

初期分布探索付き自己組織化状態空間モデルによる金融時系列解析の最前線： t 分布付き確率的ボラティリティ変動モデルへの応用*

矢野浩一[†]

佐藤整尚[‡]

概 要

Kitagawa (1996), Gordon et al. (1993) によって非線形非ガウス状態空間モデルの状態推定アルゴリズムとしてモンテカルロフィルター（粒子フィルター）が提案された。このアルゴリズムは非線形非ガウス性の著しい金融時系列に対する分析手法として近年注目を浴びている。しかし、モンテカルロフィルターの尤度がモンテカルロ法による誤差を含むため最尤法によるパラメーター推定が難しいことが知られている。その問題を解決するために Kitagawa (1998) は自己組織化状態空間モデルを提案した。しかし、パラメーターに関する事前知識が乏しい場合には自己組織化状態空間モデルにおけるパラメーターの初期分布を適切に設定することが困難であることが指摘されている。本論文ではその問題を解決するために Yano (2007) により提案されたパラメーターの初期分布を効率的に探索するアルゴリズムを用いる。本論文ではモンテカルロフィルターを紹介し、さらに自己組織化状態空間モデルとパラメーター初期分布探索アルゴリズムを解説した後、実証分析を行って本論文の手法が有効性であることを示す。具体的には円/ドル為替レートの日次変化率に対して確率的ボラティリティ変動モデルと t 分布付き確率的ボラティリティ変動モデルを当てはめ、そのパラメーター推定を試みる。

キーワード： 非線形非ガウス状態空間モデル, モンテカルロフィルター, 自己組織化状態空間モデル, Nelder-Mead 法, 確率的ボラティリティモデル.

*本稿について多くの有益なご意見をくださった土谷隆教授（統計数理研究所 [大学共同利用機関法人 情報・システム研究機構]）に感謝します。また、金融研究研修センター・論文ワークショップにおいてご意見を下さった吉野直行教授（慶応大学）、白須洋子研究官（金融研究研修センター）に感謝します。なお、本稿の内容は全て著者らの個人的見解であり、金融庁及び金融研究研修センターの公式見解ではない。

[†]金融庁金融研究研修センター研究官

[‡]統計数理研究所 [大学共同利用機関法人 情報・システム研究機構] 助教授

1 はじめに：金融時系列の非線形性・非ガウス性

金融資産価格収益率などの金融時系列データがガウス分布（正規分布）よりも裾野の広い非ガウス分布をすることは広く知られている（初期の研究として Mandelbrot (1963) や Fama (1965) などがある）。また、金融時系列データには収益率の分散（ボラティリティ）が大きく（小さく）なるとしばらくは分散の大きい（小さい）状態が続くなどの現象が知られている（こうした現象をボラティリティクラスタリングという）。その一例として円/ドル為替レート日次変化率¹を図1に示す。これから日次変化率の分散が時期によって大きくなったり、小さくなったりしている様子を見て取ることができる。このボラティリティクラスタリングと呼ばれる現象はボラティリティに自己相関があることを示しており、旧来より時系列解析で広く用いられてきた自己回帰分析（分散は独立同分布であると仮定されている）が分析手法として適さない可能性を示唆している。さらに、このデータの記述統計量を表1に示す。尖度が4.4365であることから正規分布の尖度3と比較して、円/ドル為替レート日次変化率の分布は中央部が尖っており、同時に裾野が広い（いわゆるファットテール性のある）分布であることが分かる。また、1次から12次まで自己相関がないという帰無仮説を立ててLjung-Box検定を行ったが、p値で示すとおり5%水準、1%水準共に帰無仮説は棄却されなかった²。

表1: 円/ドル為替レート日次変化率の記述統計量

記述統計	数値
標本サイズ	2510
平均	-0.0134
標準偏差	0.7388
尖度	4.4365
歪度	-0.5828
Ljung-Box(12)[p 値]	0.367

近年、このような非線形性・非ガウス性をもった金融時系列データの分析が注目されており、しばしば分析に用いられるモデルとして Taylor (1986) によって提唱された確率的ボラティリティ変動モデル（stochastic volatility models, 以下 SV モデル）がある。SV モデルは以下の形で定式化される。

$$\begin{aligned}x_t &= \mu + \phi x_{t-1} + v_t, \\y_t &= \epsilon_t \exp\left(\frac{x_t}{2}\right),\end{aligned}\tag{1}$$

ここで $v_t \sim N(0, \sigma_s^2)$ 、 $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ 、 μ, ϕ は定数である。さらに本論文では $|\phi| < 1$ と仮定する。

¹1990年1月4日から1999年12月28日の終値ベース。変化率の計算方法などの詳細は後述。

²Diebold (1988) で提案された修正 Ljung-Box 統計量を用いた。

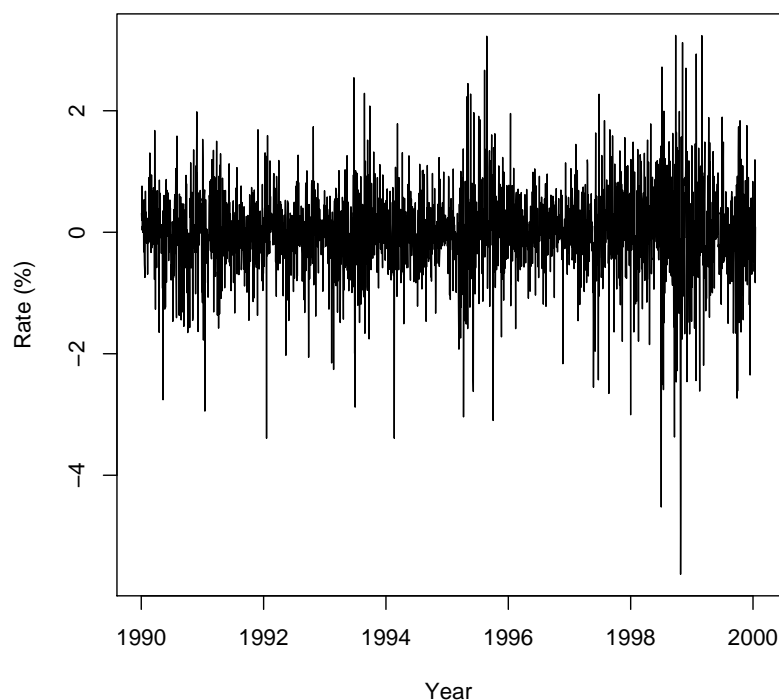


図 1: 円/ドル為替レート日次変化率

Liesenfeld and Jung (2000) によれば SV モデルにおける y_t の尖度は以下の式で得られる。

$$k = E[\epsilon_t^4] \exp\left(\frac{\sigma_s^2}{1-\phi}\right), \quad (2)$$

誤差項 ϵ_t が標準正規分布である場合、 $E[\epsilon_t^4] = 3$ であるから以下のように書き換えることができる。

$$k = 3 \exp\left(\frac{\sigma_s^2}{1-\phi}\right). \quad (3)$$

このことから $\sigma_s^2 > 0$ であれば $k > 3$ となることが分かる。つまり y_t の分布は尖度が標準正規分布よりも大きな（つまりファットテール性のある）分布となる³。

SV モデルのパラメーターならびにボラティリティ推定についてはすでにカルマンフィルターを用いる手法など数多くのアルゴリズムが提案されている（それらの推定方法については渡部 (2000) を参照）。近年、Jacquier et al. (1994) から始まりマルコフ連鎖モンテカルロ法（Markov Chain Monte

³この部分の記述は渡部 (2005a) を参考にした。なお、渡部 (2005a) では ϵ_t が t 分布をする場合についても考察されている。

Carlo, 以下 MCMC) を用いた推定が注目を浴びている (この分野のサーベイとしては渡部 (2005b) を参照)。さらに従来の SV モデルの誤差項 ϵ_t が正規分布と仮定されていたのに対して t 分布などのファットテール性を持つ分布に置き換えたモデル (t 分布付き確率的ボラティリティ変動モデル、以下 SV- t モデル) を MCMC で推定する方法が提案されている (たとえば Liesenfeld and Jung (2000) や Watanabe and Asai (2003) を参照)。

MCMC に基づいたアプローチとは異なり、本論文では Kitagawa (1998) によって提案された自己組織化状態空間モデルを用いて SV モデル、SV- t モデルのパラメーターとボラティリティを推定する。自己組織化状態空間モデルは Kitagawa (1996), Gordon et al. (1993) によって提案された非線形非ガウス状態空間モデルの状態推定アルゴリズムであるモンテカルロフィルター (粒子フィルター) のパラメーター推定が困難であるという問題を解決するために提案された⁴。

モンテカルロフィルターにおけるパラメーター推定については (1) パラメーターに対する尤度関数の推定量がモンテカルロ法による誤差を含むこと、(2) 尤度関数の微分が算出困難であることが難点として指摘されている。そのため、モンテカルロフィルターでは Newton 法などの微分を必要とする関数最適化アルゴリズムを用いてパラメーターを最尤推定することが難しい。この問題を解決するために Lin et al. (2004) は微分を必要としない関数最適化アルゴリズムである Nelder-Mead 法を用いてパラメーターの最尤推定をする手法を提案している。しかし、すでに述べたとおり尤度関数の推定量がモンテカルロ法による誤差を含むため、Nelder-Mead 法の収束条件を大幅に緩和しなければアルゴリズムが収束せず、そのため、Lin et al. (2004) の手法ではパラメーター推定量の分散が大きくなる問題が存在することが Yano (2007) によって指摘されている。

一方、Kitagawa (1998) によって提案された自己組織化状態空間モデルはパラメーターを状態空間に繰り込んで “Bayes” 的推定を行う方法である。この方法についてはパラメーターの良い初期分布を構成することが必要となるが、パラメーターに関する事前知識が乏しい場合にはそれは困難であることが Hürseler and Künsch (2001) によって指摘されている。この問題を解決するために Yano (2007) は Nelder-Mead 法を用いてパラメーターの初期分布を効率的に探索するアルゴリズムを提案した。この手法ではパラメーターの良い初期分布を探索するために Nelder-Mead 法を使用して対数尤度を最大化するが、パラメーター推定自体は自己組織化状態空間モデルが行う。Yano (2007) はシミュレーションデータに対してパラメータ推定を 100 回実行し、提案した方法で得られた推定値の分散が Lin et al. (2004) の方法で得られた推定値の分散よりも小さくなることを示している。

本論文は以下のように構成されている。第 2 節ではモンテカルロフィルターを紹介し、その後に自己組織化状態空間モデルを導入し、さらにパラメーターの初期分布探索について述べる。第 3 節では今回の実証モデルである確率的ボラティリティ変動モデルと t 分布付き確率的ボラティリティ変動モデルを導入し、円/ドル為替レートの日次変化率での実証分析を行う。第 4 節ではまとめを行い、今後の発展について論じる。

⁴モンテカルロフィルターの様々な応用例については Doucet et al. (2001) を参照せよ。

2 モデル

2.1 モンテカルロフィルター

モンテカルロフィルター (the Monte Carlo filter, 以下 MC フィルター) は Kitagawa (1996)、Gordon et al. (1993) によって提案された非線形非ガウス状態空間モデルの状態推定アルゴリズムである。時系列データ \mathbf{y}_t , $t = \{1, 2, \dots, T\}$ を所与として非線形非ガウス状態空間モデルは以下のように定式化される⁵。

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_t &= f(\mathbf{x}_{t-1}, \boldsymbol{\xi}_s, \mathbf{v}_t), \\ \mathbf{y}_t &= h(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\xi}_m, \boldsymbol{\epsilon}_t),\end{aligned}\tag{4}$$

ここで \mathbf{x}_t は $n_x \times 1$ の未知の状態ベクトル、 \mathbf{v}_t は $n_v \times 1$ のシステムノイズベクトル(密度関数は $q(\mathbf{v})$ ⁶)、 $\boldsymbol{\epsilon}_t$ は $n_\epsilon \times 1$ の観測ノイズベクトル(密度関数は $r(\boldsymbol{\epsilon})$)、 $\boldsymbol{\xi}_s$ は関数 f の $n_s \times 1$ のシステムパラメータベクトル、 $\boldsymbol{\xi}_m$ は関数 h の $n_m \times 1$ の観測パラメータベクトルを表す。関数 f は $f: \mathbf{R}^{n_x} \times \mathbf{R}^{n_v} \rightarrow \mathbf{R}^{n_x}$ 、関数 h は $h: \mathbf{R}^{n_x} \times \mathbf{R}^{n_\epsilon} \rightarrow \mathbf{R}^{n_y}$ の一般には非線形の関数である。以下では式 (4) の第 1 式をシステム方程式、第 2 式を観測方程式と呼ぶ。式 (4) は $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})$ がシステム方程式で、 $p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t)$ が観測方程式で与えられることを意味する。また、パラメーター $\boldsymbol{\theta}$ を以下のように定義する。

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_s \\ \boldsymbol{\xi}_m \end{bmatrix}.\tag{5}$$

観測値から式 (4) の状態 \mathbf{x}_t を推定することを状態推定と呼び、パラメーター $\boldsymbol{\theta}$ を推定することをパラメーター推定と呼ぶ。状態推定では予測分布 (predictive distribution)、フィルタリング分布 (filtering distribution)、平滑化分布 (smoothing distribution) をそれぞれ以下のように定義する(たとえば Kitagawa and Gersch (1996) を参照せよ)。

$$\begin{aligned}p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:(t-1)}), \\ p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}), \\ p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:T}).\end{aligned}\tag{6}$$

ただし、時間 1 から時間 t までの観測値を $\mathbf{y}_{1:t} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_t\}$ と表している。状態推定アルゴリズムはベイズの定理をその理論的基盤としていることが広く知られている(たとえば Arulampalam et al. (2002) を参照せよ)。ベイズの定理から以下の公式が得られる。

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}) = \frac{p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t)p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:(t-1)})}{p(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_{1:(t-1)})}, \quad t \geq 1,\tag{7}$$

ここで $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:(t-1)})$ を事前分布、 $p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t)$ を尤度、 $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t})$ を事後分布、 $p(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_{1:(t-1)})$ を規格化定

⁵本論文では数式内の太字はベクトルを表す。

⁶システムノイズ \mathbf{v}_t は現在ならびに過去の状態ベクトル \mathbf{x}_t とは独立である。

数と呼ぶ。観測値がまったくない初期時点における事前分布（以下、初期分布）を $p(\mathbf{x}_1) = p(\mathbf{x}_1|\emptyset)$ と表す⁷。

MCフィルターでは時間 t におけるフィルタリング分布を以下のように「粒子」を使って近似する。

$$p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) \simeq \sum_{i=1}^M w_t^i \delta(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^i), \quad (8)$$

ここで w_t^i は粒子 \mathbf{x}_t^i の重みを表し、 M は粒子数、 δ はディラックのデルタ関数を表す（重みの導出法は後述）⁸。また、 $\sum_{i=1}^M w_t^i = 1$ である。MCフィルターの標準的なアルゴリズムでは各時間 t において分布 (8) から M 個の粒子のサンプリングを行い、 $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t})$ をリサンプリング後の粒子 $\hat{\mathbf{x}}_t^i, i = \{1, \dots, M\}$ で以下のように近似する。

$$p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) \simeq \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \delta(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t^i). \quad (9)$$

式 (9) を用いて予測分布 $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:(t-1)})$ は以下のように近似できる（ただし、式 (9) における t を $t-1$ とする）。

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:(t-1)}) &= \int p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})p(\mathbf{x}_{t-1}|\mathbf{y}_{1:(t-1)})d\mathbf{x}_{t-1} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \int p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})\delta(\mathbf{x}_{t-1} - \hat{\mathbf{x}}_{t-1}^i)d\mathbf{x}_{t-1} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M p(\mathbf{x}_t|\hat{\mathbf{x}}_{t-1}^i) \\ &\simeq \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \delta(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^i). \end{aligned} \quad (10)$$

なお、粒子 \mathbf{x}_t^i はシステム方程式を用いたサンプリング

$$\mathbf{x}_t^i \sim p(\mathbf{x}_t|\hat{\mathbf{x}}_{t-1}^i), \quad (11)$$

⁷ \emptyset は観測値が存在しないことを示す。

⁸ディラックのデルタ関数の定義は以下の通り。

$$\begin{aligned} \delta(x) &= 0, \text{ if } x \neq 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx &= 1. \end{aligned}$$

で得られるものである。式 (10) を式 (7) に代入すると以下の式が得られる。

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}) &\propto p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t) p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}) \\
 &\propto \frac{1}{M} p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t) \sum_{i=1}^M \delta(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^i) \\
 &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t^i) \delta(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^i).
 \end{aligned} \tag{12}$$

式 (12) の左辺は時間 t におけるフィルタリング分布であり、結局、式 (12) と式 (8) を比較して、式 (8) の重み w_t^i を以下の式で与えることが妥当であると考えられる。

$$w_t^i \propto p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t^i). \tag{13}$$

つまり重み w_t^i は尤度に比例するように生成すればよい。ただし、一般的には尤度から生成した重み w_t^i は $\sum_{i=1}^M w_t^i = 1$ を満たさないため、式 (8) で用いる場合は w_t^i を $w_t^i / \sum_{i=1}^M w_t^i$ として規格化する。MC フィルターのアルゴリズムを Algorithm 1 に示す。

```

Algorithm 1: The Monte Carlo Filter
MCPfilter[ $\{\hat{\mathbf{x}}_{t-1}^i\}_{i=1}^M, \mathbf{y}_t$ ]
{
  FOR  $i=1, \dots, M$ 
    Predict:  $\mathbf{x}_t^i \sim p(\mathbf{x}_t | \hat{\mathbf{x}}_{t-1}^i)$ 
    Weight:  $w_t^i = p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t^i)$ 
  ENDFOR

  Sum of Weights:  $sw = \sum_{i=1}^M w_t^i$ 
  Log-Likelihood:  $llk = \log(sw/M)$ 

  FOR  $i=1, \dots, M$ 
    Normalize:  $w_t^i = \frac{w_t^i}{sw}$ 
  ENDFOR

  Resampling:  $\{\{\hat{\mathbf{x}}_t^i\}_{i=1}^M\} = \text{resample}\{\{\mathbf{x}_t^i, w_t^i\}_{i=1}^M\}$ 

  RETURN[ $\{\hat{\mathbf{x}}_t^i\}_{i=1}^M, llk$ ]
}

MCPmain [ $\{\mathbf{x}_0^i\}_{i=1}^M, \{\mathbf{y}_t\}_{t=1}^T$ ] {
  Initialize:  $llk = 0$ 

```

```

FOR t=1,...,T
  mcp = MCPfilter[{\hat{x}_{t-1}^i}_{i=1}^M, y_t]
  llk = llk + (llk in mcp)
  {\hat{x}_t^i}_{i=1}^M = ({\hat{x}_t^i}_{i=1}^M in mcp)
ENDFOR

RETURN[{\{\hat{x}_t^i}_{i=1}^M}_{t=1}^T, llk]
}

```

粒子の重み w_t^i を用いてパラメータ θ の尤度は以下のように近似できる。

$$\begin{aligned}
L(\theta) &= \prod_{t=1}^T p(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{t-1}, \theta) \\
&\simeq \prod_{t=1}^T \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M w_t^i,
\end{aligned} \tag{14}$$

ただし、ここで用いる粒子の重み w_t^i は規格化されていないもの（尤度）である。よってMCフィルターにおけるパラメータ θ の対数尤度関数の推定量は以下のように得られる。

$$l(\theta) \simeq \sum_{t=1}^T \log\left(\sum_{i=1}^M w_t^i\right) - T \log M, \tag{15}$$

ここで \log は自然対数を表す。式(15)の右辺は重み w_t^i から構成されていることから分かるようにモンテカルロ法による誤差を含む推定量である⁹。つまり対数尤度の正確な推定量を得るためにはかなり大量の粒子を発生させる（つまり多くのモンテカルロ試行を実施する）必要があるため、計算負荷が大きい。さらに式(15)は重みで定式化されているため微分を計算できない。そのためNewton法などの微分を用いる非線形関数最適化アルゴリズムを用いることができない。以上のような理由でMCフィルターでは最尤法によるパラメータ推定が困難である（この問題を解決する方法は次節で説明する）。

複数の統計モデルがある場合、それぞれのモデルの良さを何らかの規準で評価して、規準に照らして最も良いモデルを選択する必要がある。本論文ではKitagawa(1996)に倣い、Akaike(1973)によって提案された赤池情報量規準(Akaike Information Criterion, 以下AIC)を用いる。AICはパラメータ θ の対数尤度 $l(\theta)$ を用いて以下のように定式化される。

$$\text{AIC} = -2l(\theta^*) + 2q, \tag{16}$$

ここで θ^* は最尤推定量、 q は θ の要素数（推定されるパラメータ数）を表す¹⁰。

⁹Higuchi(1995)が式(15)におけるモンテカルロ法による誤差について分析している。

¹⁰AICをはじめとした様々な情報量規準に関する解説は小西・北川(2004)に詳しい。

2.2 自己組織化状態空間モデル

前節で述べた問題点を解決するため Kitagawa (1998) によって提案された自己組織化状態空間モデルは非線形・非ガウス状態空間モデルの状態推定とパラメータ推定を同時におこなう方式である。Kitagawa (1998) は状態ベクトルとパラメータを組み合わせる拡張状態ベクトルを以下のように定義した。

$$z_t = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

さらに拡張システム方程式と拡張観測方程式を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} z_t &= F(z_{t-1}, \mathbf{v}_t, \boldsymbol{\xi}_s), \\ \mathbf{y}_t &= H(z_t, \boldsymbol{\epsilon}_t, \boldsymbol{\xi}_m), \end{aligned} \quad (18)$$

ここで

$$F(z_{t-1}, \mathbf{v}_t, \boldsymbol{\xi}_s) = \begin{bmatrix} f(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{v}_t, \boldsymbol{\xi}_s) \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}$$

また

$$H(z_t, \boldsymbol{\epsilon}_t, \boldsymbol{\xi}_m) = h(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\epsilon}_t, \boldsymbol{\xi}_m)$$

である。この非線形非ガウス状態空間モデルを自己組織化状態空間モデル (a Self-Organizing State Space model、以下 SOSS モデル) と呼ぶ。パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ を含むように状態ベクトルが拡張されているため、MC フィルターを拡張状態ベクトルに適用すれば対数尤度の最大化なしにパラメータと状態が同時に求まる (詳しくは Kitagawa (1998) を参照)。なお、対数尤度の定義自体は MC フィルターと同じである。

時間 0 の時点でのパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ のための初期粒子 $\theta_{j,0}^i, \{i = 1, \dots, M\}$ は一様分布からサンプリングする。

$$\theta_{j,0}^i \sim \text{Uniform}(P_j - r_j, P_j + r_j), \quad (19)$$

ここで $\theta_{j,0}^i$ は $\boldsymbol{\theta}_0^i$ の j 番目の要素、 $\text{Uniform}(P_j - r_j, P_j + r_j)$ は $P_j - r_j$ から $P_j + r_j$ までの一様分布、 P_j は範囲 $(P_j - r_j, P_j + r_j)$ の中心、 r_j は定数である。

SOSS モデルのアルゴリズムを Algorithm 2 に示す¹¹。

Algorithm 2: A Self Organizing State Space
SOSS[$\{\hat{z}_{t-1}^i\}_{i=1}^M, \mathbf{y}_t$]
{
FOR $i=1, \dots, M$
 Predict: $z_t^i \sim p(z_t | \hat{z}_{t-1}^i)$
 Weight: $w_t^i = p(\mathbf{y}_t | z_t^i)$

¹¹ Algorithm 2 における負対数尤度は次節で定義する。

```

ENDFOR

Sum of Weights:  $sw = \sum_{i=1}^M w_t^i$ 
Log-Likelihood:  $llk = \log(sw/M)$ 

FOR i=1,...,M
  Normalize:  $w_t^i = \frac{w_t^i}{sw}$ 
ENDFOR

Resampling:  $[\{\hat{z}_t^i\}_{i=1}^M] = \text{resample}[\{z_t^i, w_t^i\}_{i=1}^M]$ 

RETURN $[\{\hat{z}_t^i\}_{i=1}^M, llk]$ 
}

SOSSmain $[\{\mathbf{x}_0^i\}_{i=1}^M, \{\mathbf{y}\}_{t=1}^T, \mathbf{P}] \{$ 
  Initialize the negative log-likelihood:  $Y = 0$ 
 $\theta_0 \sim \text{uniform}(\mathbf{P} - r, \mathbf{P} + r)$ 
 $\{z_0^i\}_{i=1}^M = (\{\mathbf{x}_0^i\}_{i=1}^M, \{\theta_0^i\}_{i=1}^M)$ 

  FOR t=1,...,T
    soss = SOSS $[\{\hat{z}_{t-1}^i\}_{i=1}^M, \mathbf{y}_t]$ 
 $Y = Y - (llk \text{ in soss})$ 
 $\{\hat{z}_t^i\}_{i=1}^M = (\{\hat{z}_{t-1}^i\}_{i=1}^M \text{ in soss})$ 
  ENDFOR

  RETURN $[\{\{\hat{z}_t^i\}_{i=1}^M\}_{t=1}^T, Y]$ 
}

```

Hürseler and Künsch (2001) は SOSS モデルのパラメーター θ の初期分布を事前に決定することは困難であると指摘した。この困難が生じる理由は MC フィルターでフィルターされた $\hat{\theta}$ はパラメーターの初期分布 θ_0 のサブサンプルであるためである（そもそも $\hat{\theta}$ に誤差項（イノベーション項）がないため、初期の粒子からリサンプリングを繰り返すと粒子数は単調に減少する）。しかし、実際には事後分布の平均、分散、分布の形が事前に分かっていることはほとんどない。そのため、初期粒子を発生させた時にその粒子の中に真のパラメーターとなる値が含まれていることはほとんどない。つまり、初期粒子 θ_0 を発生させる分布を適切に選ぶことが必要になるわけである。

上記の問題を解決するために Kitagawa (1998) ではパラメーター θ に人工的な誤差項（イノベーション項）を追加するアルゴリズムを提案している。さらに Liu and West (2001) では、 $p(\theta_{t+1}|\theta_t)$ を

以下のようにとることが提案されている。

$$p(\theta_{t+1}|\theta_t) \sim N(a\theta_t + (1-a)\bar{\theta}_t, h^2V_t), \quad (20)$$

ここで $\bar{\theta}_t$ は θ_t を表す粒子の値の平均、 V_t は同じく分散、また $h^2 = 1 - a^2$, $a = (3\delta_t - 1)/2\delta_t$ である。さらに δ_t は $(0, 1]$ である (Liu and West (2001) は 0.95 から 0.99 の間の値を用いるように提案している)。Liu and West (2001) の特色は時間 t が増加するにしたがって V_t が減少し 0 に収束する点である。この方式は θ_t がパラメーター θ に近く (なおかつ V_t が十分に大きい) 場合は有効であるが、 θ について事前情報が乏しい場合には推定に失敗する可能性がある (Yano (2007) に推定に失敗する場合のシミュレーションが示されている)。

2.3 提案手法：パラメーター初期分布探索

Yano (2007) は、Nelder and Mead (1965) によって提案された Nelder-Mead 法を用いて自己組織化状態空間モデルにおけるパラメーターの初期分布を探索する方法を提案した。Nelder-Mead 法 (Nelder-Mead 法、以下 NM 法) は制約条件なしの J 変数関数最小化アルゴリズムであり、関数の微分は不要な点の特徴である。そのため、微分不可能な関数の最小化にも適用することが可能である (以下では、負対数尤度を最小化する問題を考える)。前述のように MC フィルターの負対数尤度は粒子の重みで近似されているため、微分が計算困難であるなどの問題があるが、NM 法はこのような場合にも適用可能である。Lin et al. (2004) は NM 法を用いて負対数尤度を最小化する手法を提案した。しかし、この手法には前述のようにパラメーター推定量の分散が大きくなる問題が存在する。それに対して本論文の手法では Nelder-Mead 法を負対数尤度の最小化に用いる点は Lin et al. (2004) と同じであるが、パラメーター推定量は SOSS で計算した結果を用いる点が異なっている (Yano (2007) には本論文の手法によるパラメーター推定量の分散が Lin et al. (2004) によるパラメーター推定量の分散よりも小さくなることがシミュレーションを用いて示されている)。提案手法は以下のような手順で構成されている。

1. $J+1$ 個の点 P_n , $n = \{1, \dots, J+1\}$ の周辺に式 (19) に従って粒子を発生させ、SOSS を行うための $J+1$ 個の初期分布の組 Ω_n , $n = \{1, \dots, J+1\}$ を作る
2. 上記の Ω_n , $n = \{1, \dots, J+1\}$ を初期分布として使い、SOSS モデルを用いてパラメーター推定を行う (Ω_n についてパラメーター粒子は急速に縮退して 1 個となる)
3. パラメーター粒子が縮退した後は、SOSS の負対数尤度は MC フィルターの負対数尤度と同様に計算できる。 Ω_n (P_n を母点として作られた初期分布) から SOSS によって得られたパラメーター値を θ_n とし、負対数尤度の値を l_n とする
4. P_n における負対数尤度の値が l_n であると考えて NM 法の一反復を行い、新しい $J+1$ 個の点 P_n , $n = \{1, \dots, J+1\}$ を生成する (NM 法の詳細は後述)
5. 手順 1. に戻る

つまり、NM 法により負対数尤度を最小化することにより、パラメーター用の粒子の初期分布が真のパラメーターに近づけば、初期分布の中に真のパラメーターに極めて近い粒子が含まれているため、SOSS モデルでその粒子が選択され、結果としてパラメーターの良い推定値が得られる。

ベクトル $P = [P_1, \dots, P_n, \dots, P_{J+1}]$ は J 次元の $(J+1)$ 個の点を表すと定め、この $(J+1)$ 個の点をシンプレックスと呼ぶ。ただし、 P_n の各要素は式 (19) の中心であるとする。また、 $\theta_{j,n}$, ($1 \leq j \leq J, 1 \leq n \leq J+1$) は P_n を母点とする初期分布 Ω_n から SOSS によって得られたパラメーターの j 番目の要素を表すこととする。以下では P_n における SOSS モデルの負対数尤度を Y_n を表し、 $Y_h = \max(Y_n)$ (ここで h は “high”)、 Y_n の中で 2 番目に大きいものを Y_s (ここで s は “second highest”)、 $Y_l = \min(Y_n)$ (ここで l は “lowest”) と表すことにする。負対数尤度は以下のように定義する。

$$Y_n(P_n) \simeq - \sum_{t=t_s}^T \log \left(\sum_{i=1}^M w_t^i \right) + T \log M, \quad (21)$$

ここで w_t^i はパラメーター P_n において計算されたものではなく Ω_n より SOSS で得られた点 θ_n のものであり、なおかつ規格化されていないもの (尤度) である。また、パラメーター粒子がある程度まで縮退した時点 t_s (本論文の実証分析では $t_s = 20$ と置いた) から尤度を足し合わせている¹²。

NM 法の基本は以下の 3 つの操作: reflection, expansion, contraction である。Reflection は以下のように定義する¹³。

$$P_{ref} = (1 + \alpha)P_{cent} - \alpha P_h, \quad \alpha > 1, \quad (22)$$

ここで P_h は Y_h を実現する点 P_n であり、 P_{cent} は P_n , ($n \neq h$) の重心である。Expansion は以下のように定義する

$$P_{exp} = \gamma P_{ref} + (1 - \gamma)P_{cent}, \quad \gamma \geq 1. \quad (23)$$

Contraction は以下のように定義する。

$$P_{contr} = (1 + \beta)P_h - \beta P_{cent}, \quad \beta \in (0, 1). \quad (24)$$

本論文のアルゴリズムは以下の条件を満たすと終了する。

$$\sqrt{\sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^{J+1} \frac{(\theta_{j,n} - \bar{\theta}_j)^2}{J(J+1)}} < \epsilon_h, \quad (25)$$

ここで $\bar{\theta}_j$ は θ の j 番目の要素を $N+1$ 点 (時間 T におけるシンプレックス) で平均したもの、 ϵ_h は

¹²筆者らは $t_s = 1$ と置いた場合の実証分析も行ったが、 $t_s = 20$ の結果とほとんど差はなかった。これはパラメーターの粒子が急速に縮退するためだと考えられる。

¹³読者の理解を助けるために NM 法のアルゴリズムを図 2 に示す。これは Nelder and Mead (1965) にある図を筆者らが本論文用に写したものである。アルゴリズムの細かい点については Nelder and Mead (1965) を参照のこと。

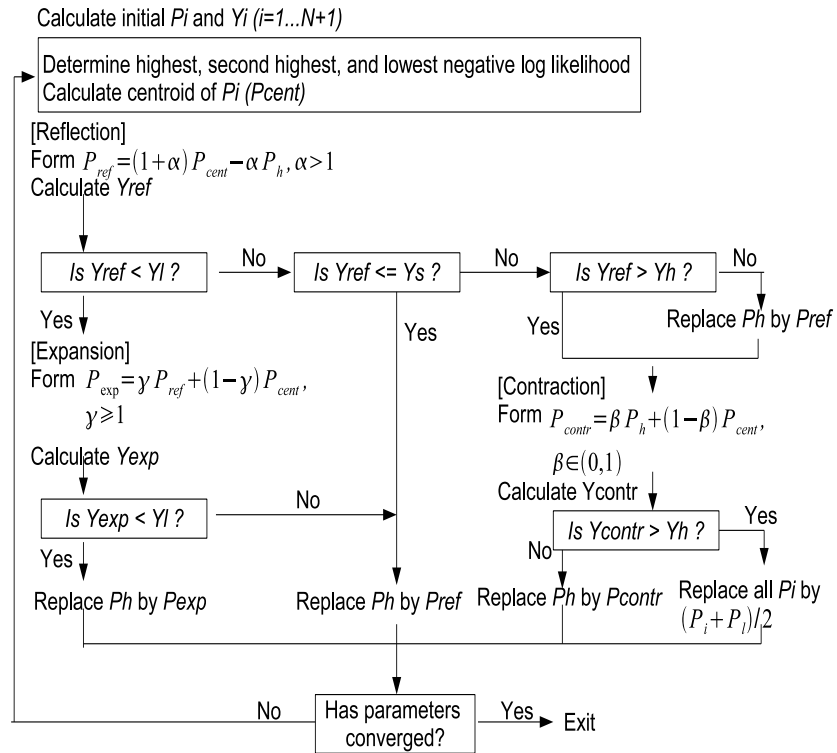


図 2: Nelder-Mead 法 (Nelder and Mead (1965) から引用)

十分に小さい正の実数である。パラメータ初期分布探索のアルゴリズムを Algorithm 3 に示す¹⁴。

Algorithm 3: Simplex Initial Distribution Search

SimplexSOSS[$\{\mathbf{y}\}_{t=1}^T, \mathbf{P}, N$]

{

$\mathbf{P} = [P_1, \dots, P_{N+1}]$

FOR $i=1, \dots, N+1$

$Y_i = \text{SOSSMain}(\{\mathbf{y}\}_{t=1}^T, P_i)$

ENDFOR

Set highest negative log-likelihood: Y_h

Set second highest negative log-likelihood: Y_s

Set lowest negative log-likelihood: Y_l

¹⁴本論文のシミュレーションでは $r_j = 0.1, \alpha = 2.0, \gamma = 2.0, \beta = 0.5, \epsilon_h = 1.0 \times 10^{-8}$ と設定した。各点 $\{P_i\}, i \neq h$, の重心は各座標の平均を計算することで得られる(質量中心)。また、初期のシンプレックスを定める方法は Nelder and Mead (1965) に示された方法に従った(Appendix B にシンプレックスの初期化について述べた。)

```

Calculate the centroid  $P_{cent}$  of  $\{P_i\}$ ,  $i \neq h$ 
Reflection:  $P_{ref} = (1 + \alpha)P_{cent} - \alpha P_h$ 
 $Y_{ref} = \text{SOSSMain}(P_{ref})$ 
FLAG=0
IF  $Y_{ref} < Y_l$ 
  Expansion:  $P_{exp} = \gamma P_{ref} + (1 - \gamma)P_{cent}$ 
   $Y_{exp} = \text{SOSSMain}(P_{exp})$ 
  IF  $Y_{exp} < Y_l$ 
    Replace  $P_h$  by  $P_{exp}$ 
    FLAG=1
  ENDIF
ELSE IF  $Y_{ref} \leq Y_s$  AND  $FLAG = 0$ 
  Replace  $P_h$  by  $P_{ref}$ 
  FLAG=1
ELSE IF  $Y_{ref} > Y_h$  AND  $FLAG = 0$ 
  ELSE
    Replace  $P_h$  by  $P_{ref}$ 
  ENDIF

Contraction:  $P_{contr} = \beta P_h + (1 - \beta)P_{cent}$ 
 $Y_{contr} = \text{SOSSMain}(P_{contr})$ 
IF  $Y_{contr} \leq Y_h$ 
  Replace  $P_h$  by  $P_{contr}$ 
ELSE
  Replace all  $P_i$  by  $(P_i + P_l)/2$ 
ENDIF

RETURN[P]
}

```

3 実証分析

実証分析として円/ドル為替レート¹⁵の変化率に対して確率的ボラティリティ変動モデルを当てはめ、パラメーター推定を行った。日次変化率は以下のように計算する。

$$y_t = 100 \times \{\log(\tilde{P}_{t+1}) - \log(\tilde{P}_t)\}, \quad (26)$$

¹⁵1990年1月4日から1999年12月28日までの為替市場の終値である。

ここで \tilde{P}_t は為替市場の終値である。日次変化率の記述統計量はすでに表 1 で示した。

3.1 確率的ボラティリティ変動モデル

SV モデルは以下の形で定式化される。

$$\begin{aligned} x_t &= \mu + \phi x_{t-1} + v_t, \\ y_t &= \epsilon_t \exp\left(\frac{x_t}{2}\right), \end{aligned} \quad (27)$$

ここで $v_t \sim N(0, \sigma_s^2)$ 、 $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ であり、 μ, ϕ は定数である。本論文の手法を用いて求められた SV モデルの対数尤度推定量 $-Y_l$ を図 3 に示す（横軸の Iteration は NM 法の 3 つの操作が行われた回数である）。徐々に対数尤度が大きくなり、途中で大きな値を示すが、式 (25) の収束条件を満たさないため、少し対数尤度が小さくなった時点で収束している。これは対数尤度推定量がモンテカルロ誤差を含むため、偶然に大きな値を示してしまった結果であると考えられる。次に SV モデルのパラメーター推定結果を表 2 に示す（上段に本論文での推定結果、下段に Watanabe and Asai (2003) での推定結果を記す。なお、パラメーター推定では 1990 年から 1991 年までのデータを取り出して用いた [以下同じ]）。パラメーター ϕ の値として 0.8985 が得られているが、この値は先行研究である Watanabe and Asai (2003) で推定された 0.9583 と比較して小さな値である。ただし、Jacquier et al. (1994) は金融時系列に対して SV モデルを推定した論文をサーベイした結果、 ϕ の推定値としては 0.8 から 0.995 までの値が得られていると報告しているため、本論文での結果は従来の研究結果とは整合的であり、ボラティリティクラスタリングが生じるには十分な値が求まっていると考えられる。また、 σ_s の推定値として 0.1881 が得られており、これは Watanabe and Asai (2003) で推定された 0.2113 より小さいもののある程度は良い一致を示している。推定結果全般としては若干のばらつきはあるもののまったく異なった手法で推定した結果としてはある程度は良い一致を示していると言える。次に図 4 に 1990 年から 1999 年までのボラティリティ $\exp(\frac{x_t}{2})$ の推定結果を示す¹⁶。ほぼ全域にわたってボラティリティは 0.5 から 1.0 の範囲内に収まっているが、サンプルの 2000 から 2500 の部分で大きくボラティリティが上昇しており、それは図 1 から分かるように 1998 年から 1999 年にかけて為替レートが大きく変動した結果を反映しているものと考えられる。

表 2: SV モデルのパラメーター推定結果

	対数尤度	μ	ϕ	σ_s
初期値		0	0	0
推定値	-474.7326	0.0049	0.8985	0.1881
Watanabe and Asai (2003)	なし	-0.0962	0.9583	0.2113

¹⁶状態 x_t の初期分布は標準正規分布で生成した（以下同じ）。

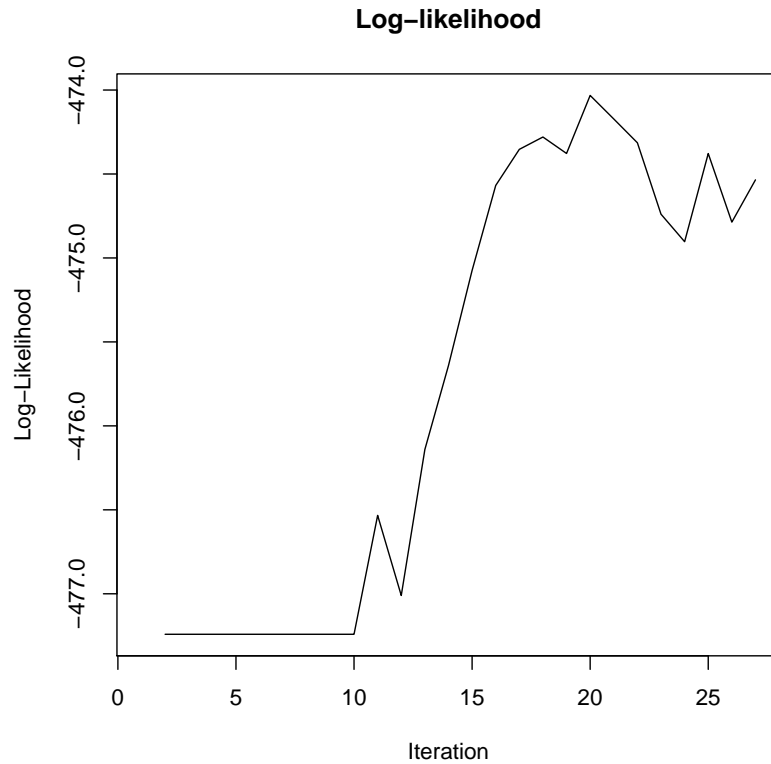


図 3: 対数尤度 (SV モデル)

3.2 t 分布付き確率的ボラティリティ変動モデル

t 分布付き確率的ボラティリティ変動モデル (stochastic volatility model with t -distributions) は Liesenfeld and Jung (2000) によって導入された。Liesenfeld and Jung (2000) は式 (27) の観測方程式内の誤差項 ϵ_t を正規分布から分散が 1 に標準化された t 分布に置き換えたモデルを提唱した。

$$\begin{aligned} x_t &= \mu + \phi x_{t-1} + v_t, \\ y_t &= \epsilon_t \exp\left(\frac{x_t}{2}\right), \end{aligned} \tag{28}$$

ここで $v_t \sim N(0, \sigma_s^2)$ ならびに $\epsilon_t \sim t(\nu)$ であり、 ν は t 分布の自由度を表す。さらに Liesenfeld and Jung (2000) とは異なり、式 (27) のシステム方程式内の誤差項 v_t を正規分布から分散が 1 に標準化された t 分布に置き換えたモデルも考えられる。

$$\begin{aligned} x_t &= \mu + \phi x_{t-1} + \chi v_t, \\ y_t &= \epsilon_t \exp\left(\frac{x_t}{2}\right), \end{aligned} \tag{29}$$

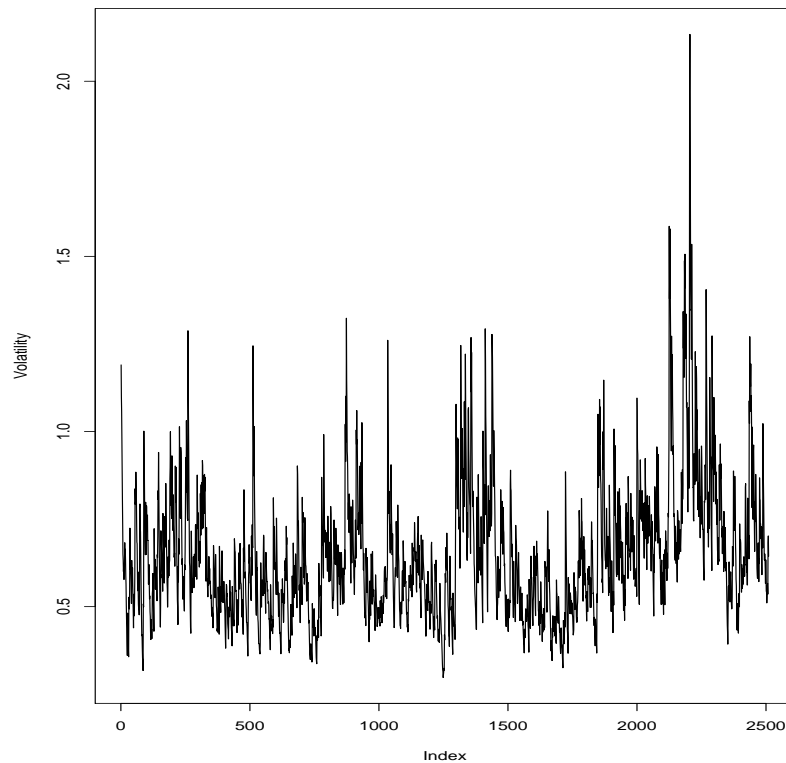


図 4: ボラティリティ (SV モデル)

ここで $v_t \sim t(\nu)$ ならびに $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ であり、 ν は t 分布の自由度であり、 χ は定数である。以下、式 (28) を SVMT モデル、式 (29) を SVST モデルと呼ぶ。

本論文の手法を用いて SVMT モデルの対数尤度推定量 $-Y_i$ が最大化されていく過程を図 5 に示す。次に SVMT モデルのパラメーター推定結果を表 3 に示す (上段に本論文での推定結果、下段に Watanabe and Asai (2003) での推定結果を記す)。SV モデルと同様に推定結果全般としては若干のばらつきはあるもののまったく異なった手法で推定した結果としてはある程度は良い一致を示していると考えられる。次に図 6 にボラティリティ $\exp(\frac{x_t}{2})$ の推定結果を示す。ほぼ全域にわたってボラティリティは 0.5 から 1.0 の範囲内に収まっているが、サンプルの 2000 から 2500 の部分で大きくボラティリティが上昇しており、それは SV モデルと同様に 1998 年から 1999 年にかけて為替レートが大きく変動した結果を反映しているものと考えられる。

本論文の手法を用いて SVST モデルの対数尤度推定量 $-Y_i$ が最大化されていく過程を図 7 に示す。次に SVST モデルのパラメーター推定結果を表 4 に示す (ここでは比較する先行研究がないため、本論文での結果のみを記す)。次に図 8 にボラティリティ $\exp(\frac{x_t}{2})$ の推定結果を示す。ほぼ全域にわたってボラティリティは 0.8 前後で推移しており、SV モデルと SVMT モデルの結果とはかなり異なっている。これは $\phi = 0.9651$ と SV モデルや SVMT モデルよりも大きな ϕ が求まっているこ

表 3: SVMT モデルのパラメーター推定結果

	対数尤度	μ	ϕ	σ_s	ν
初期値		0	0	0	0
推定値	-472.9439	-0.0246	0.8984	0.2922	3.7892
Watanabe and Asai (2003)	なし	-0.0287	0.9827	0.1234	8.1161

とからボラティリティの持続性が高いことによるものと考えられる。また、サンプルの 2000 から 2500 の部分で大きくボラティリティが上昇しており、それは SV モデルならびに SVMT モデルと同様に 1998 年から 1999 年にかけて為替レートが大きく変動した結果を反映していると考えられる点は同じである。

表 4: SVST モデルのパラメーター推定結果

	対数尤度	μ	ϕ	χ	ν
初期値		0	0	0	0
推定値	-474.7802	-0.0028	0.9651	0.1573	3.4800

3.3 3モデルの比較

すでに得られた結果から AIC を計算し、SV, SVMT, SVST モデルの当てはまりの良さを評価する¹⁷。得られた AIC を表 5 に示す。その結果から SVMT モデルが一番当てはまりが良く、次に SV モデルが当てはまりが良いと分かる。SVST モデルは本論文で用いた 3 つのモデルの中で最も当てはまりが悪い。観測方程式の誤差項に t 分布を仮定した場合が統計モデルとしては最も優れていることが分かる。このことはボラティリティの時間発展においては非ガウス性は少ないことを示していると考えられる。

表 5: AIC の比較

モデル	AIC
SV	955.4652
SVMT	953.8878
SVST	957.5604

¹⁷粒子を 1 万個用いた場合、対数尤度推定量はここで示した値のプラスマイナス 0.3 程度変動するが、AIC の順位は変わらないため本節の結論には影響しない。

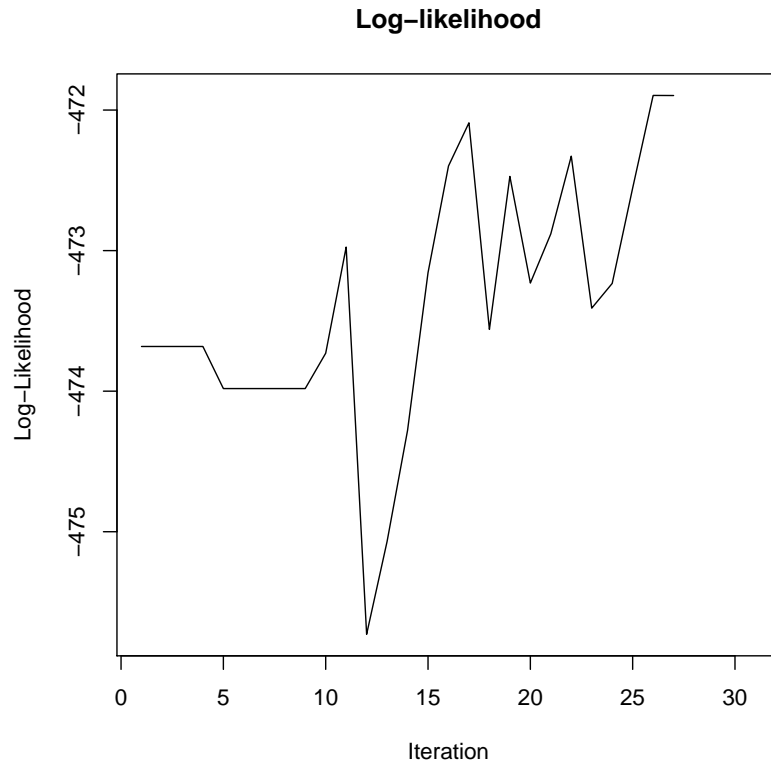


図 5: 対数尤度 (SVMT モデル)

4 まとめ

本論文では Kitagawa (1998) により提案された自己組織化状態空間モデルとその初期分布を効率的に探索するために Yano (2007) により提案されたパラメーター初期分布探索を用いて円/ドル為替レート日次変化率に確率的ボラティリティ変動モデルと t 分布付き確率的ボラティリティ変動モデルを当てはめ、そのパラメーターとボラティリティを推定した。SV モデルならびに SVMT モデルのパラメーター推定結果が広く用いられている MCMC を用いた Watanabe and Asai (2003) の推定結果とある程度整合性することから、自己組織化状態空間モデルのによる推定もある程度の信頼性を確保できていると考えられる。さらに SVST モデルにも適用可能であることから、確率的ボラティリティ変動モデルの推定においては自己組織化状態空間モデルの柔軟性は MCMC よりも高いのではないかと考えられる。

今後の課題として今回はボラティリティ推定において MC フィルターを用いたが、より良いボラティリティの推定値を得るために今後の研究としては Yano (2006) で提唱された MC フィルターベースの平滑化アルゴリズムを用いてボラティリティ推定する。また、レバレッジ効果¹⁸がある場

¹⁸株価が下がった翌日は株価が上がった翌日よりボラティリティが高いなどの現象が指摘されている。Black (1976) を参照。

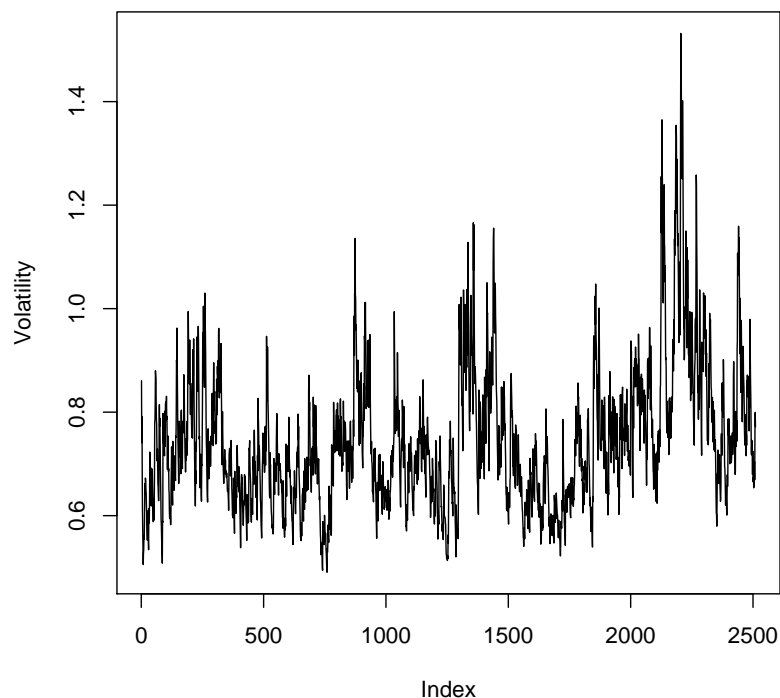


図 6: ボラティリティ (SVMT モデル)

合の非対称 SV モデルの推定などを試みていきたい。

付録 A SV モデルの二つの表式

確率的ボラティリティ変動モデルには (等価な) 二つの表式が使われる。この節では読者の便宜を図るためにそれらの二つの表式が等価であることを示しておく。まず、一つ目の表式は以下の形で与えられる。

$$\begin{aligned} \log \hat{x}_t^2 &= \alpha_s + \beta_s \log \hat{x}_{t-1}^2 + v_t, \\ y_t &= \hat{x}_t \epsilon_t, \end{aligned} \tag{A1}$$

ここで y_t は観測値 (たとえば株価収益率)、 \hat{x}_t はボラティリティを表す。さらに $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ 、 $v_t \sim N(0, \sigma_s)$ である。式 (A1) の第 2 式で \hat{x}_t^2 の対数が取ってあるのは \hat{x}_t^2 が負にならないようにするためである。式 (A1) を変形するために $x_t = \log \hat{x}_t^2$ とおくと $\hat{x}_t = \exp\left(\frac{x_t}{2}\right)$ であることから式 (A1) は以下

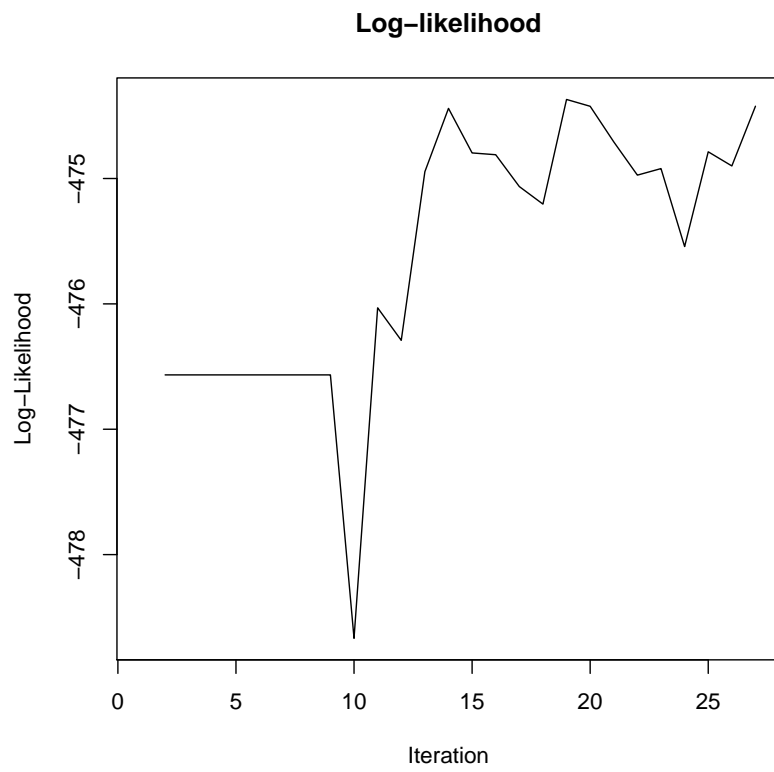


図 7: 対数尤度 (SVST モデル)

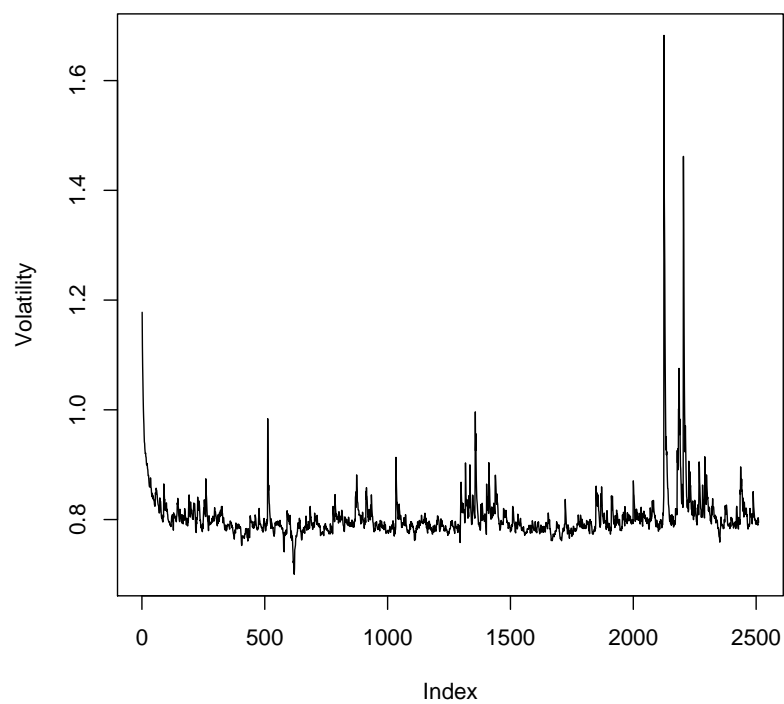


図 8: ボラティリティ (SVST モデル)

のように二つ目に表式に書き換えることができる。

$$\begin{aligned}
 x_t &= \alpha_s + \beta_s x_{t-1} + v_t, \\
 y_t &= \epsilon_t \exp\left(\frac{x_t}{2}\right),
 \end{aligned}
 \tag{A2}$$

付録 B シンプレックスの初期化

Nelder and Mead (1965) に従い初期のシンプレックス P は以下のようにして決定した。

$$\begin{aligned} P'_1 &= [0, 0, 0, \dots 0, \dots 0, 0], \\ P'_2 &= [1, 0, 0, \dots 0, \dots 0, 0], \\ P'_3 &= [0, 1, 0, \dots 0, \dots 0, 0], \\ &\vdots \\ P'_j &= [0, 0, 0, \dots 0, \dots 1, 0], \\ P'_{j+1} &= [0, 0, 0, \dots 0, \dots 0, 1], \end{aligned} \tag{B3}$$

ここで $'$ は転置を表す。

参 考 文 献

- Akaike, H. (1973) “Information theory and an extension of the maximum likelihood principle,” in B.N. Petrov and F. Casaki eds. *Proceedings of Second International Symposium on Information Theory*: Akademiai Kiado.
- Arulampalam, M., S. Maskell, N. Gordon, and T. Clapp (2002) “A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 50, pp. 174–188.
- Black, F. (1976) “Studies of Stock Market Volatility Changes,” *Proceedings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section*, pp. 177–181.
- Diebold, F. (1988) *Empirical modeling of exchange rate dynamics*, Berlin: Springer-Verlag.
- Doucet, A., N. de Freitas, and N. Gordon eds. (2001) *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, New York: Springer-Verlag.
- Fama, E. F. (1965) “The behavior of stock market prices,” *Journal of Business*, Vol. 38, pp. 34–105.
- Gordon, N., D. Salmond, and A. Smith (1993) “Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation,” *IEEE Proceedings-F*, Vol. 140, pp. 107–113.
- Higuchi, T. (1995) “On the resampling scheme in the filtering procedure of the Kitagawa Monte Carlo filter.” ISM Research Memo, No. 556.
- Hürseler, M. and H. R. Künsch (2001) “Approximating and maximizing the likelihood for a general state-space model,” in A. Doucet, N. de Freitas, and Gordon N. eds. *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, New York: Springer-Verlag, pp. 159–175.

- Jacquier, E., N. G. Polson, and P. E. Rossi (1994) “Bayesian analysis of stochastic volatility models,” *Journal of business & economic statistics*, Vol. 12, pp. 69–87.
- Kitagawa, G. (1996) “Monte Carlo filter and smoother for non-Gaussian nonlinear state space models,” *Journal of Computational and Graphical Statistics*, Vol. 5, pp. 1–25.
- (1998) “A self-organizing state-space model,” *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 93, pp. 1203–1215.
- Kitagawa, G. and W. Gersch (1996) *Smoothness Priors Analysis of Time Series*, New York: Springer-Verlag.
- 小西貞則・北川源四郎 (2004) 『情報量規準』, 予測と発見の科学, 朝倉書房, 東京.
- Liesenfeld, R. and R. C. Jung (2000) “Stochastic Volatility Models: Conditional Normality versus Heavy-Tailed Distributions,” *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 15, pp. 137–160.
- Lin, J. Y., Y. Wu, and T. S. Huang (2004) “3D model-based hand tracking using stochastic direct search method,” *Proceedings of Sixth IEEE International Conference on Automatic Face and Gesture Recognition*, pp. 693–698.
- Liu, J. and M. West (2001) “Combined parameter and state estimation in simulation-based filtering,” in A. Doucet, N. de Freitas, and N. Gordon eds. *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, New York: Springer-Verlag, pp. 197–223.
- Mandelbrot, B. (1963) “The variation of certain speculative prices,” *The Journal of Business*, Vol. 36, pp. 394–419.
- Nelder, J. A. and R. Mead (1965) “A simplex algorithm for function minimization,” *Computer Journal*, Vol. 7, pp. 308–313.
- Taylor, S. J. (1986) *Modelling Financial Time Series*, Chichester: John Wiley.
- Watanabe, T. and M. Asai (2003) “Stochastic volatility models with heavy-tailed distributions: a Bayesian analysis.” COE discussion paper series, No. 1, faculty of economics, Tokyo Metropolitan University.
- Yano, K. (2006) “The Monte Carlo particle smoothing and filter initialization based on an inverse system equation,” *Manuscript*.
- (2007) “A Self-organizing state space model and simplex initial distribution search,” *Computational Statistics*, Vol. 22. Forthcoming.
- 渡部敏明 (2000) 『ボラティリティ変動モデル』, 朝倉書店.
- (2005a) 「マルチ・ムーブ・サンプラーを用いた確率的ボラティリティ変動モデルのベイズ推定法」, 和合肇 (編) 『ベイズ計量経済分析』, 東洋経済新報社, 東京.
- (2005b) 「確率的ボラティリティ変動モデル: 分析法とモデルの発展」, 『日本大学経済科学研究紀要』, 第 35 巻, 111–133 頁.