漸近展開を用いたＨＪＭモデルにおける オプション・プライシング[*,†]

高橋 明彦[‡]　　　　松島 周一郎[§]

概　　要

ＨＪＭモデルにおける債券オプション価格に対し、漸近展開法に基づく新しい解析近似式を導出した。さらに、漸近展開を活用したモンテカルロ・シミュレーションの分散減少法を考案し、現実的な２ファクターモデルに対してその精度を検証し有効性を示した。

[*]本稿の内容は全て著者の個人的見解であり、金融庁あるいは金融研究研修センターの公式見解ではない。

[†]本稿の執筆にあたっては、日本銀行金融研究所企画役　内田善彦氏に有益なご意見をいただいた。

[‡]東京大学大学院経済学研究科助教授　金融庁金融研究研修センター特別研究員
[§]住友生命保険相互会社主計部主計課

1　はじめに

Heath,Jarrow and Morton[1992] は初期時点の金利の期間構造を自動的に再現し、フォワード・レート (instantaneous forward rates) のボラティリティ関数を特定することにより金利派生証券の価値評価が可能となる金利モデルの一般的な枠組みを提示した (以降、この枠組みに属するモデルを HJM モデルと呼ぶ)。

この枠組みの中で様々な具体的なモデルが検討されたが、金利の非負条件の下では標準的な債券オプション、スワップションでさえそのヨーロピアン・オプション価格の解析的表現を得ることは難しく、モンテカルロ・シミュレーションなどの数値的近似法による評価が一般的である。

HJM モデルにおいては、t 時点における $u(\geq t)$ 時点開始の微小金利期間フォワード・レート $\{f(t,u)\}_{0\leq t\leq u<\infty}$ の同値マルチンゲール (リスク中立) 測度における確率微分方程式は

$$f(t,u) = f(0,u) + \sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_i(f(v,u),v,u)\int_t^u \sigma_i(f(v,z),v,z)dzdv + \sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_i(f(v,u),v,u)dW_i(v)$$

により表される。モンテカルロ・シミュレーションの場合、マネー・マーケットの短期金利 $r(t) = f(t,t)$ 及び、評価対象の派生証券に関連する全てのフォワード・レートの変動を表す上式を離散化し、シミュレーションを実施するが、実用に耐えうる精度を得るためにかなりの計算時間を要する。本稿では、この欠点を解消するため、漸近展開に基づく方法を提案する。

漸近展開法は、ヨーロッパ型の派生証券の評価に対し、不確実性がブラウン運動で表現されるとき、原資産価格が一般的な (多次元) マルコフ型の連続確率過程に従う場合 (Kunitomo and Takahashi[1992]、Takahashi[1995]、[1999])、また、金利に関しては必ずしもマルコフ型とはならない連続確率過程に従う場合 (Kunitomo and Takahashi[2001]) も含め、実用に耐えうる精度の解析的な近似を与える統一的な方法である。漸近展開法は、直感的には、対象となる確率過程を、そのブラウン運動の係数がゼロのまわり、即ち、非確率的な過程のまわりで展開する確率的なテイラー展開と言え、数学的には、確率解析におけるマリアバン・渡辺理論 (例えば、Ikeda and Watanabe[1989]、Yoshida[1992] を参照) に基づき正当化される。(詳細は Kunitomo and Takahashi[2003a] を参照。) ファイナンスの分野における応用範囲も先述のヨーロッパ型派生証券の評価のほか多岐にわたり、動的最適ポートフォリオ (Takahashi and Yoshida[2001a]、[2004] 、Kobayashi, Takahashi and Tokioka[2001]、Kunitomo and Takahashi[2003b])、モンテカルロ・シミュレーションの効率化 (Takahashi and Yoshida[2001b]) などがある。さらに、高橋・斎藤 [2003] はアメリカ型派生証券への適用を、Kunitomo and Takahashi[2003b] はジャンプ・拡散過程への適用も示した。なお、これらファイナンスにおける漸近展開法の応用全般の解説は、国友・高橋 [2003] を参照されたい。

本稿では、いわゆる先渡し測度 (forward measure) 用いることにより前提となる確率微分方程式を変換し、これに対し漸近展開を適用することで債券オプションおよびスワップション価値の解析的近似式を導出する。Kunitomo and Takahashi[2001] はリスク中立測度の下における漸近展開により解析的近似式を導出したが、先渡し測度の下で得られた近似式はその近似式に比べかなり簡易なものとなり、数値的評価が容易になる利点を持つ。また、Takahashi and Yoshida[2001b] は漸近展開法を活用したモンテカルロ・シミュレーションの分散減少法を開発したが、我々はこの方法を拡張し、モンテカルロの分散をさらに減少できることを示す。この結果、シミュレーションの収束が大幅に早くなると共に、漸近展開による解析的近似の誤差を縮小することが可能となる。さらに、金利の非負条件を満たし現実的なボラティリティ関数を持つ２ファクターＨＪＭモデルに対し、これらの手法が有効なことを数値計算を通じて明らかにする。

本論文の構成は以下の通りである。次節では具体的な問題設定を行い、第３節では、漸近展開に基づく債券オプション価格の解析近似式を導出する。そして最後に第４節では、漸近展開を用いたモンテカルロの分散減少法を示し、解析近似式と共に数値例による検証を行う。

2　問題設定

2.1　原資産の債券について

この論文において問題とする債券オプションをモデル化する。まず、現時点を時点 0 として取引期間を $[0, T]$　$(T < \infty)$ とする。ここで、
「フィルトレーション付き確率空間：$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \le t \le T}, P)$」
が与えられて、金利や債券の価格を $\mathcal{F}_t$-可測な確率過程であると考える。但し、フィルトレーションは通常の条件 (usual conditions) を満たすとする。その上で、分析の対象となるオプションの原資産である利付債券を固定する。そして、そのオプションに対して、

- ヨーロピアン・オプションの行使時点：$\bar{T}$　$(0 < \bar{T} < T)$
- ヨーロピアン・オプションの行使価格：K

原資産に対しては、

- キャッシュ・フローの発生時点：$(\bar{T} <)T_1 < ... < T_m \le T$
- 各 T_j 時点に発生するキャッシュ・フロー：c_j　$(j = 1, ..., m)$

が与えられているものとして、このオプションの価格を求めていく。

2.2　ＨＪＭモデルについて

ここでは、いわゆるフォワード・レートについて考える。所与のフィルトレーション付き確率空間：$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \le t \le T}, P)$ に対して、フォワード・レートを $\mathcal{F}_t$-可測な確率過程であると考え $f(t,u)(t \le u)$ と置いた時、$f(t,u)$ は

$$f(t,u) = f(0,u) + \int_0^t \alpha(f(v,u), v, u)dv + \int_0^t \sum_{i=1}^n \sigma_i(f(v,u), v, u)dW_i(v) \tag{1}$$

という確率微分方程式を満たすとする。ただし、
　　$\alpha(x,y,z), \sigma_i(x,y,z)$　$(1 \le i \le n)$ は 3 変数実数値関数
　　$W(t) = \{W_i(t)\}_{1 \le i \le n}$ は n 次元ブラウン運動
とする。

　フォワード・レート過程が (2.2) の形の確率微分方程式を満たすというのが、Heath,Jarrow and Morton[1992] が提案したいわゆるＨＪＭモデルである。このモデルについて以下で簡潔にまとめる。

　フォワード・レートの考え方から、$u(> \bar{T})$ 時点を満期とする割引債の t 時点における価格過程 $P(t,u)$ は

$$P(t,u) = \exp\left\{-\int_t^u f(t,z)dz\right\}$$

となる。よって、原資産である債券に対するキャッシュフロー発生時点 T_j を満期とする t 時点における割引債価格 $P(t,T_j)$ は

$$P(t,T_j) = \exp\left\{-\int_t^{T_j} f(t,z)dz\right\} \qquad (j = 1, ..., m)$$

と表現される。ここで新たに、これらの割引債価格を $\bar{T}$ を満期とする割引債価格で割ったものを考え、これを $P^{\bar{T}}(t,T_j)$ とすると

$$P^{\bar{T}}(t,T_j) = \frac{P(t,T_j)}{P(t,\bar{T})} = \exp\left\{-\int_{\bar{T}}^{T_j} f(t,z)dz\right\} \qquad (j = 1, ..., m)$$

となる。HJMモデルにおいては、(1) 式を用い積分順序を交換すれば

$$
\begin{aligned}
\log P^{\bar{T}}(t,T_j) &= -\int_{\bar{T}}^{T_j} f(t,z)dz \\
&= -\int_{\bar{T}}^{T_j} f(0,z)dz - \int_0^t \int_{\bar{T}}^{T_j} \alpha((f(v,z),v,z)dzdv \\
&\quad - \int_0^t \int_{\bar{T}}^{T_j} \sum_{i=1}^n \sigma_i(f(v,z),v,z)dzdW_i(v)
\end{aligned}
$$

の関係が成り立つ。さらに伊藤の公式を使うことにより、$P^{\bar{T}}(t,T_j)$ は

$$
\begin{aligned}
dP^{\bar{T}}(t,T_j) &= P^{\bar{T}}(t,T_j)\Big[d\log P^{\bar{T}}(t,T_j) + \frac{1}{2}d\langle \log P^{\bar{T}}(\cdot,T_j)\rangle_t\Big] \\
&= P^{\bar{T}}(t,T_j)\Big[b(f(t,T_j),t,T_j)dt + \sum_{i=1}^n a_i(f(t,T_j),t,T_j)dW_i(t)\Big]
\end{aligned}
$$

という確率微分方程式を満たす。ただし、

$$
\begin{aligned}
a_i(f(t,T_j),t,T_j) &= -\int_{\bar{T}}^{T_j} \sigma_i(f(t,z),t,z)dz \\
b(f(t,T_j),t,T_j) &= -\int_{\bar{T}}^{T_j} \alpha(f(t,z),t,z)dz + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i(f(t,T_j),t,T_j)^2
\end{aligned}
$$

とおいた。このことから、測度変換によって $P^{\bar{T}}(t,T_j)$ がマルチンゲールになることが期待されるが、そのためには以下の仮定を置くことが必要である。

仮定 1. 取引期間 $[0,\bar{T}]$、各割引債の満期 $(\bar{T} <)T_1,...,T_m$ に対して、上記の記号を用いて

$m \times n$ ボラティリティ行列：$\sigma(t) = \{\sigma(t)\}_{i,j} = a_i(t,T_j)$

$m \times 1$ ドリフト・ベクトル：$b(t) = (b_j(t)) = b(t,T_j)$

と置く。この時、

(i)rank$(\sigma(t)) = m \quad (a.s)$ であり、

(ii)$\mathcal{F}_t$-可測な $n \times 1$ 市場リスク価格過程ベクトル $\theta(t)$ が存在して、以下の 3 条件;

$$
\begin{cases}
-b(t) + \sigma(t)\theta(t) = 0 \quad (a.s.), \\
\displaystyle\int_0^{\bar{T}} \|\theta(t)\|^2 dt < \infty, \\
\mathbf{E}\Big[\exp\Big\{-\displaystyle\int_0^{\bar{T}} \theta(t)dW(t) - \frac{1}{2}\int_0^{\bar{T}} |\theta(t)|^2 dt\Big\}\Big] = 1,
\end{cases}
$$

を満たす。

この仮定は無裁定条件から得られるものであり、金利の変動要因を表すブラウン運動の次数 n よりも、分析の対象となる割引債の満期の数 m の方が多ければ、通常は成り立つものとして考えられ、以下この仮定を置いて議論を進める。

さて、この仮定の下では元の確率測度 P と同値なある確率測度 Q が存在して、その確率測度 Q の下では $W^*(t) = (W_i^*(t))$ は n 次元ブラウン運動となる。ただし、

$$
W_i^*(t) = W_i(t) + \int_0^t \theta_i(v)dv \qquad 1 \le i \le n
$$

である。各 $P^{\bar{T}}(t,T_j)$ は

$$
dP^{\bar{T}}(t,T_j) = P^{\bar{T}}(t,T_j)\Big[\sum_{i=1}^n a_i(f(t,T_j),t,T_j)dW_i^*(t)\Big]
$$

と表現されるので、この確率測度 Q の下で各 $P^{\bar{T}}(t,T_j)$ はマルチンゲールとなる。一方、仮定１の条件よりドリフト関数は制約条件

$$b(f(t,T_j),t,T_j)=\sum_{i=1}^{n}a_i(f(t,T_j),t,T_j)\theta_i(t)$$

を満たさなければならない。ここで任意の時点 $u(>\bar{T})$ に対して

$$\begin{aligned}
b(f(t,u),t,u) &= -\int_{\bar{T}}^{u}\left\{\alpha(f(t,z),t,z)+\sum_{i=1}^{n}a_i(f(t,z),t,z)\sigma_i(f(t,z),t,z)\right\}dz \\
\sum_{i=1}^{n}a_i(f(t,u),t,u)\theta_i(t) &= -\int_{\bar{T}}^{u}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(f(t,z),t,z)\theta_i(t)\right\}dz
\end{aligned}$$

が成り立つ。これは両辺を u で微分してみれば容易に分かる。よって、任意の時点 $u(\geq\bar{T})$ に対して

$$\alpha(f(t,u),t,u)+\sum_{i=1}^{n}a_i(f(t,u),t,u)\sigma_i(f(t,u),t,u)=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(f(t,u),t,u)\theta_i(t)$$

が成り立てば、ドリフト関数の制約条件を満たすことが分かる。したがって、測度変換を行ったブラウン運動を用いてフォワード・レート過程を表現しなおすと次の結果が得られる。

定理 1. フォワード・レート過程 $\{f(t,u)\}\quad(0\leq t\leq\bar{T},\bar{T}\leq u\leq T)$ が確率微分方程式 *(1)* の形で与えられているとする。ここで、仮定１が成り立つならばフォワード・レート過程 $\{f(t,u)\}$ は

$$\begin{aligned}
f(t,u)=f(0,u)&+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\sigma_i(f(v,u),v,u)\int_{\bar{T}}^{u}\sigma_i(f(v,z),v,z)dzdv \\
&+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\sigma_i(f(v,u),v,u)dW_i^*(v)
\end{aligned} \tag{2}$$

と表現される。ただし、$W^*(t)=(W_i^*(t))$ は確率測度 Q の下での n 次元ブラウン運動である。

以上で、無裁定条件からＨＪＭモデルにおけるフォワード・レートの満たす確率微分方程式が得られたが、この確率微分方程式は無条件に解を持つわけではない。そのため、以下の仮定を設定する。

仮定 2. ボラティリティ関数 $\sigma_i(f(v,u),v,u)$ は実数値を取り、変数 $(0\leq v\leq\bar{T},\bar{T}\leq u\leq T)$ について非負・有界な連続関数であり、さらに最初の変数についてリプシッツ連続であるとする。さらに、初期時点におけるフォワード・レート $f(0,u)$ は変数 u についてリプシッツ連続とする。

この仮定により確率微分方程式 (2) を満たす解が発散することはなくなり、一意解の存在について Morton[1989] による次の結果が知られている。

定理 2. 仮定２の下で、連続確率過程 $f(t,u)(0\leq t\leq\bar{T},\bar{T}\leq u\leq T)$ で、確率微分方程式 *(2)* を満足するものが一意に存在する。

以下では、この仮定を満たすボラティリティ関数に対して確率微分方程式 (2) を満足するフォワード・レート過程を考えていく。

2.3 オプションのプライシングについて

さて、以上の設定に対して t 時点における債券オプションの価格を $V(t) \quad (0 \le t \le \bar{T})$ と置く。

このオプションは、満期時点を $T_j(j=1,...,m)$ とする m 個の割引債の金融派生商品と考えることができる。ここで、確率測度 P と同値なある確率測度 Q が存在して、その確率測度 Q の下で上記の各 $P^{\bar{T}}(t,T_j)$ はマルチンゲールになるということが、上で得られている。つまり、$\bar{T}$ 満期の割引債価格をニューメレールとした場合に、満期を $T_j(j=1,...,m)$ とする m 個の割引債価格過程は、マルチンゲールになっているのである。

よって、数理ファイナンスでよく知られている事実により、オプションの価格過程 $V(t) \quad (0 \le t \le \bar{T})$ も $\bar{T}$ 満期の割引債価格をニューメレールとした場合に、確率測度 Q の下でマルチンゲールになっているのである。このことより現在時点 $(t=0)$ における債券オプションの価格 $V(0)$ は

$$\frac{V(0)}{P(0,\bar{T})} = \mathbf{E}^Q\left[\frac{V(\bar{T})}{P(\bar{T},\bar{T})}\right] = \mathbf{E}^Q[V(\bar{T})]$$
$$\therefore V(0) = P(0,\bar{T})\mathbf{E}^Q[V(\bar{T})]$$

となる。ここで、原資産の設定により例えばコール・オプションの価格は、

$$\begin{aligned} V_{call}(0) &= P(0,\bar{T})\mathbf{E}^Q\left[\left(\sum_{j=1}^m c_j P(\bar{T},\bar{T}_j) - K\right)_+\right] \\ &= P(0,\bar{T})\mathbf{E}^Q\left[\left(\sum_{j=1}^m c_j P^{\bar{T}}(\bar{T},\bar{T}_j) - K\right)_+\right] \end{aligned}$$

と表現でき、同様にプット・オプションの場合の価格は

$$V_{put}(0) = P(0,\bar{T})\mathbf{E}^Q\left[\left(K - \sum_{j=1}^m c_j P^{\bar{T}}(\bar{T},\bar{T}_j)\right)_+\right]$$

となる。ただし、$(x)_+ = \max\{x,0\}$ である。

よって、以下では確率微分方程式 (2) によって記述されたフォワード・レート過程 $f(t,u)(0 \le t \le \bar{T}, \bar{T} \le u \le T)$ を元に $V_{call}(0)$、および $V_{put}(0)$ を求めていく。また、上述の通りプライシングに際しては測度変換後の状況しか考えないこととする。

3 漸近展開によるオプション価格の解析近似

3.1 ボラティリティに対する仮定

さて、ここから漸近展開を用いたプライシングに取り掛かる。再びフォワード・レートの満たす確率微分方程式を記述すれば、

$$\begin{aligned} f(t,u) = f(0,u) &+ \sum_{i=1}^n \int_0^t \hat{\sigma}_i(f(v,u),v,u)\int_{\bar{T}}^u \hat{\sigma}_i(f(v,z),v,z)dzdv \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_0^t \hat{\sigma}_i(f(v,u),v,u)dW_i(v) \end{aligned}$$

であった。ここから漸近展開の手法を用いてオプション価格の解析近似を求めたいのだが、ここでは漸近展開の数理的に厳密な説明、および証明は行わない（国友・高橋 (2003) を参照)。以下、漸近展開の直感的な説明を行う。

まずボラティリティ関数が小さな値を取ることに注目して、元の確率微分方程式における $\hat{\sigma_i}(x,v,u)$ という関数を、$\varepsilon\sigma_i(x,v,u) \quad (0 < \varepsilon \le 1)$ という関数で置き換える。これは ε を固定すれば通常の確率微分方程式となり、各 ε に対する解が ε に対して滑らかに変化し、$\varepsilon = 0$ の近くでは確率過程を係数とする ε の多項式で近似できると考え、それによって近似解を求めるのである。

つまり、

$$f^{(\varepsilon)}(t,u) = f_0(t,u) + \varepsilon f_1(t,u) + \varepsilon^2 f_2(t,u) + o(\varepsilon^2)$$

として、これが

$$f^{(\varepsilon)}(t,u) = f(0,u) + \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v,u),v,u) \int_{\bar{T}}^{u} \sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v,z),v,z)dzdv$$
$$+ \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v,u),v,u)dW_i(v)$$

を満たすように、$f^{(\varepsilon)}(t,u)$ の漸近展開における各 $\varepsilon^k \quad (k=0,1,...)$ の係数である確率過程を求めることによって、元の確率微分方程式の近似解が得られるのである。この方法を用いるために以下の２つの仮定を設ける。

仮定 3. *(i)* パラメータ ε を固定した時、ボラティリティ $\sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v,u),v,u)$ は実数値を取り、変数 $(0 \le v \le \bar{T}, \bar{T} \le u \le T)$ について非負・有界な連続関数であり、さらに最初の関数について滑らかで全ての導関数はパラメータ ε について一様に有界であるとする。
(ii) 初期時点におけるフォワード・レート $f(0,u)$ は変数 u についてリプシッツ連続とする。

仮定 4. 任意の $(0 \le t \le \bar{T}, \bar{T} \le u \le T)$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^t \sigma_i(f^{(0)}(v,u),v,u)^2 dv > 0$$

が成り立つとする。

Morton[1989] により、仮定 3 を置けば確率微分方程式の解の存在が保証されることは前述の通りである。さらに、この仮定 3 と仮定 4 によって、漸近展開法による以下の議論が数学的に正当化されるので（国友・高橋 [2003] を参照)、以下これらが成立しているものとして話を進める。

3.2　フォワード・レートの漸近展開

次に、具体的に

$$f^{(\varepsilon)}(t,u) = f_0(t,u) + \varepsilon f_1(t,u) + \varepsilon^2 f_2(t,u) + o(\varepsilon^2)$$

と漸近展開して、

$$f^{(\varepsilon)}(t,u) = f(0,u) + \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v,u),v,u) \int_{\bar{T}}^{u} \sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v,z),v,z)dzdv$$
$$+ \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v,u),v,u)dW_i(v) \tag{3}$$

を満たすように各係数を求める。先程の仮定により右辺も漸近展開可能であるので、ε で次数分だけ微分して $\varepsilon = 0$ を代入する方法で各係数を計算できる。つまり、形式的に (3) 式の $f^{(\varepsilon)}(t,u)$ を $\varepsilon = 0$ のまわりでテーラー展開することと同等になる。すなわち、

$$f^{(\varepsilon)}(t,u) = f^{(\varepsilon)}(t,u)\Big|_{\varepsilon=0} + \varepsilon \frac{\partial f^{(\varepsilon)}(t,u)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} + \varepsilon^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^{(\varepsilon)}(t,u)}{\partial \varepsilon^2}\Big|_{\varepsilon=0} + o(\varepsilon^2)$$

である。まず $f_0(t,u)$ に関しては、$\varepsilon = 0$ を代入して、

$$f^{(0)}(t,u) = f(0,u)$$

となることが容易に分かる。

次に $f_1(t,u)$ を求めるために、(3) の右辺を ε で微分して $\varepsilon=0$ を代入する。

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\varepsilon^2\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v,u),v,u)\int_{\bar{T}}^{u}\sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v,z),v,z)dzdv\right)\\
&\quad=\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v,u),v,u)\int_{\bar{T}}^{u}\sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v,z),v,z)dzdv\right)\\
&\quad+2\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v,u),v,u)\int_{\bar{T}}^{u}\sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v,z),v,z)dzdv
\end{aligned}$$

および、

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v,u),v,u)dW_i(v)\right)\\
&\quad=\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v,u),v,u)dW_i(v)\right)+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v,u),v,u)dW_i(v)
\end{aligned}$$

となるので、$f_1(t,u)$ は、

$$\begin{aligned}
f_1(t,u)&=\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_i f^{(\varepsilon)}(t,u)dW_i(v)\bigg|_{\varepsilon=0}=\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_i f^{(0)}(t,u)dW_i(v)\\
&=\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_i(f(0,u),v,u)dW_i(v)
\end{aligned}$$

と表される。

$f_2(t,u)$ に関しては、

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}\left(\varepsilon^2\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v,u),v,u)\int_{\bar{T}}^{u}\sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v,z),v,z)dzdv\right)\\
&\quad=\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v,u),v,u)\int_{\bar{T}}^{u}\sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v,z),v,z)dzdv\right)\\
&\quad+4\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v,u),v,u)\int_{\bar{T}}^{u}\sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v,z),v,z)dzdv\right)\\
&\quad+2\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v,u),v,u)\int_{\bar{T}}^{u}\sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v,z),v,z)dzdv
\end{aligned}$$

および、

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}\left(\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v,u),v,u)dW_i(v)\right)\\
&\quad=\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v,u),v,u)dW_i(v)\right)\\
&\quad+2\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v,u),v,u)dW_i(v)\right)
\end{aligned}$$

となるので、$2f_2(t,u)$ は

$$\begin{aligned}2f_2(t,u) &= 2\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v,u),v,u)\int_{\bar{T}}^{u}\sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v,z),v,z)dzdv\bigg|_{\varepsilon=0}\\ &\quad + 2\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\bigg(\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_i(f^{(\varepsilon)}(v,u),v,u)dW_i(v)\bigg)\bigg|_{\varepsilon=0}\\ &= 2\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_i(f(0,u),v,u)\int_{\bar{T}}^{u}\sigma_i(f(0,z),v,z)dzdv\\ &\quad + 2\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \partial\sigma_i(f(0,u),v,u)\bigg(\sum_{j=1}^{n}\int_0^v \sigma_j(f(0,u),s,u)dW_j(s)\bigg)dW_i(v)\end{aligned}$$

と表される。以上から、$f^{(\varepsilon)}(t,u)$ の 2 次までの漸近展開が得られる。

定理 3.

$$f^{(\varepsilon)}(t,u) = f_0(t,u) + \varepsilon f_1(t,u) + \varepsilon^2 f_2(t,u) + o(\varepsilon^2)$$

と 2 次の項まで漸近展開すると、

$$\begin{aligned}f_0(t,u) &= f^{(0)}(t,u) = f(0,u)\\ f_1(t,u) &= \sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_i(f(0,u),v,u)dW_i(v)\\ &= \int_0^t \sigma(f(0,u),v,u)'dW(v)\\ f_2(t,u) &= \sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_i(f(0,u),v,u)\int_{\bar{T}}^{u}\sigma_i(f(0,z),v,z)dzdv\\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\int_0^t \partial\sigma_i(f(0,u),v,u)\bigg(\sum_{j=1}^{n}\int_0^v \sigma_j(f(0,u),s,u)dW_j(s)\bigg)dW_i(v)\\ &= \int_0^t \sigma(f(0,u),v,u)'F(v,u)dv\\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^t\bigg(\int_0^v \partial\sigma_i(f(0,u),v,u)\sigma_j(f(0,u),s,u)dW_j(s)\bigg)dW_i(v)\end{aligned}$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned}\partial\sigma_i(x,v,u) &= \frac{\partial}{\partial x}\sigma_i(x,v,u)\\ \sigma(f(0,u),v,u) &= \big(\sigma_i(f(0,u),v,u)\big)\text{なる } n\times 1 \text{ 縦ベクトル}\\ F(v,u) &= \int_{\bar{T}}^{u}\sigma(f(0,z),v,z)dz \text{ なる } n\times 1 \text{ 縦ベクトル}\\ W(t) &= \big(W_i(t)\big) : n \text{ 次元ブラウン運動}\\ (\cdot)' &\text{ は行列の転置}\end{aligned}$$

を表すものとする。

3.3 債券価格の漸近展開

次に、上で求めたフォワード・レートの漸近展開を用いて $\bar{T}$ 時点における債券価格の漸近展開を求める。そのために、まず時点 $u(>\bar{T})$ を満期とする割引債の $\bar{T}$ 時点における価格を漸近展開すると、

$$
\begin{aligned}
P^{(\varepsilon)}(\bar{T},u) &= \exp\left\{-\int_{\bar{T}}^{u} f^{(\varepsilon)}(\bar{T},z)dz\right\} \\
&= \exp\left\{-\int_{\bar{T}}^{u}\left(f_0(\bar{T},z)+\varepsilon f_1(\bar{T},z)+\varepsilon^2 f_2(\bar{T},z)+o(\varepsilon^2)\right)dz\right\} \\
&= \exp\left\{-\int_{\bar{T}}^{u} f_0(\bar{T},z)dz\right\}\exp\left\{-\int_{\bar{T}}^{u}\left(\varepsilon f_1(\bar{T},z)+\varepsilon^2 f_2(\bar{T},z)+o(\varepsilon^2)\right)dz\right\} \\
&= \frac{P(0,u)}{P(0,\bar{T})}\left\{1-\varepsilon\int_{\bar{T}}^{u} f_1(t,z)dz-\varepsilon^2\int_{\bar{T}}^{u} f_2(t,z)dz+\frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\int_{\bar{T}}^{u} f_1(t,u)dz\right)^2\right\}+o(\varepsilon^2)
\end{aligned}
$$

となる。仮定 3 の下においては積分と確率積分の順序交換が可能なので (例えば Ikeda and Watanabe[1989] を参照)、それを用いて計算すると

$$
\begin{aligned}
&P^{(\varepsilon)}(\bar{T},u) \\
&\quad= \frac{P(0,u)}{P(0,\bar{T})}\left\{1-\varepsilon\int_0^{\bar{T}} F(v,u)'dW(v)+\frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\int_0^{\bar{T}} F(v,u)'dW(v)\right)^2\right. \\
&\quad\left. -\varepsilon^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^{\bar{T}}\int_0^{v}\left(\int_{\bar{T}}^{u}\partial\sigma_i(f(0,z),v,z)\sigma_j(f(0,z),s,z)dz\right)dW_j(s)dW_i(v)\right\}+o(\varepsilon^2)
\end{aligned}
$$

となる。これを元に $\bar{T}$ 時点における原資産の債券価格の漸近展開を求める。

$$
P^{(\varepsilon)}_{m,\{T_j\},\{c_j\}}(\bar{T}) = \sum_{j=1}^{m} c_j P^{(\varepsilon)}(\bar{T},T_j)
$$

となるので、

$$
P^{(\varepsilon)}_{m,\{T_j\},\{c_j\}}(\bar{T}) = X_0(\bar{T})+\varepsilon X_1(\bar{T})+\varepsilon^2 X_2(\bar{T})+o(\varepsilon^2)
$$

と漸近展開して各項を求めると、

$$
\begin{aligned}
X_0(\bar{T}) &= \sum_{j=1}^{m} c_j\frac{P(0,T_j)}{P(0,\bar{T})} \\
X_1(\bar{T}) &= -\int_0^{\bar{T}}\left(\sum_{j=1}^{m} c_j\frac{P(0,T_j)}{P(0,\bar{T})}F(v,T_j)\right)'dW(v)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_2(\bar{T}) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} c_j \frac{P(0,T_j)}{P(0,\bar{T})}\left(\int_0^{\bar{T}} F(v,T_j)' dW(v)\right)^2 \\
&- \sum_{j=1}^{m} c_j \frac{P(0,T_j)}{P(0,\bar{T})} \int_0^{\bar{T}} \int_{\bar{T}}^{T_j} \sigma(f(0,u),v,u)' F(v,u) du dv \\
&- \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^{\bar{T}} \left(\int_0^{v} \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{P(0,T_k)}{P(0,\bar{T})}\left(\int_{\bar{T}}^{T_k} \alpha_{i,j}(v,s,u) du\right) dW_j(s)\right) dW_i(v) \\
&= \sum_{j=1}^{m} c_j \frac{P(0,T_j)}{P(0,\bar{T})}\left[\int_0^{\bar{T}} \left(\int_0^{v} F(s,T_j)' dW(s)\right) F(v,T_j)' dW(v) + \frac{1}{2}\int_0^{\bar{T}} \mid F(v,T_j) \mid^2 dv\right] \\
&- \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} c_j \frac{P(0,T_j)}{P(0,\bar{T})} \int_0^{\bar{T}} \mid F(v,T_j) \mid^2 dv \\
&- \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^{\bar{T}} \left(\int_0^{v} \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{P(0,T_k)}{P(0,\bar{T})}\left(\int_{\bar{T}}^{T_k} \alpha_{i,j}(v,s,u) du\right) dW_j(s)\right) dW_i(v) \\
&= \sum_{j=1}^{m} c_j \frac{P(0,T_j)}{P(0,\bar{T})} \int_0^{\bar{T}} \left(\int_0^{v} F(s,T_j)' dW(s)\right) F(v,T_j)' dW(v) \\
&- \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^{\bar{T}} \left(\int_0^{v} \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{P(0,T_k)}{P(0,\bar{T})}\left(\int_{\bar{T}}^{T_k} \alpha_{i,j}(v,s,u) du\right) dW_j(s)\right) dW_i(v)
\end{aligned}
$$

となる。ただし、

$$\alpha_{i,j}(v,s,u) = \partial\sigma_i(f(0,u),v,u)\sigma_j(f(0,u),s,u)$$

と置いた。

3.4 満期時点 $\bar{T}$ におけるオプションの価値

さて、上で求めた債券価格の漸近展開を用いると、オプションの満期時点 $\bar{T}$ におけるコール・オプションの価値 $V_{call}^{(\varepsilon)}(\bar{T})$ は、行使価格 K に対して

$$
\begin{aligned}
V_{call}^{(\varepsilon)}(\bar{T}) &= \left(P_{m,\{T_j\},\{c_j\}}^{(\varepsilon)}(\bar{T}) - K\right)_+ \\
&= \left(X_0(\bar{T}) + \varepsilon X_1(\bar{T}) + \varepsilon^2 X_2(\bar{T}) + o(\varepsilon^2) - K\right)_+ \\
&= \left(y + \varepsilon X^{(\varepsilon)}(\bar{T})\right)_+
\end{aligned}
$$

と表現され、同様にプット・オプションの価値 $V_{put}^{(\varepsilon)}(\bar{T})$ は、

$$
\begin{aligned}
V_{put}^{(\varepsilon)}(\bar{T}) &= \left(K - P_{m,\{T_j\},\{c_j\}}^{(\varepsilon)}(\bar{T})\right)_+ \\
&= \left(K - X_0(\bar{T}) - \varepsilon X_1(\bar{T}) - \varepsilon^2 X_2(\bar{T}) + o(\varepsilon^2)\right)_+ \\
&= \left(-y - \varepsilon X^{(\varepsilon)}(\bar{T})\right)_+
\end{aligned}
$$

となる。ただし、

$$
\begin{aligned}
X^{(\varepsilon)}(\bar{T}) &= X_1(\bar{T}) + \varepsilon X_2(\bar{T}) + o(\varepsilon) = \frac{P_{m,\{T_j\},\{c_j\}}^{(\varepsilon)} - X_0(\bar{T})}{\varepsilon} \\
y &= X_0(\bar{T}) - K
\end{aligned}
$$

とする。よって $V_{call}^{(\varepsilon)}(0)$、および $V_{put}^{(\varepsilon)}(0)$ は $X^{(\varepsilon)}(\bar{T})$ の確率密度関数 $f_\varepsilon(x)$ を用いて

$$\begin{aligned}
V_{call}^{(\varepsilon)}(0) &= P(0,\bar{T})\mathbf{E}\big[\big(y+\varepsilon X^{(\varepsilon)}(\bar{T})\big)_+\big] \\
&= P(0,\bar{T})\int_{-\frac{y}{\varepsilon}}^{\infty}(y+\varepsilon x)f_\varepsilon(x)dx \qquad (4) \\
V_{put}^{(\varepsilon)}(0) &= P(0,\bar{T})\mathbf{E}\big[\big(-y-\varepsilon X^{(\varepsilon)}(\bar{T})\big)_+\big] \\
&= P(0,\bar{T})\int_{-\infty}^{-\frac{y}{\varepsilon}}(-y-\varepsilon x)f_\varepsilon(x)dx \qquad (5)
\end{aligned}$$

と表現される。最終的にこの確率密度関数 $f_\varepsilon(x)$ の近似が得られれば、オプション価格の近似値を求めることができる。

3.5　確率密度関数 $f_\varepsilon(x)$ の漸近展開

まず、$X^{(\varepsilon)}(\bar{T})$ の特性関数 $\psi(\xi)$ を漸近展開すると

$$\begin{aligned}
\psi(\xi) &= \mathbf{E}[\exp(i\xi X^{(\varepsilon)}(\bar{T}))] \\
&= \mathbf{E}[\exp(i\xi X_1(\bar{T}))\exp(\varepsilon i\xi(X_2(\bar{T}))+o(\varepsilon))] \\
&= \mathbf{E}[\exp(i\xi X_1(\bar{T}))(1+\varepsilon i\xi X_2(\bar{T})+o(\varepsilon))] \\
&= \mathbf{E}[\exp(i\xi X_1(\bar{T}))(1+\varepsilon i\xi(\mathbf{E}[X_2(\bar{T})\mid X_1(\bar{T})]))]+o(\varepsilon)
\end{aligned}$$

となる。ここで、$X_2(\bar{T}) = X_{2,1}(\bar{T}) - X_{2,2}(\bar{T})$ と分解する。ただし、

$$\begin{aligned}
X_{2,1}(\bar{T}) &= \sum_{j=1}^{m} c_j \frac{P(0,T_j)}{P(0,\bar{T})}\int_0^{\bar{T}}\left(\int_0^v F(s,T_j)'dW(s)\right)F(v,T_j)'dW(v) \\
X_{2,2}(\bar{T}) &= \sum_{i,j=1}^{n}\int_0^{\bar{T}}\left(\int_0^v \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{P(0,T_k)}{P(0,\bar{T})}\left(\int_{\bar{T}}^{T_k}\alpha_{i,j}(v,s,u)du\right)dW_j(s)\right)dW_i(v)
\end{aligned}$$

であり、

$$\alpha_{i,j}(v,s,u) = \partial\sigma_i(f(0,u),v,u)\sigma_j(f(0,u),s,u)$$

であった。一方 $X_1(\bar{T})$ については

$$\begin{aligned}
X_1(\bar{T}) &= -\int_0^{\bar{T}}\left(\sum_{j=1}^{m} c_j \frac{P(0,T_j)}{P(0,\bar{T})}F(v,T_j)\right)'dW(v) \\
&= \int_0^{\bar{T}}\sigma_{X_1}(v)'dW(v) \quad \left(\sigma_{X_1}(v) = -\sum_{j=1}^{m} c_j \frac{P(0,T_j)}{P(0,\bar{T})}F(v,T_j)\ \text{とした}\right)
\end{aligned}$$

なので、$X_1(\bar{T})$ は期待値 0、分散 Σ の正規分布に従うことが分かる。ここで、

$$\Sigma = \int_0^{\bar{T}}\left(\sum_{j=1}^{m} c_j \frac{P(0,T_j)}{P(0,\bar{T})}F(v,T_j)\right)'\left(\sum_{j=1}^{m} c_j \frac{P(0,T_j)}{P(0,\bar{T})}F(v,T_j)\right)dv$$

である。ここで、$X_1(\bar{T})$ が非確率的関数のブラウン運動による確率積分であること、および $X_2(\bar{T}) = X_{2,1}(\bar{T}), X_{2,2}(\bar{T})$ の形に注目して条件付き期待値に対する以下の定理を引用する (例えば国友・高橋 [2003] の補題 6.4(i))。

定理 4. $W(t)=(W_i(t))$ を n 次元ブラウン運動、$q_1(t)$ を $\mathbf{R}\mapsto\mathbf{R^{1\times n}}$、$q_2(t)$ と $q_3(t)$ を $\mathbf{R}\mapsto\mathbf{R^{1\times n}}$ の非確率的関数とし、

$$\Sigma=\int_0^T q_1(t)q_1(t)'dt<\infty$$

とする。このとき任意の実数 x、および任意の $t\le T$ に対して以下の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\Big[\int_0^t\Big\{\int_0^v q_2(s)dW(s)\Big\}q_3(v)dW(v)\Big|\int_0^T q_1(t)dW(t)=x\Big]\\&=\frac{1}{\Sigma^2}(x^2-\Sigma)\int_0^t\int_0^v q_1(v)q_3(v)'q_2(s)q_1(s)'dsdv\end{aligned}$$

この定理を用いることにより、条件付き期待値 $\mathbf{E}[X_{2,1}(\bar T)\mid X_1(\bar T)=x]$、および $\mathbf{E}[X_{2,2}(\bar T)\mid X_1(\bar T)=x]$ が求められ、$\mathbf{E}[X_2(\bar T)\mid X_1(\bar T)=x]$ が得られる。この定理を用いて計算した結果を示すと

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}[X_{2,1}(\bar T)\mid X_1(\bar T)=x]\\&\quad=\frac{1}{2}\bigg(\frac{x^2}{\Sigma^2}-\frac{1}{\Sigma}\bigg)\sum_{j=1}^m c_j\frac{P(0,T_j)}{P(0,\bar T)}\bigg(\int_0^{\bar T}F(v,T_j)'\sigma_{X_1}(v)dv\bigg)^2\qquad(6)\\&\mathbf{E}[X_{2,2}(\bar T)\mid X_1(\bar T)=x]\\&\quad=\bigg(\frac{x^2}{\Sigma^2}-\frac{1}{\Sigma}\bigg)\sum_{j=1}^m c_j\frac{P(0,T_j)}{P(0,\bar T)}\times\\&\quad\int_{\bar T}^{T_j}\bigg(\sum_{i,k=1}^n\int_0^{\bar T}\partial\sigma_i(f(0,u),v,u)\sigma_{X_1}^{(i)}(v)\int_0^v\sigma_k(f(0,u),s,u)\sigma_{X_1}^{(k)}(s)dsdv\bigg)du\end{aligned}$$

となる。但し、$\sigma_{X_1}^{(i)}(t)$ は $\sigma_{X_1}(t)$ の i 番目の要素を表す。

よって $\mathbf{E}[X_2(\bar T)\mid X_1(\bar T)=x]$ は、

$$\mathbf{E}[X_2(\bar T)\mid X_1(\bar T)=x]=\frac{c}{\Sigma^2}(x^2-\Sigma)\qquad(7)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}c=&\frac{1}{2}\sum_{j=1}^m c_j\frac{P(0,T_j)}{P(0,\bar T)}\bigg(\int_0^{\bar T}F(v,T_j)'\sigma_{X_1}(v)dv\bigg)^2\\&-\sum_{j=1}^m c_j\frac{P(0,T_j)}{P(0,\bar T)}\int_{\bar T}^{T_j}\bigg(\sum_{i,k=1}^n\int_0^{\bar T}\partial\sigma_i(f(0,u),v,u)\sigma_{X_1}^{(i)}(v)\int_0^v\sigma_k(f(0,u),s,u)\sigma_{X_1}^{(k)}(s)dsdv\bigg)du\end{aligned}$$

と置いた。以上の計算結果より $X^{(\varepsilon)}(\bar T)$ の特性関数 $\psi(\xi)$ は

$$\begin{aligned}\psi(\xi)&=\mathbf{E}[\exp(i\xi X_1(\bar T))(1+\varepsilon i\xi(\mathbf{E}[X_2(\bar T)\mid X_1(\bar T)]))]+o(\varepsilon)\\&=\exp\big\{-\frac{1}{2}\Sigma\xi^2\big\}+\varepsilon\mathbf{E}\big[i\xi\frac{c}{\Sigma^2}\big(X_1(\bar T)^2-\Sigma\big)\exp\big(i\xi X_1(\bar T)\big)\big]+o(\varepsilon)\\&=\psi_1^{(\varepsilon)}(\xi)+o(\varepsilon)\\&\Big(\psi_1^{(\varepsilon)}(\xi)=\mathbf{E}[\exp(i\xi X_1(\bar T))(1+\varepsilon i\xi(\mathbf{E}[X_2(\bar T)\mid X_1(\bar T)]))]\text{ と置く。}\Big)\end{aligned}$$

と近似される。ここで、確率密度関数が

$$f_1^{(\varepsilon)}(x)=\bigg[1+\varepsilon\bigg(\frac{c}{\Sigma^3}x^3-3\frac{c}{\Sigma^2}x\bigg)\bigg]n[x;0,\Sigma]$$

$$\text{ただし、}n[x;0,\Sigma]=\frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma}}\exp\bigg(-\frac{x^2}{2\Sigma}\bigg)$$

であるような確率変数 $Y^{(\varepsilon)}$ を取れば、その特性関数が $\psi_1^{(\varepsilon)}(\xi)$ になることが部分積分を実行することにより確かめられる。よって、$X^{(\varepsilon)}(\bar{T})$ の確率密度関数 $f_\varepsilon(x)$ は、

$$f_\varepsilon(x) = \left[1 + \varepsilon\left(\frac{c}{\Sigma^3}x^3 - 3\frac{c}{\Sigma^2}x\right)\right]n[x;0,\Sigma] + o(\varepsilon) \tag{8}$$

と近似されることが分かった。

3.6 オプション価格の解析近似

上で得られた確率密度関数 $f_\varepsilon(x)$ を用いて、オプションの解析近似を求めることができる。(4) 式と (5) 式に (8) 式を代入すれば、

$$V_{call}^{(\varepsilon)}(0) = P(0,\bar{T})\int_{-\frac{y}{\varepsilon}}^{\infty}(y+\varepsilon x)\left[1 + \varepsilon\left(\frac{c}{\Sigma^3}x^3 - 3\frac{c}{\Sigma^2}x\right)\right]n[x;0,\Sigma]dx + o(\varepsilon)$$
$$V_{put}^{(\varepsilon)}(0) = P(0,\bar{T})\int_{-\infty}^{-\frac{y}{\varepsilon}}(-y-\varepsilon x)\left[1 + \varepsilon\left(\frac{c}{\Sigma^3}x^3 - 3\frac{c}{\Sigma^2}x\right)\right]n[x;0,\Sigma]dx + o(\varepsilon)$$

となるので、部分積分を繰り返すことにより

$$\begin{aligned}
V_{call}^{(\varepsilon)}(0) &= P(0,\bar{T})\int_{-\frac{y}{\varepsilon}}^{\infty}(y+\varepsilon x)f_\varepsilon(x)dx + o(\varepsilon)\\
&= P(0,\bar{T})\int_{-\frac{y}{\varepsilon}}^{\infty}\left[(y+\varepsilon x) + \varepsilon^2\frac{c}{\Sigma^2}\left(x^2-\Sigma\right)\right]n[x;0,\Sigma]dx + o(\varepsilon)\\
&= P(0,\bar{T})\left(\varepsilon\Sigma n\left[\frac{y}{\varepsilon};0,\Sigma\right] + yN\left(\frac{y}{\varepsilon\sqrt{\Sigma}}\right) - \varepsilon\frac{c}{\Sigma}yn\left[\frac{y}{\varepsilon};0,\Sigma\right]\right) + o(\varepsilon)\\
V_{put}^{(\varepsilon)}(0) &= P(0,\bar{T})\int_{-\infty}^{-\frac{y}{\varepsilon}}(-y-\varepsilon x)f_\varepsilon(x)dx + o(\varepsilon)\\
&= P(0,\bar{T})\int_{-\infty}^{-\frac{y}{\varepsilon}}\left[(-y-\varepsilon x) - \varepsilon^2\frac{c}{\Sigma^2}\left(x^2-\Sigma\right)\right]n[x;0,\Sigma]dx + o(\varepsilon)\\
&= P(0,\bar{T})\left(\varepsilon\Sigma n\left[\frac{y}{\varepsilon};0,\Sigma\right] - yN\left(-\frac{y}{\varepsilon\sqrt{\Sigma}}\right) - \varepsilon\frac{c}{\Sigma}yn\left[\frac{y}{\varepsilon};0,\Sigma\right]\right) + o(\varepsilon)
\end{aligned}$$

が得られる。

以上をまとめることにより、次ページの定理が得られる。

定理 5. 上で設定されるヨーロピアン債券オプション価格の近似解は以下の通りになる。

$$
\begin{aligned}
V_{call}^{(\varepsilon)}(0) &\approx P(0,\bar{T})\int_{-\frac{y}{\varepsilon}}^{\infty}(y+\varepsilon x+\varepsilon^2\frac{c}{\Sigma^2}(x^2-\Sigma))n[x;0,\Sigma]dx \\
&= P(0,\bar{T})\left(\varepsilon\Sigma n\big[\frac{y}{\varepsilon};0,\Sigma\big]+yN\left(\frac{y}{\varepsilon\sqrt{\Sigma}}\right)-\varepsilon\frac{c}{\Sigma}yn\big[\frac{y}{\varepsilon};0,\Sigma\big]\right) \\
V_{put}^{(\varepsilon)}(0) &\approx P(0,\bar{T})\int_{-\infty}^{-\frac{y}{\varepsilon}}(-y-\varepsilon x-\varepsilon^2\frac{c}{\Sigma^2}(x^2-\Sigma))n[x;0,\Sigma]dx \\
&= P(0,\bar{T})\left(\varepsilon\Sigma n\big[\frac{y}{\varepsilon};0,\Sigma\big]-yN\left(-\frac{y}{\varepsilon\sqrt{\Sigma}}\right)-\varepsilon\frac{c}{\Sigma}yn\big[\frac{y}{\varepsilon};0,\Sigma\big]\right)
\end{aligned}
$$

ただし、$n[x;0,\Sigma]$ は、期待値：0、分散：Σ の正規分布の確率密度関数

$$n[x;0,\Sigma]=\frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\Sigma}\right)$$

であり、$N(x)$ は標準正規分布の分布関数

$$N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

である。また、Σ、c、y およびその他の記号は以下で定義される。

$$
\begin{aligned}
\Sigma &= \int_0^{\bar{T}}\left(\sum_{j=1}^{m}c_j\frac{P(0,T_j)}{P(0,\bar{T})}F(v,T_j)\right)'\left(\sum_{j=1}^{m}c_j\frac{P(0,T_j)}{P(0,\bar{T})}F(v,T_j)\right)dv \\
c &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}c_j\frac{P(0,T_j)}{P(0,\bar{T})}\left(\int_0^{\bar{T}}F(v,T_j)'\sigma_{X_1}(v)dv\right)^2 \\
&\quad -\sum_{j=1}^{m}c_j\frac{P(0,T_j)}{P(0,\bar{T})}\int_{\bar{T}}^{T_j}\left(\sum_{i,k=1}^{n}\int_0^{\bar{T}}\partial\sigma_i(f(0,u),v,u)\sigma_{X_1}^{(i)}(v)\int_0^{v}\sigma_k(f(0,u),s,u)\sigma_{X_1}^{(k)}(s)dsdv\right)du \\
y &= \sum_{j=1}^{m}c_j\frac{P(0,T_j)}{P(0,\bar{T})}-K
\end{aligned}
$$

$\sigma(f(0,z),v,z)$：第 i 成分が $\sigma_i(f(0,z),v,z)$ の n 次元縦ベクトル

$$F(v,u)=\int_{\bar{T}}^{u}\sigma(f(0,z),v,z)dz$$

$$\sigma_{X_1}(v)=-\sum_{j=1}^{m}c_j\frac{P(0,T_j)}{P(0,\bar{T})}F(v,T_j)$$

4 漸近展開を用いた分散減少法

後の計算例における結果を見ると、ボラティリティの大きさが金利水準に依存する場合、漸近展開による近似値に多少の誤差が観察される。そこで、より精度の高い近似値を得る方法として、Takahashi and Yoshida[2001] の方法を拡張し、漸近展開による近似を利用して標準的なモンテカルロ・シミュレーションの分散削減を実現する方法を検討する。

3 節の議論によると、

$$V_{call}^{(\varepsilon)}(0)=P(0,\bar{T})\mathbf{E}\big[\big(y+\varepsilon X_1(\bar{T})+\varepsilon^2X_2(\bar{T})+o(\varepsilon^2)\big)_+\big]$$

$$\mathbf{E}[X_2(\bar{T})\mid X_1(\bar{T})=x]=\frac{c}{\Sigma^2}(x^2-\Sigma)$$

なので、定理５の右辺は、

$$\begin{aligned}V_{call}^{(\varepsilon)}(0) &\approx P(0,\bar{T})\mathbf{E}\big[\big\{y+\varepsilon X_1(\bar{T})+\varepsilon^2\mathbf{E}[X_2(\bar{T})\mid X_1(\bar{T})]\big\}1_{\{X_1(\bar{T})\geq -\frac{y}{\varepsilon}\}}\big]\\ &= P(0,\bar{T})\mathbf{E}\big[\big\{y+\varepsilon X_1(\bar{T})+\varepsilon^2\frac{c}{\Sigma^2}\big(X_1(\bar{T})^2-\Sigma\big)\big\}1_{\{X_1(\bar{T})\geq -\frac{y}{\varepsilon}\}}\big]\end{aligned}$$

となる。ここで、$X_1(\bar{T})$ は

$$X_1(\bar{T}) = -\int_0^{\bar{T}}\left(\sum_{j=1}^m c_j\frac{P(0,T_j)}{P(0,\bar{T})}F(v,T_j)\right)' dW(v)$$

と表現できる。従って、統計量 $\bar{V}_{call}^{(\varepsilon)}(\bar{T})$ を

$$\bar{V}_{call}^{(\varepsilon)}(\bar{T}) \equiv \big\{y+\varepsilon X_1(\bar{T})+\varepsilon^2\frac{c}{\Sigma^2}\big(X_1(\bar{T})^2-\Sigma\big)\big\}1_{\{X_1(\bar{T})\geq -\frac{y}{\varepsilon}\}}$$

とすれば、モンテカルロ・シミュレーションにより $X_1(\bar{T})$ を発生させることで計算可能な統計量である。

一方、満期時点におけるオプションの価値を表す統計量

$$V_{call}^{(\varepsilon)}(\bar{T}) = \big(y+\varepsilon X^{(\varepsilon)}(\bar{T})\big)1_{\{X^{(\varepsilon)}(\bar{T})\geq -\frac{y}{\varepsilon}\}}$$

も、

$$X^{(\varepsilon)}(\bar{T}) = \frac{P_{m,\{T_j\},\{c_j\}}^{(\varepsilon)} - X_0(\bar{T})}{\varepsilon}$$

をモンテカルロ・シミュレーションで発生させれば計算可能な統計量であり、統計量 $\bar{V}_{call}^{(\varepsilon)}(\bar{T})$ と $V_{call}^{(\varepsilon)}(\bar{T})$ との相関が高いと予想される。従って、新しい統計量 V を

$$V \equiv V_{call}^{(\varepsilon)}(\bar{T}) - \bar{V}_{call}^{(\varepsilon)}(\bar{T}) + \mathbf{E}\big[\bar{V}_{call}^{(\varepsilon)}(\bar{T})\big]$$

と定義すれば、モンテカルロ・シミュレーションの際の V の分散が $V_{call}^{(\varepsilon)}(\bar{T})$ のそれよりも格段に小さくなると期待される。ここで、$\mathbf{E}\big[\bar{V}_{call}^{(\varepsilon)}(\bar{T})\big]$ は、定理５の $V_{call}^{(\varepsilon)}(0)$ の右辺を用いて解析的に計算可能である。実際、統計量 V の誤差は

$$V - V_{call}^{(\varepsilon)}(0)/P(0,\bar{T}) = \{V_{call}^{(\varepsilon)}(\bar{T}) - V_{call}^{(\varepsilon)}(0)/P(0,\bar{T})\} - \{\bar{V}_{call}^{(\varepsilon)}(\bar{T}) - \mathbf{E}\big[\bar{V}_{call}^{(\varepsilon)}(\bar{T})\big]\}$$

と書くことができ、右辺の最初の中括弧は統計量 $V_{call}^{(\varepsilon)}(\bar{T})$ の誤差、２番目の中括弧は統計量 $\bar{V}_{call}^{(\varepsilon)}(\bar{T})$ の誤差をそれぞれ表している。従って、$V_{call}^{(\varepsilon)}(\bar{T})$ と $\bar{V}_{call}^{(\varepsilon)}(\bar{T})$ が強い正の相関を持てば、両者の誤差が相殺され V の誤差が小さくなるであろう。事実、後の数値例で見るように、統計量 V を用いた場合、大幅に標準偏差が減少しており、この方法の有効性が確認された。

5　数値例における漸近展開の精度

5.1　前提とするモデル

本節では、３節で示した解析近似の精度を具体的なスワップションの例で調べる（スワップションは本質的に債券オプションである）。また、固定レート受けのみ考え（これは行使価格 $K=1$ の債券のコール・オプションに相当）、オプションの満期までの期間を５年、原資産は決済が年１回の５年スワップと固定する。

次に、実際に計算するためにはボラティリティ関数を具体的に定めなければならないが、ここでは金利変動の要因において 90 %以上を占めると言われているシフトとツイストを表現するためにボラティリティ関数に対して以下の仮定を置く。

仮定 5. 金利変動の要因を表すブラウン運動の次元を 2 次元とし、それに対応する 2 つのボラティリティ関数を以下のように取る。

$$\sigma_1^*(x,v,u)=\sigma_1 h(x),\quad \sigma_2^*(x,v,u)=\sigma_2(1-\beta\exp^{-\alpha(u-v)})h(x)$$
$\sigma_1,\sigma_2,\alpha,\beta$：非負の実数
$h(x)$：有界・非負で $x>0$ において滑らかな関数

これは、1 つ目のボラティリティ関数がシフト要因を表し、2 つ目のボラティリティ関数がツイスト要因を表すと考えることができる。

以下では、上の仮定を満たすいくつかのボラティリティ関数について具体的に計算する。なお、漸近展開における ε は $\varepsilon=1$ と固定して計算しても、σ_1,σ_2 で調整できるので一般性を失わない。よって、以下では $\varepsilon=1$ と固定して計算するものとし、いちいち断らない。

また、初期の金利の期間構造としては

$$f(0,u)=0.03+0.004u \qquad \text{(直線の順イールド)}$$

の場合を考える。

5.2 具体的な計算例

計算例 1. 仮定 5 における関数 $h(x)$ を定数としてしまい、ボラティリティの大きさが金利水準に依存しない場合を考える。

この場合は、フォワード・レートの満たすべき確率微分方程式が解析解を持ち、各割引債価格の分布は対数正規分布となるので満期時点におけるオプションの価値 $V(\bar{T})$ は計算機を用いれば容易に計算できる。そのため漸近展開を用いて計算する必要もないのだが、実際に両方の計算結果を比較してみることにより漸近展開の精度を検証してみる。ただし、

$$h(x)=1 \quad (const),\quad \sigma_1=0.2,\quad \sigma_2=0.08,\quad \alpha=0.5,\quad \beta=2$$

として計算を行う。その結果 (後記の表 1 を参照)、この場合には漸近展開による計算の精度がかなり高いことが分かる。

次に、ボラティリティの大きさが金利水準に依存する場合を考えたいのだが、その準備のために、以下の 2 つの関数を用意する。

定義 1. 2 つの関数 $h_1(x),h_2(x)$ を以下で定義する。

$$h_1(x)=\frac{h_0(10001-x)}{h_0(x-10000)+h_0(10001-x)}\quad h_2(x)=\frac{h_0(x-10000)}{h_0(x-10000)+h_0(10001-x)}$$

ただし、$h_0(x)=\begin{cases}\exp^{-\frac{1}{x}} & (x>0)\\ 0 & (x\le 0)\end{cases}$ で定義される関数とする。

この 2 つの関数は共に有界・非負で滑らかな関数になることが分かる。これらを用いて次のようなボラティリティ関数のケースを考える。

計算例 2. 仮定 5 における関数 $h(x)$ を

$$h(x)=h_1(x)x^\gamma+h_2(x)10000^\gamma \qquad (0\le\gamma\le 1)$$

と置いた場合を考える。これは関数 $\{\min(x,10000)\}^\gamma$ を滑らかに修正したものと考えることができる。そして、これはボラティリティの大きさが金利水準の γ 乗に比例すると考えた場合のボラティリティのタイプであるといえる。

この場合においては、フォワード・レートの満たすべき確率微分方程式を解析的に解くことができないので、標準的方法では、この方程式を基礎にしてモンテカルロ・シミュレーションを実施するが、実務的に許容される精度を得るためにはかなりの計算時間を要する。この標準的方法と漸近展開による解析近似の結果を比べてみる *(*後記の表２〜５上段を参照*)* と、解析近似はかなり良い近似であることが分かる。

但し、特にボラティリティの大きさが金利水準に依存する場合、漸近展開による近似値に多少の誤差が観察される。そこで、より精度の高い近似値を得るため第 *4* 節で紹介した方法を適用する。数値計算結果によると *(*後記の表２〜５下段を参照*)*、*1000* 回のパスによる平均値の *500* ケース中の最大の誤差率を見ても、解析近似の結果に比して精度が改善している。さらに、標準的なモンテカルロ・シミュレーションに比べ、標準偏差が *1* ケースを除き *(*$\gamma = 0.25$、*40%OTM* のとき *10.78%)* *10%*未満に減少しており、大幅な分散減少が達成されていることがわかる。

5.3 計算結果の考察

以上の計算結果に対する考察を行う。まず、いずれのケースにおいても固定受けの金利が OTM(Out of The Money) から ITM(In The Money) に上昇するに従い誤差率が小さくなり、逆に 40%OTM の時は、誤差の絶対水準は 3-4 ベーシス・ポイント程度ではあるが、誤差率は最大となる。また、計算例２における各 γ に対する結果を計算例１も含めて ($\gamma = 0$ に相当) 比較すれば、γ が大きくなるに従い誤差率が大きくなるとが観測される。

この要因としては、漸近展開法はフォワード・レートの分布を正規分布 ($\gamma = 0.0$) により近似しているため γ が 0.0 から乖離すればするほど分布の近似精度が悪くなること、また、金利変動に対するボラティリティの変化が γ が大きくなるに従い増大することが挙げられる。この結果、特に分布の差が最も影響する OTM の場合の価格の誤差率が大きいと考えられる。但し、いずれの場合も先述の分散減少法を用いれば、モンテカルロ法により発生する値の標準偏差が大幅に減少するため、より短時間で高精度の値が得られることが分かる。

参　考　文　献

[1] 国友直人・高橋明彦 (1992):"平均オプション価格の評価法," 証券研究, **14**, 1-20.

[2] 国友直人・高橋明彦 (2003): 「数理ファイナンスの基礎—マリアバン解析と漸近展開の応用—」東洋経済評論社.

[3] 高橋明彦・斉藤大河 (2003): "漸近展開用いたアメリカンオプション価格の評価法," 金融研究, **22**, 35-87.

[4] Heath D., R. Jarrow and A. Morton(1992): "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Metheodology for Contingent Claims Valuation," *Econometrica*, **60**, 77-105.

[5] Ikeda W. and S. Watanabe (1989): *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, 2nd edition*, North-Holland/Kodansha.

[6] Kobayashi T., A.Takahashi and N. Tokioka(2001): "Dynamic Optimality of Yield Curve Strategies," (http://www.e.u-tokyo.ac.jp/cirje/research/dp/2001), Working Paper, The University of Tokyo(CIRJE-F-141).

[7] Kunitomo N. and A. Takahashi(1995):"The Asymptotic Expansion Approach to the Valuation of Interest Rate Contingent Claims," Discussion Paper No.95-F-19, Faculty of Economics, University of Tokyo.

[8] Kunitomo N. and A. Takahashi(2001):"The Asymptotic Expansion Approach to the Valuation of Interest Rate Contingent Claims," *Mathematical Finance*, **11**, 117-151.

[9] Kunitomo N. and A. Takahashi(2003a): "On Validity of the Asymptotic Expansion Approach in Contingent Claims Analysis," *Annals of Applied Probability*, **13**, 914-952.

[10] Kunitomo N. and A. Takahashi(2003b): "Applications of the Asymptotic Expansion Approach based on Malliavin-Watanabe Calculus in Financial Problems," (http://www.e.u-tokyo.ac.jp/cirje/research/dp/2003), Working Paper, The University of Tokyo(CIRJE-F-245), To appear in *Stochastic Processes and Applications to Mathematical Finance*, World Scientific.

[11] Morton A.(1989):"Arbitrage and Martingales," Unpublished Ph.D. Dissertation, Cornell University.

[12] Takahashi A.(1995): "Essays on the Valuation Problems of Contingent Claims," Unpublished Ph.D. Dissertation, Haas School of Business, University of California, Berkeley.

[13] Takahashi A.(1999):"An Asymptotic Expansion Approach to Pricing Contingent Claims," *Asia-Pasific Financial Markets*, **6**, 115-151.

[14] Takahashi A.(2003): "Monte Carlo Simulation with Asymptotic Method in HJM Framework," An unpublished paper presented at the Symposium on *Recent Topics on Numerical Methods in Finance* held at Tokyo Institute of Technology.

[15] Takahashi A. and N. Yoshida(2001a): "An Asymptotic Expansion Scheme for the Optimal Portfolio for Investment," *Mathematical Economics, Kokyuroku*1215, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University (経済の数理解析，数理解析研究所講究録 1215，京都大学数理解析研究所).

[16] Takahashi, A. and N. Yoshida(2001b): "Monte Carlo Simulation with Asymptotic Method," (http://www.e.u-tokyo.ac.jp/cirje/research/dp/2003), Working Paper, The University of Tokyo(CIRJE-F-249).

[17] Takahashi A. and N. Yoshida(2004): "An Asymptotic Expansion Scheme for Optimal Investment Problems," *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **7**, 153-188.

∗ 計算方法について

モンテカルロ法は、1年を365分割してパスを発生させ、債券価格を求める際のフォワード・レートの積分は1年を4分割して行った。パスは250万回発生させ、それらに対応する満期時点のオプション価値の平均値を計算することによりオプションの現在価値を求めた。また、漸近展開における係数は数値積分により求めた。

分散減少法に関しては、まずパスを1000回発生させその平均値を求める。パスを1000回発生させ平均値を計算することを500ケース行い、モンテカルロ法250万回の平均値に対する各500ケースの平均値の誤差を計算する。そしてその500ケースの誤差に対して誤差率の標準偏差及び誤差率の最大値を求める。

∗ 表について

上段の収束値の比較は、モンテカルロ法に関しては250万回のパスを発生させた平均値であり、誤差率はモンテカルロ法の250万回の平均値に対する値である。また、下段の誤差率比較に関しては、モンテカルロ法における1000回毎の平均値を500ケース計算し、各平均値のモンテカルロ法250万回の平均値に対する誤差率を計算し、その500ケースの誤差率の標準偏差及び最大値を表示した。

表 1: $h(x) = 1 \quad (const), \quad \sigma_1 = 0.01, \quad \sigma_2 = 0.004, \quad \alpha = 0.5, \quad \beta = 2$

	40%OTM	20%OTM	10%OTM	ATM	10%ITM	20%ITM	40%ITM
モンテカルロ法	0.006855	0.016660	0.024251	0.033899	0.045653	0.059431	0.092194
漸近展開	0.006852	0.016639	0.024230	0.033881	0.045633	0.059408	0.092190
誤差率	-0.05%	0.13%	0.09%	0.05%	0.04%	0.04%	0.00%

表 2: $\gamma = 0.25, \quad \sigma_1 = 0.02115, \quad \sigma_2 = 0.008459, \quad \alpha = 0.5, \quad \beta = 2$

収束値比較	40%OTM	20%OTM	10%OTM	ATM	10%ITM	20%ITM	40%ITM
モンテカルロ法	0.006468	0.017023	0.025120	0.035248	0.047374	0.061365	0.094068
漸近展開	0.006752	0.017223	0.025284	0.035395	0.047525	0.061537	0.094289
誤差率	4.38%	1.18%	0.65%	0.42%	0.32%	0.28%	0.23%
誤差率比較	40%OTM	20%OTM	10%OTM	ATM	10%ITM	20%ITM	40%ITM
モンテカルロ法	—	—	—	—	—	—	—
(1) 標準偏差	6.58%	3.81%	2.97%	2.26%	1.64%	1.16%	0.58%
最大誤差率	22.86%	13.35%	9.91%	7.47%	5.47%	4.03%	1.94%
分散減少法	—	—	—	—	—	—	—
(2) 標準偏差	0.71%	0.33%	0.24%	0.17%	0.11%	0.07%	0.05%
最大誤差率	2.37%	0.91%	0.64%	0.45%	0.35%	0.27%	0.19%
(2)/(1)(%)	10.78%	8.59%	8.18%	7.34%	6.45%	5.88%	7.76%

表 3: $\gamma = 0.5, \quad \sigma_1 = 0.04472, \quad \sigma_2 = 0.01789, \quad \alpha = 0.5, \quad \beta = 2$

収束値比較	40%OTM	20%OTM	10%OTM	ATM	10%ITM	20%ITM	40%ITM
モンテカルロ	0.006139	0.017472	0.026097	0.036729	0.049257	0.063506	0.096261
漸近展開	0.006557	0.017789	0.026360	0.036969	0.049515	0.063806	0.096648
誤差率	6.81%	1.82%	1.01%	0.65%	0.52%	0.47%	0.40%
誤差率比較	40%OTM	20%OTM	10%OTM	ATM	10%ITM	20%ITM	40%ITM
モンテカルロ法	—	—	—	—	—	—	—
(1) 標準偏差	7.66%	3.99%	3.01%	2.23%	1.60%	1.13%	0.58%
最大誤差率	25.32%	13.75%	10.05%	7.37%	5.37%	3.99%	1.94%
分散減少法	—	—	—	—	—	—	—
(2) 標準偏差	0.71%	0.27%	0.19%	0.14%	0.10%	0.08%	0.05%
最大誤差率	2.91%	1.00%	0.76%	0.51%	0.39%	0.30%	0.22%
(2)/(1)(%)	9.24%	6.68%	6.21%	6.10%	6.37%	6.82%	8.84%

表 4: $\gamma = 0.75, \quad \sigma_1 = 0.09457, \quad \sigma_2 = 0.03783, \quad \alpha = 0.5, \quad \beta = 2$

収束値比較	40%OTM	20%OTM	10%OTM	ATM	10%ITM	20%ITM	40%ITM
モンテカルロ法	0.005830	0.017967	0.027144	0.038308	0.051282	0.065843	0.098787
漸近展開	0.006262	0.018365	0.027491	0.038641	0.051645	0.066263	0.099307
誤差率	7.41%	2.22%	1.28%	0.87%	0.71%	0.64%	0.53%
誤差率比較	40%OTM	20%OTM	10%OTM	ATM	10%ITM	20%ITM	40%ITM
モンテカルロ法	—	—	—	—	—	—	—
(1) 標準偏差	9.21%	4.25%	3.10%	2.24%	1.59%	1.13%	0.60%
最大誤差率	30.92%	14.40%	10.79%	7.78%	5.41%	4.01%	2.00%
分散減少法	—	—	—	—	—	—	—
(2) 標準偏差	0.62%	0.23%	0.17%	0.13%	0.10%	0.06%	0.04%
最大誤差率	2.20%	0.80%	0.56%	0.45%	0.31%	0.25%	0.13%
(2)/(1)(%)	6.70%	5.48%	5.45%	5.79%	6.08%	5.69%	6.60%

表 5: $\gamma = 1.0, \quad \sigma_1 = 0.2, \quad \sigma_2 = 0.08, \quad \alpha = 0.5, \quad \beta = 2$

収束値比較	40%OTM	20%OTM	10%OTM	ATM	10%ITM	20%ITM	40%ITM
モンテカルロ法	0.005541	0.018523	0.028292	0.040028	0.053489	0.068414	0.101701
漸近展開	0.005850	0.018946	0.028678	0.040415	0.053925	0.068925	0.102290
誤差率	5.57%	2.28%	1.36%	0.96%	0.82%	0.75%	0.58%
誤差率比較	40%OTM	20%OTM	10%OTM	ATM	10%ITM	20%ITM	40%ITM
モンテカルロ法	—	—	—	—	—	—	—
(1) 標準偏差	11.27%	4.64%	3.25%	2.30%	1.62%	1.16%	0.63%
最大誤差率	38.59%	15.63%	10.71%	7.67%	5.56%	4.16%	2.23%
分散減少法	—	—	—	—	—	—	—
(2) 標準偏差	0.51%	0.26%	0.22%	0.16%	0.12%	0.07%	0.03%
最大誤差率	1.66%	0.70%	0.67%	0.50%	0.33%	0.23%	0.06%
(2)/(1)(%)	4.55%	5.69%	6.77%	6.93%	7.14%	5.92%	4.58%