5775	.7057	1	.3971	.3661	.3947
8	.5539	.4118	.0551	.2798	.2761	.3050	.3971	1	.7932	.2188
9	.6835	.3621	.0982	.2553	.2839	.2969	.3661	.7932	1	.2062
10	.1528	.4354	.1234	.0999	.4641	.2979	.3947	.2166	.2062	1

表 5: 電機ポートフォリオのインプライド・デフォルト相関係数. Bloomberg 端末より入手した 1998 年 9 月 ~ 2003 年 9 月の電機業界の社債データを基に推計.

企業 \ 企業	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	.7493	.7193	.6113	.4913	.5707	.6836	.6091	.5730	.5925
2	.7493	1	.7381	.6131	.5546	.6410	.7696	.7248	.6385	.5575
3	.7193	.7381	1	.6058	.4997	.5714	.7463	.6043	.5966	.5909
4	.6113	.6131	.6058	1	.4224	.5457	.6099	.5449	.5164	.7726
5	.4913	.5546	.4997	.4224	1	.6232	.5314	.5811	.6285	.4098
6	.5707	.6410	.5714	.5457	.6232	1	.6590	.7392	.7980	.5030
7	.6836	.7696	.7463	.6099	.5314	.6590	1	.7109	.6768	.5594
8	.6091	.7248	.6043	.5449	.5811	.7392	.7109	1	.6999	.4844
9	.5730	.6385	.5966	.5164	.6285	.7980	.6768	.6999	1	.4783
10	.5925	.5575	.5909	.7726	.4098	.5030	.5594	.4844	.4783	1

表 6: 電機ポートフォリオのハザード相関係数. Bloomberg 端末より入手した 1998 年 9 月 ~ 2003 年 9 月の電機業界の社債データを基に推計.

企業 \ 企業	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	.7552	.7505	.6201	.4997	.5878	.6905	.6323	.5807	.6022
2	.7552	1	.7800	.6232	.5602	.6511	.7766	.7402	.6427	.5686
3	.7505	.7800	1	.6327	.5361	.6365	.7750	.6829	.6374	.6172
4	.6201	.6232	.6327	1	.4333	.5688	.6188	.5734	.5274	.7800
5	.4997	.5602	.5361	.4333	1	.6329	.5411	.5937	.6337	.4215
6	.5878	.6511	.6365	.5688	.6329	1	.6809	.7409	.8070	.5265
7	.6905	.7766	.7750	.6188	.5411	.6809	1	.7407	.6857	.5693
8	.6323	.7402	.6829	.5734	.5937	.7409	.7407	1	.7124	.5121
9	.5807	.6427	.6374	.5274	.6337	.8070	.6857	.7124	1	.4901
10	.6022	.5686	.6172	.7800	.4215	.5265	.5693	.5121	.4901	1



## 6 結論と今後の展望

本研究では、デフォルトのハザード過程に着目し、その相関関係を特定することによって、デフォルト相関係数をインプライドに推計する方法を示した。その結果、いくつかの仮定の下でデフォルトが稀であるような高格付け企業であってもデフォルト相関係数を推計することができた。本推計方法のメリットは次の二点である。第一に、推計に市場データを利用するため、デフォルトデータを必要とせずに推計が可能である。第二に、パラメータ推定に最適化計算を必要とせず、またシミュレーションも用いない為、短時間で容易に推計が可能である。

今後の展望として、以下の三点が挙げられる。第一に、デフォルトのハザード過程としてOU過程を用いたが、これは簡潔な結論を導く一方で負の値をとり得るため、本来ハザード過程には相応しくない。この点においては、改善の余地がある。第二に、回収率が一定であるという仮定を置いたが、実際には回収率はデフォルトが訪れてはじめて観測されるものである。回収率に何らかの確率的性質を持たせるなどの改善策が考えられる。第三に、 $\tilde{P}$ の下でのハザード過程を推定するためにGLS推定を用いたが、これは大規模なポートフォリオへの適応という点においては計算が比較的容易である点で有利であるものの、 $\tilde{h}$ が既知である必要があった。標本平均などで代用した場合、 $\tilde{h}$ は時間を通じて一定であるが、時系列で観測を十分大きくしても必ずしも正確な値を得られる確証はない。したがってハザード過程の推定方法についてはより正確性の高い方法が検討されるべきであろう。

## 付録 A 数式補足

### (5) 式の導出

ここでは、(5)式の導出を行う。RTの枠組みの下で、回収率を一定とし( $L(t) = L$ )、 $\delta \triangleq 1 - L$ と書くと、信用リスクのある債券価格は、次のように表すことができる。

$$X(t, T) = 1_{\{\tau > t\}} \tilde{E} [\exp \{-H_0(t, T)\} \{\delta + (1 - \delta) 1_{\{\tau > T\}}\} | \mathcal{F}_t]$$

従って、これを次のように変形することによって求める式が得られる。

$$\begin{aligned} X(t, T) &= 1_{\{\tau > t\}} \tilde{E} [\exp \{-H_0(t, T)\} \{\delta + (1 - \delta) 1_{\{\tau > T\}}\} | \mathcal{F}_t] \\ &= 1_{\{\tau > t\}} X_0(t, T) \left\{ \delta + (1 - \delta) \tilde{E} [1_{\{\tau > T\}} | \mathcal{F}_t] \right\} \\ &= 1_{\{\tau > t\}} X_0(t, T) \left\{ \delta + (1 - \delta) \tilde{P} [\tau > T | \mathcal{F}_t] \right\} \\ &= 1_{\{\tau > t\}} X_0(t, T) \left\{ \delta + (1 - \delta) \tilde{E} [\exp \{-H(t, T)\} | \mathcal{G}_t] \right\} \end{aligned} \quad (A1)$$

### (7) 式の導出

ここでは、式(7)の導出を行う。

いま、仮に時点 $T$ までのハザード過程に関する情報 $\mathcal{G}_T$ 及び、時点 $t$ までのデフォルト有無に関する情報 $\mathcal{H}_t$ が与えられたとき、即ち $\mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t$ が与えられたとき、もはや $h_i(t)$ は期待値から外すことができる。このとき、 $\{\tau_i > t\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )の上で、次が成立する。

$$\mathbf{P}[\tau_i > T | \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t] = \exp \{-H_i(t, T)\}$$

証明については丸茂・家田 [31] に詳しい。

これを用いて任意の時点 $t$  ( $0 \leq t \leq T$ ) に対して次のように周辺生存確率を表すことができる。 $\{\tau_i > t\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )の上で、

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[\tau_i > T | \mathcal{F}_t] &= E[\mathbf{P}[\tau_i > T | \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t] | \mathcal{F}_t] \\ &= E[\exp \{-H_i(t, T)\} | \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

この周辺分布から同時生存確率を得るために条件付独立の仮定を導入する。即ち、次式のような関係を仮定する。

$$\mathbf{P}[\tau_1 > t_1, \dots, \tau_n > t_n | \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t] = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}[\tau_i > t_i | \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t]$$

これは、時点  $T$  迄のハザードに関する情報集合と、時点  $t$  迄のデフォルト有無に関する情報のみが与えられたとき、デフォルトが独立に生起するというものである。条件付独立と独立の関係については、Stoyanov [24] を参照せよ。

この結果、時点  $t$  における同時生存確率を次のように表現できる。

$\{\tau_i > t\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) の上で、

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[\tau_1 > t_1, \dots, \tau_n > t_n | \mathcal{F}_t] &= E[\mathbf{P}[\tau_1 > t_1, \dots, \tau_n > t_n | \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t] | \mathcal{F}_t] \\ &= E\left[\prod_{i=1}^n \mathbf{P}[\tau_i > t_i | \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t] \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= E\left[\prod_{i=1}^n \exp\{-H_i(t, t_i)\} \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= E\left[\exp\left\{-\sum_{i=1}^n H_i(t, t_i)\right\} \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= E\left[\exp\left\{-\sum_{i=1}^n H_i(t, t_i)\right\} \middle| \mathcal{G}_t\right]. \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

最初の等号は、 $(\mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t) \supset (\mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_t) = \mathcal{F}_t$  より成り立つ。第二の等号は、条件付独立の仮定により成立する。最後の等号は  $\exp\{-\sum_{i=1}^n H_i(t, t_i)\}$  が  $\mathcal{H}_t$  と独立であることより成立する。

## 付録 B インプライド・デフォルト相関とハザード過程の相関の関係

インプライド・デフォルト相関係数とハザード過程の相関係数との関係について考察する。

$$\begin{aligned} &B(b_i, b_j, \sigma_i, \sigma_j, t, T) \\ &\equiv \frac{\sigma_i \sigma_j}{b_i b_j} \left( T - t - \frac{1 - \exp\{-b_i(T - t)\}}{b_i} - \frac{1 - \exp\{-b_j(T - t)\}}{b_j} + \frac{1 - \exp\{-(b_i + b_j)(T - t)\}}{b_i + b_j} \right) \end{aligned}$$

とすると、(25) 式は、次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} v_{ij}(t, T) &= \sigma_i \sigma_j \int_t^T \frac{1}{b_i} (1 - \exp\{-b_i(T - t)\}) \frac{1}{b_j} (1 - \exp\{-b_j(T - t)\}) \rho_{ij} ds \\ &= \rho_{ij} \frac{\sigma_i \sigma_j}{b_i b_j} \left( T - t - \frac{1 - \exp\{-b_i(T - t)\}}{b_i} - \frac{1 - \exp\{-b_j(T - t)\}}{b_j} + \frac{1 - \exp\{-(b_i + b_j)(T - t)\}}{b_i + b_j} \right) \\ &\equiv \rho_{ij} B(b_i, b_j, \sigma_i, \sigma_j, t, T) \end{aligned}$$

ただし  $v_{ii}(t, T) = v_i(t, T)$ 。

次に、 $\rho_{ij}$  の値に対する  $\rho_{ij}$  の感応度を調べる。即ち、

$$\frac{\partial}{\partial \rho_{ij}} \rho(1_{\{\tau_i \leq T\}}, 1_{\{\tau_j \leq T\}} | \mathcal{F}_t) = \frac{\exp\{\rho_{ij} B(b_i, b_j, \sigma_i, \sigma_j, t, T)\} B(b_i, b_j, \sigma_i, \sigma_j, t, T)}{\sqrt{(\exp\{v_{ii}(t, T)\} - 1)(\exp\{v_{jj}(t, T)\} - 1)}} \quad (\text{B3})$$

となり、 $\rho_{ij}$  の値によって、 $\rho_{ij}$  の感応度の値は単調増加である。また、 $B(b_i, b_j, \sigma_i, \sigma_j, t, T)$  の符号に関わらず最も感応度が高まるのは  $\rho_{ij} = 1$  のときである。逆に最も低下するのは  $\rho_{ij} = -1$  のときである。

以上から、ハザード相関が高いほど、デフォルト相関も高くなるという単調な関係が理解できる。また、ハザード相関係数に対する感応度は、 $\rho_{ij}$  が 1 のとき最大となり、 $\rho_{ij}$  が -1 のとき最小となる。

## 参 考 文 献

- [1] Aonuma, K., and Nakagawa, H., "Valuation of Credit Default Swap and Parameter Estimation for Vasicek-type Hazard Rate Model", Working paper.
- [2] Basel Committee on Banking Supervision. (1999). "Credit Risk Modelling: Current Practice and Application".
- [3] Basel Committee on Banking Supervision. (2003). "The New Basel Capital Accord, Third Consultative Paper".
- [4] Collin-Dufresne, P., R.S. Goldstein, and J. Hugonnier. (2003) "A general formula for valuing defaultable securities". Working paper, CMU.
- [5] Duffie, D. (1998) "First-to-Default Valuation". Working paper, Stanford University.
- [6] Duffie, D., J. Pan, and Singleton, K.. (2000) "Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump Diffusions". *Econometrica*, **68**, 1343-1376.
- [7] Duffie, D., and Singleton, K. (1999). "Modeling term structures of defaultable bonds". *Review of Financial Studies*, **12**, 687-720.
- [8] Duffie, D., and Singleton, K. (1999). "Simulating credit correlation". Workingpaper, GSB, Stanford University.
- [9] Duffie, D., and Singleton, K. (2003). *Credit Risk: Pricing, Management, and Measurement (Princeton Series in Finance)*, Princeton University Press.
- [10] Giesecke, K. (2004). "Credit risk modeling and valuation: an introduction" in *Credit Risk: Models and Management*, **2**, Edited by D. Shimko, Riskbooks, London.
- [11] Giesecke, K., and Weber, S. (2003). "Cyclical correlations, credit contagion, and portfolio losses". to appear in *Journal of Banking and Finance*.
- [12] Giesecke, K., and Weber, S. (2003). "Correlated default with incomplete information". to appear in *Journal of Banking and Finance*.
- [13] Gordy, M.B. (2003). "A risk-factor model foundation for rating-based bank capital rules". *Journal of Financial Intermediation*, **12**, 199-232.
- [14] Jacobson, T., and Roszbach, K. (2003). "Bank lending policy, credit scoring and value-at-risk". *Journal of Banking and Finance*, **27**, 615-633.
- [15] Jarrow, R.A., and Turnbull, S.M. (1995). "Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk". *Journal of Finance*, **50**, 53-86.
- [16] JP Morgan. (1997). "CreditMetrics Technical Document". JP Morgan, New York.
- [17] Kijima, M. (1999). "A gaussian term structure model of credit risk spreads and valuation of yield-spread options". Workingpaper, Tokyo Metropolitan University.
- [18] Kijima, M. (2000). "Valuation of a credit swap of the basket type." *Review of Derivatives Research*, **4**, 79-95.
- [19] Kijima, M., and Muromachi, Y. (2000). "Credit events and the valuation of credit derivatives of basket type." *Review of Derivatives Research*, **4**, 53-77.
- [20] Kijima, M., and Muromachi, Y. (2000). "Evaluation of credit risk of a portfolio with stochastic interest rate and default processes". *Journal of Risk*, **3**(1), 5-36.
- [21] Kusuoka, S., "A remark on default risk models". *Advances in Mathematical Economics* **1**, 69-82, 1999
- [22] Merton, R. (1974). "On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates". *Journal of Finance*, **29**, 449-470.

- [23] McCulloch, J.H. (1971) "Measuring the term structure of interest rates". *Journal of Business*, **44**, 19-31.
- [24] Stoyanov, J. (1987). *Counterexamples in Probability*. Wiley, New York.
- [25] M. Jeanblanc and Rutkowski, M. (2000). "Modeling default risk: Mathematical tools." *Universite d'Evry and Warsaw University of Technology*.
- [26] Vasicek, Oldrich. (1977). "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, **5**, 177-188.
- [27] 木島正明, 小守林克哉. (1999). 「信用リスク評価の数理モデル」, 朝倉書店.
- [28] 金融庁. (2004). 「預金等受入金融機関に係る検査マニュアル」, 金融庁.
- [29] 楠岡成雄, 青沼君明, 中川秀敏. (2001). 「クレジット・リスク・モデル」, 金融財政事情研究会.
- [30] 津田博. (2002). "銘柄間の価格連動性を考慮した社債価格モデルに基づく信用リスク情報の推定 - 倒産確率の期間構造と回収率の推定 -". 「統計数理」, **50**(2), 217-240.
- [31] 丸茂幸平, 家田明 "信用リスクのある金融商品のコックス過程を用いたプライシング方法" 「金融研究」, 日本銀行 2001
- [32] 森村英敬, 木島正明 「ファイナンスのための確率過程」 日科技連, 1991
- [33] 山下智志, 川口昇, 敦賀智裕. (2003). "信用リスクモデルの評価方法に関する比較と考察". 金融庁 金融研究研修センター ディスカッションペーパーシリーズ.