

3 ファクター・モデルによる長期商品先物・先渡し契約の評価とヘッジ

白谷健一郎⁺

高橋明彦^{*}

福西洋介^{*}

First Version: August 31, 2007

This Version: December 3, 2007

概要

本論文では”stochastic mean-reversion”を用いた3ファクター・モデルを構築するとともに、商品先物価格の解析解を導出した。さらに、Schwartz(1997)等の金利やコンビニエンス・イールドを明示的に含むモデルとの関連について検討し、ある仮定の下において商品現物価格の変動過程のみに基づく我々のアプローチと、彼らのアプローチの対応関係を示した。

モデルには平均回帰水準を固定するタイプと固定しないタイプの2種類を用い、原油(NYMEX WTI)及び銅(LME Copper)の商品先物価格を推定し、実際に取引可能な先物価格に対する高い再現性を有することを示した。さらには、長期の先物・先渡しに対しモデルに基づき適切なヘッジポートフォリオを組むことにより、効率的なヘッジが達成できることを実証及びシミュレーション分析により確認した。

1 はじめに

複雑な形状に変化する商品先物の期間構造を推定するため、今まで様々なモデルが提案されてきた。今回我々は3ファクター・モデルによる商品先物の期間構造の推定方法を提案するとともに、そのモデルにより推定された長期の先物・先渡しに対し、実際に取引可能な中短期の先物を用いた効率的なヘッジ手法を提案・検証した。

商品に関するモデルとしては、Black (1976)が商品を配当のない株式のようにみなし、幾何ブラウン運動によりモデル化を行った。しかし商品先物の期間構造の形状は複雑で、Black (1976)により提案された単純な幾何ブラウン運動によるモデルではうまくフィットしない。その問題を解決するために考えられたのが、平均回帰性を導入する方法である。株式等と異なり、商品は価格が上昇すると一般に(ある程度のタイムラグは伴うにしろ)供給が増加し、価格が下落すると供給は減少する。価格が需給のバランスにより決定されるので、このような供給サイドの供給量の調整は商品価格が一方向に向かって動くのを抑える働きをする。このため一般的に商品価格モデルとしては平均回帰性を取り入れることが妥当であると考えられている。このことについては多くの実証研究がなされている。例えば、Bessembinder et al (1995)等がこれを検証している。

しかし、1ファクター・モデルに平均回帰性を取り入れたとしても複雑な商品先物の期間構造を表現することは難しく、Gibson - Schwartz (1990)では現物価格の変動以外にコンビニエンス・イールドを確率過程としたモデル、Schwartz (1997)ではコンビニエンス・イールドと金利を確率過程として明示的に取り入れたモデルが提案された。

一方、商品の現物価格、コンビニエンス・イールド、金利を個別にモデル化するのではなく、現物価格を平均回帰する状態変数を用いて直接モデル化する方法も提案された。Schwartz - Smith (2000)では2ファクター平均回帰モデル、Casassus - Dufresne (2005)は3ファクター平均回帰モデル、Cortazar - Naranjyo (2006)はNファクター平均回帰モデルにより、直接現物価格をモデル化している。

⁺ みずほ第一フィナンシャルテクノロジー(株)

^{*} 東京大学大学院経済学研究科

我々の提案するモデルは現物価格を 3 つの状態変数によりモデル化しており，Schwartz (1997) モデルとの関係もある仮定の下で一般的に示した．また，モデルのパラメータについてはカルマンフィルタを用いて推定することで，実際の NYMEX WTI と LME Copper の先物価格を再現できることも確認した．我々の今回の研究が他の先行研究と異なる点は，商品価格のモデルに平均回帰水準を固定した場合と，固定しない場合の双方のケースについて検討を行っており，それらのモデルに対する先物価格の再現性だけでなく，ヘッジについても詳細な分析を行っていることである．

商品のヘッジに関しては長く議論されてきたテーマであり，Culp - Miller (1995)，Mello - Parsons (1995)やその他の多くの論文が Metallgesellschaft 社の問題を通じてこのテーマを議論してきた．Culp - Miller (1995)は株式等と同様に，商品についても先渡し価格はコスト・オブ・キャリーのメカニズムによって決まることを説明し，短期先物を保有し限月を乗り換えていくことで長期先渡し契約がヘッジできると主張した．一方で Mello - Parsons (1995)は長期先渡し契約が短期先物でヘッジ可能であることは認めながら，長期先渡し契約 1 単位のヘッジを同単位の短期先物で行うような Metallgesellschaft 社のヘッジ手法については批判している．彼らは Gibson - Schwartz (1990) のモデルを用いて，短期の価格が長期の価格より現物価格の変化について感応的であることを説明し，長期先渡し契約 1 単位のヘッジに必要な短期先物は実際には 0.3 単位程度であろう，と述べている．このため Metallgesellschaft 社の行っていた取引はヘッジの要素も持つが，多くは先物による投機であったと結論付けている．また Schwartz (1997)もこの点について言及している．Schwartz (1997)では彼の 1～3 ファクター・モデルを用いてヘッジ・ポジションを計算すると，1 ファクターでは 0.2～0.4 程度の 1 よりかなり小さいポジションになり，2，3 ファクターにおいてもネットでは 1 より小さいポジションになることを説明している．

ヘッジ・ポジションだけでなくヘッジの誤差まで分析した研究としては Brenann - Crew (1997) および Buhler - Korn - Schobel (2000)がある．Brenann - Crew (1997)は 2 ファクター・モデルをヘッジで用いる際にヘッジ・ツール(hedging instrument)として様々な満期の先物を試しているが，ヘッジに用いている先物は 6 ヶ月以内であり，ヘッジ対象の先物も 2 年以内と非常に短い．Buhler - Korn - Schobel (2000)は複数のモデルをベースに 10 年の先渡し契約のヘッジを行ったときのパフォーマンスについて比較・分析を行っているが，ヘッジ・ツールに使用している先物は 2 ヶ月満期の先物と非常に短く，使用しているデータも 1996 年までのものであり，直近の商品価格の急上昇局面を織り込んだ分析とはなっていない．

本論分では，ヘッジにより生じる誤差を抑えることに主眼をおき，Metallgesellschaft 社の行っていたような，ヘッジ対象と同一単位の満期の短い先物によるヘッジを行った場合と，我々のモデルをベースにヘッジを行った場合との比較を行った．特に，我々のモデルをベースとしたヘッジでは，平均回帰水準を固定したモデルと固定しないモデルについてヘッジの安定性の検証を行うとともに，状態変数の求め方の差異によるヘッジ効率の違い，ヘッジに用いる先物限月の違いによる必要な先物単位数の差異及び，ヘッジ・シミュレーションに基づくヘッジ誤差率分布の違いについて詳細な分析を行った．また，金利要因について考慮した長期先渡し契約に関するヘッジについても時系列データを元に検証を行った．その結果，我々の提案する平均回帰水準を固定しない 3 ファクター・モデルにより先物価格を推定した場合，近年の期間構造の複雑な変化に対しても長期の先物の効率的なヘッジが可能となり，中短期の先物価格と整合的な長期の先物価格が安定的に構築できることが検証により確かめられた．

以下，第 2 章で金利やコンベニエンス・イールドを明示的には含まない 3 ファクター・モデルを提案し，そのモデルに基づく先物価格の解析解を導出すると共に，Schwartz (1997)のモデルとの対応関係を示す．第 3 章ではカルマンフィルタを用い，モデルのパラメータの推定を行う．第 4 章ではさらに中短期先物を用いて長期の先物をヘッジする手法を構築し，このヘッジ戦略を実施したときのパフォーマンスの分析を行う．第 5 章ではより実務的に，Out of Sample の場合及び，長期先渡し契約に対するヘッジについて分析を行う．第 6 章ではシミュレーションにより，先物限月の選択の違いによるヘッジ誤差率の分布がどのような形状になるかを分析する．Appendix では先物，先渡し価格に表れるモデルの期待値及び分散の式と，累積ヘッジ誤差率に関するグラフ，長期先物のヘッジに必要な満期の短い先物の単位数について記載する．

2 モデル

S_t を時点 t における商品の現物価格とする．このとき，現物価格の対数が次の形で表されるとする．

$$(数式 1) \quad \log S_t = x_t^1 + \eta_t.$$

ここで η_t は金利における Hull-White(1990)モデルのように，市場価格に一致させるための時間の関数を表す． x^1 は商品現物価格に対応する状態変数であり，次の確率微分方程式に従うとする．

$$(数式 2) \quad \begin{aligned} dx_t^1 &= \kappa(x_t^2 + x_t^3 - x_t^1)dt + \sigma_1 dW_t^1, \\ dx_t^2 &= -\gamma x_t^2 dt + \sigma_2 dW_t^2, \\ dx_t^3 &= (\alpha - \beta x_t^3)dt + \sigma_3 dW_t^3. \end{aligned}$$

x^2 は商品先物の中期と長期の価格差に対応する状態変数を表し， x^3 は期間構造の長期の部分に対応する状態変数を表している．また， W_t^i は同値マルチンゲール測度(EMM)の下での標準ブラウン運動で，互いに次の相関を持つものとする．

$$(数式 3) \quad dW_t^i \cdot dW_t^j = \rho_{ij} dt, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

パラメータ κ は x^1 の $x^2 + x^3$ への回帰するスピードを表現し， γ は x^2 の減衰するスピードを表現している． β は $\beta \neq 0$ のとき x^3 が $\frac{\alpha}{\beta}$ へ回帰するスピードを表現している．よって，直感的には $\kappa > \gamma > 0$ であれば現物価格は時間の経過とともに

$$x^1(\text{現物価格}) \rightarrow x^2 + x^3(\text{中期の価格}) \rightarrow x^3(\text{長期の価格}).$$

と推移することを表している．

各状態変数の確率微分方程式は解析的に解くことができ，次のように表される．

$$(数式 4) \quad \begin{aligned} x_t^1 &= e^{-\kappa t} x_0^1 + \frac{\kappa}{\kappa - \gamma} (e^{-\gamma t} - e^{-\kappa t}) x_0^2 + \frac{\kappa}{\kappa - \beta} (e^{-\beta t} - e^{-\kappa t}) x_0^3 \\ &\quad + \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{\kappa}{\kappa - \beta} e^{-\beta t} + \frac{\beta}{\kappa - \beta} e^{-\kappa t} \right) \\ &\quad + \sigma_1 \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dW_s^1 + \sigma_2 \frac{\kappa}{\kappa - \gamma} \int_0^t (e^{-\gamma(t-s)} - e^{-\kappa(t-s)}) dW_s^2 \\ &\quad + \sigma_3 \frac{\kappa}{\kappa - \beta} \int_0^t (e^{-\beta(t-s)} - e^{-\kappa(t-s)}) dW_s^3, \\ x_t^2 &= e^{-\gamma t} x_0^2 + \sigma_2 \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} dW_s^2, \\ x_t^3 &= e^{-\beta t} x_0^3 + \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) + \sigma_3 \int_0^t e^{-\beta(t-s)} dW_s^3. \end{aligned}$$

このとき先物価格は次のように表される．なお，以降では特に一般性を失うことなく，簡単のため $\eta_t = 0$ とおくとする．

定理 2.1 満期 T の先物の時刻 t での価格を $G_T(t)$ とすると, EMM の下で次のように表される .

$$(数式 5) \quad G_T(t) = E_t[S_T] = \exp\left\{\mu_{11}(x_t^1, x_t^2, x_t^3, T-t) + \frac{\Sigma_{11}(T-t)}{2}\right\}.$$

ここで E_t は時刻 t での条件付き期待値を表す . μ_{11}, Σ_{11} については Appendix 8.1 参照

証明 S_T は対数正規分布であることから, 正規分布に対する積率母関数の計算と同様にして求めることができる .

次にリスクの市場価格について考える . $\theta(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t), \theta_3(t))$ を各状態変数 x^1, x^2, x^3 に対するリスクの市場価格とする . このとき観測測度 P と, 同値マルチンゲール測度 Q の間には次の関係が成り立つ .

$$(数式 6) \quad W_t^Q = W_t^P + \int_0^t \theta(u) du .$$

よって測度 P の下で各状態変数の満たす確率微分方程式は以下のとおり .

$$(数式 7) \quad \begin{aligned} dx_t^1 &= \kappa(x_t^2 + x_t^3 - x_t^1)dt + \sigma_1\theta_1(t)dt + \sigma_1dW_t^{1,P}, \\ dx_t^2 &= -\gamma x_t^2dt + \sigma_2\theta_2(t)dt + \sigma_2dW_t^{2,P}, \\ dx_t^3 &= (\alpha - \beta x_t^3)dt + \sigma_3\theta_3(t)dt + \sigma_3dW_t^{3,P}. \end{aligned}$$

ここで特に $\theta(t)$ を各状態変数と時間の関数 $\theta(t, x^1, x^2, x^3)$ として

$$(数式 8) \quad \begin{aligned} \theta_1(t, x^1, x^2, x^3) &= a(x_t^2 + x_t^3 - x_t^1), \\ \theta_2(t, x^1, x^2, x^3) &= -bx_t^2, \\ \theta_3(t, x^1, x^2, x^3) &= \begin{cases} c - dx_t^3 & (\beta \neq 0) \\ c & (\beta = 0) \end{cases}, \end{aligned}$$

とおくと, 上述の確率微分方程式は

$$(数式 9) \quad \begin{aligned} dx_t^1 &= \hat{\kappa}(x_t^2 + x_t^3 - x_t^1)dt + \sigma_1dW_t^{1,P}, \\ dx_t^2 &= -\hat{\gamma}x_t^2dt + \sigma_2dW_t^{2,P}, \\ dx_t^3 &= (\hat{\alpha} - \hat{\beta}x_t^3)dt + \sigma_3dW_t^{3,P}, \end{aligned}$$

と書き換えられる . ただし

$$\hat{\kappa} = \kappa + \sigma_1a, \quad \hat{\gamma} = \gamma + \sigma_2b, \quad \hat{\alpha} = \alpha + \sigma_3c, \quad \hat{\beta} = \beta + \sigma_3d,$$

となり, リスク中立の場合と同様にパラメータの推定が行える .

さて, 商品に対するモデルは, 我々のように先物を直接モデル化しているものの他に, Schwartz (1997) のように商品先物に対し金利とコンビニエンス・イールドを明示的にモデル化したものがある . Schwartz は無裁定に基づいて商品の現物価格 S_t , コンビニエンス・イールド δ_t , 金利 r_t を EMM の下で次のようにモデル化している .

$$(数式 10) \quad \begin{aligned} dS_t &= (r_t - \delta_t)S_tdt + \sigma_S S_t dW_t^S, \\ d\delta_t &= \kappa_\delta(\theta_\delta - \delta_t)dt + \sigma_\delta dW_t^\delta, \\ dr_t &= \kappa_r(\theta_r - r_t)dt + \sigma_r dW_t^r. \end{aligned}$$

ここで W_t^i , $i = S, \delta, r$ は EMM の下での標準ブラウン運動で, 互いに次の相関を持つとする .

$$(数式 11) \quad dW_t^i \cdot dW_t^j = \rho_{ij}dt, \quad i, j = S, \delta, r.$$

このモデルでは，先物価格はコスト・オブ・キャリーによって決まり，裁定は存在しないと想定している．さらに金利が各ファクターの線型結合で表されると仮定することで，金利，コンビニエンス・イールドのプロセスと先渡し価格を整合的に導出できる．

我々のモデルにおいても金利にある仮定をおくことで，Schwartz (1997)のモデルに対応する関係を導くことができる．

定理 2.2 現物価格が前述のモデルにより表され，短期金利 r が次のような各ファクターの線型結合により表現されるものとする．

$$(数式 12) \quad r_t = \psi_0 + \psi_1 x_t^1 + \psi_2 x_t^2 + \psi_3 x_t^3.$$

このとき，金利とコンビニエンス・イールドは次のように書き表すことができる．

$$(数式 13) \quad \begin{aligned} dr_t &= (a_0 + a_1 r_t + a_2 \delta_t + a_3 \log S_t)dt + \psi_1 \sigma_1 dW_t^1 + \psi_2 \sigma_2 dW_t^2 + \psi_3 \sigma_3 dW_t^3, \\ d\delta_t &= (b_0 + b_1 r_t + b_2 \delta_t + b_3 \log S_t)dt \\ &\quad + (\psi_1 + \kappa) \sigma_1 dW_t^1 + (\psi_2 - \kappa) \sigma_2 dW_t^2 + (\psi_3 - \kappa) \sigma_3 dW_t^3. \end{aligned}$$

ただし，

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha \psi_3 + \frac{(\beta \psi_3 - \gamma \psi_2) \psi_0}{\psi_3 - \psi_2} + \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\psi_2 (\kappa \psi_1 - \beta \psi_3) - \psi_3 (\kappa \psi_1 - \gamma \psi_2)}{\kappa (\psi_3 - \psi_2)}, \\ a_1 &= \frac{-\kappa \psi_1 \psi_2 - (\gamma - \beta) \psi_2 \psi_3 + \kappa \psi_1 \psi_3 + \kappa \gamma \psi_2 - \kappa \beta \psi_3}{\kappa (\psi_3 - \psi_2)}, \\ a_2 &= \frac{\psi_2 (\kappa \psi_1 - \beta \psi_3) - \psi_3 (\kappa \psi_1 - \gamma \psi_2)}{\kappa (\psi_3 - \psi_2)}, \\ a_3 &= \frac{-\gamma \psi_1 \psi_2 + \beta \psi_1 \psi_3 + (\beta - \gamma) \psi_2 \psi_3}{\psi_3 - \psi_2}, \\ b_0 &= \alpha (\psi_3 - \kappa) + \frac{\{\kappa (\gamma - \beta) + (\beta \psi_3 - \gamma \psi_2)\} \psi_0}{\psi_3 - \psi_2} \\ &\quad + \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\psi_2 \{\kappa (\psi_1 + \kappa) - \beta (\psi_3 - \kappa)\} - \psi_3 \{\kappa (\psi_1 + \kappa) - \gamma (\psi_2 - \kappa)\}}{\kappa (\psi_3 - \psi_2)}, \\ b_1 &= \frac{-\kappa \psi_1 \psi_2 - (\gamma - \beta) \psi_2 \psi_3 + \kappa \psi_1 \psi_3 - \kappa (\kappa - \gamma + \beta) \psi_2 + \kappa (\kappa + \gamma - \beta) \psi_3 - \kappa^2 (\gamma - \beta)}{\kappa (\psi_3 - \psi_2)}, \\ b_2 &= \frac{\psi_2 \{\kappa (\psi_1 + \kappa) - \beta (\psi_3 - \kappa)\} - \psi_3 \{\kappa (\psi_1 + \kappa) - \gamma (\psi_2 - \kappa)\}}{\kappa (\psi_3 - \psi_2)}, \\ b_3 &= \frac{-\gamma \psi_1 \psi_2 + \beta \psi_1 \psi_3 + (\beta - \gamma) \psi_2 \psi_3 - \kappa (\beta - \gamma) \psi_1 - \kappa \beta \psi_2 + \kappa \gamma \psi_3}{\psi_3 - \psi_2}. \end{aligned}$$

証明 (数式 10)の第 1 式に(数式 12)を代入し $\log S$ に対し伊藤の公式を適用したものと，(数式 2)の第 1 式は同じものを表している．よって係数を比較することで次を得る．

$$\begin{aligned} \delta_t &= r_t - \kappa (x_2 + x_3 - x_1) - \frac{\sigma_S^2}{2} = \psi_0 + \psi_1 x_t^1 + \psi_2 x_t^2 + \psi_3 x_t^3 - \kappa (x_2 + x_3 - x_1) - \frac{\sigma_S^2}{2}, \\ \sigma_S &= \sigma_1, \quad W^1 = W^S. \end{aligned}$$

さらに(数式 2)を用いることで $dr_t, d\delta_t$ のドリフト項は x^1, x^2, x^3 の関数で表現される．ここで $r, \delta, \log S$ は x^1, x^2, x^3 の線型結合として表されているので， $dr_t, d\delta_t$ の式中の x^1, x^2, x^3 を $r, \delta, \log S$ により表現しなおすことで(数式 13)が導かれる．

系 2.1 金利が次のように表されたとする .

$$(数式 14) \quad r_t = \psi_0 + \psi_2 x_t^2 .$$

つまり , 定理 2.2 の式において $\psi_1 = \psi_3 = 0$ と仮定する . このとき金利とコンビニエンス・イールドは次のように決まる .

$$(数式 15) \quad \begin{aligned} dr_t &= \gamma(\psi_0 - r_t)dt + \psi_2 \sigma_2 dW_t^2, \\ d\delta_t &= (\kappa_0^\delta + \kappa_r^\delta r_t + \kappa_\delta^\delta \delta_t + \kappa_x^\delta x_t)dt + \kappa \sigma_1 dW_t^1 + (\psi_2 - \kappa) \sigma_2 dW_t^2 - \kappa \sigma_3 dW_t^3 . \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} \kappa_0^\delta &= \psi_0 \left(\gamma - \frac{\kappa(\gamma - \beta)}{\psi_2} \right) - \kappa \alpha - \frac{1}{2} \sigma_1^2 (\kappa + \beta), \\ \kappa_r^\delta &= \kappa + \left(1 - \frac{\kappa}{\psi_2} \right) (\beta - \gamma), \quad \kappa_\delta^\delta = -\kappa - \beta, \quad \kappa_x^\delta = \kappa \beta . \end{aligned}$$

また , この r_t 及び δ_t は , $\beta = 0$, $\psi_2 = \frac{\kappa \gamma}{\gamma - \kappa}$ と置けば , Schwartz(1997)の 3 ファクター・モデルに対応する .

注意 2.1 系 2.1 は Casassus – Dufresne (2005) Proposition 1 の結果に対応している .

注意 2.2 前述の議論において $\beta = 0$ の場合においては , 極限をとることで解析的な表現を得ることが出来る . また , $\beta = 0$ の場合 , x^3 の平均回帰水準が固定されないため , モデル自体が最終的な回帰水準を持たなくなる . 以降では $\beta \neq 0$ の場合を「回帰モデル」 , $\beta = 0$ の場合を「非回帰モデル」と呼ぶこととする .

3 パラメータの推定

モデルにおける各パラメータの推定を行う .

v_n, w_n を平均 0 , 分散 1 の白色雑音とすると , 前述のモデルは次のシステムモデル及び観測モデルで表現できる .

・システムモデル

$$\begin{aligned} x_n &= F_n x_{n-1} + Q_n v_n + C_n^x, \\ x_n &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad F_n = \begin{pmatrix} e^{-\hat{\kappa}\Delta t} & \frac{\hat{\kappa}}{\hat{\kappa} - \hat{\gamma}} \{ e^{-\hat{\gamma}\Delta t} - e^{-\hat{\kappa}\Delta t} \} & \frac{\hat{\kappa}}{\hat{\kappa} - \hat{\beta}} \{ e^{-\hat{\beta}\Delta t} - e^{-\hat{\kappa}\Delta t} \} \\ 0 & e^{-\hat{\gamma}\Delta t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\hat{\beta}\Delta t} \end{pmatrix}, \\ E[Q_n] &= 0, \quad G_n = \text{Cov}[Q_n] = (\Sigma_{ij}(\Delta t)), \quad C_n^x = \begin{pmatrix} \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} \left\{ 1 - \frac{\hat{\kappa} e^{-\hat{\beta}\Delta t} - \hat{\beta} e^{-\hat{\kappa}\Delta t}}{\hat{\kappa} - \hat{\beta}} \right\} \\ 0 \\ \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} \{ 1 - e^{-\hat{\beta}\Delta t} \} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\Sigma_{ij}(\Delta t)$ は共分散を表す . 具体的な式は Appendix 8.1 参照 .

・観測モデル

$$y_n = H_n x_n + R_n w_n + C_n^y,$$

$$y_n = \begin{pmatrix} \log G_{T_{1_n}}(0) \\ \vdots \\ \log G_{T_{m_n}}(0) \end{pmatrix}, \quad H_n = \begin{pmatrix} e^{-\kappa T_{1_n}} & \frac{\kappa}{\kappa - \gamma} \left\{ e^{-\gamma T_{1_n}} - e^{-\kappa T_{1_n}} \right\} & \frac{\kappa}{\kappa - \beta} \left\{ e^{-\beta T_{1_n}} - e^{-\kappa T_{1_n}} \right\} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{-\kappa T_{m_n}} & \frac{\kappa}{\kappa - \gamma} \left\{ e^{-\gamma T_{m_n}} - e^{-\kappa T_{m_n}} \right\} & \frac{\kappa}{\kappa - \beta} \left\{ e^{-\beta T_{m_n}} - e^{-\kappa T_{m_n}} \right\} \end{pmatrix},$$

$$R_n = \begin{pmatrix} h_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_m \end{pmatrix}, \quad C_n^y = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma_{11}(T_{1_n})}{2} + \frac{\alpha}{\beta} \left\{ 1 - e^{-\kappa T_{1_n}} - \frac{\kappa}{\kappa - \beta} \left\{ e^{-\beta T_{1_n}} - e^{-\kappa T_{1_n}} \right\} \right\} \\ \vdots \\ \frac{\Sigma_{11}(T_{m_n})}{2} + \frac{\alpha}{\beta} \left\{ 1 - e^{-\kappa T_{m_n}} - \frac{\kappa}{\kappa - \beta} \left\{ e^{-\beta T_{m_n}} - e^{-\kappa T_{m_n}} \right\} \right\} \end{pmatrix}.$$

R_n は観測誤差を表しており，計算量を勘案し，各満期の先物に対する観測誤差は独立であると仮定している．この状態空間表現に対しカルマンフィルタを用いパラメータを推定する．具体的には次の一期先予測とフィルタを交互に繰り返し，得られる対数尤度が最大となるようなパラメータ集合 $\mathcal{G}$ を求める．

[一期先予測]

$$x_{n|n-1} = F_n x_{n-1|n-1} + C_n^x,$$

$$V_{n|n-1} = F_n V_{n-1|n-1} F_n^t + G_n.$$

[フィルタ]

$$d_{n|n-1} = H_n V_{n|n-1} H_n^t + R_n,$$

$$K_n = V_{n|n-1} H_n^t d_{n|n-1}^{-1},$$

$$x_{n|n} = x_{n|n-1} + K_n (y_n - H_n x_{n|n-1} - C_n^y),$$

$$V_{n|n} = (I - K_n H_n) V_{n|n-1}.$$

[対数尤度]

$$l(\mathcal{G}) = -\frac{1}{2} \left\{ mN \log(2\pi) + \sum_{n=1}^N \log |\det(d_{n|n-1})| + \sum_{n=1}^N u_n^t d_{n|n-1}^{-1} u_n \right\},$$

$$u_n = y_n - H_n x_{n|n-1} - C_n^y.$$

ここで x と V の初期値として最適な値を設定していなくても，カルマンフィルタにより計算が進むにつれ，それぞれ適切な値へ近づいていくことから，パラメータ推定時には数ステップ分のデータを尤度計算に用いず破棄することで，初期値の問題を回避する．

3.1 推定結果

上記手順により回帰モデルと非回帰モデルのパラメータ推定を行った．推定に用いたデータは以下のとおり．

・NYMEX WTI

1997 年 1 月～2002 年 10 月及び 1997 年 1 月～2006 年 11 月までの 5 営業日毎のデータを用い，先物限月は直近のものから Front Month(直近限月)，1 番目の DEC，2 番目の DEC，3 番目の DEC，4 番目の DEC，5 番目の DEC，6 番目の DEC，7 番目の DEC を使用．Front Month = 1 番目の DEC の場合 Front Month として使用する．

・LME Copper

2002 年 9 月～2004 年 11 月及び 2002 年 9 月～2006 年 12 月までの 5 営業日毎のデータを用い，

先物限月は直近のものから Front Month, 1 番目の DEC, 2 番目の DEC, 3 番目の DEC, 4 番目の DEC, 5 番目の DEC, 6 番目の DEC を使用．ただし，Front Month = 1 番目の DEC の場合 Front Month として使用する．

上記データを用いて得られたパラメータと観測誤差は下の表のとおり．

■ 回帰モデル

パラメータ

WTI	κ	γ	α	β	a	b	c	d	σ_1	σ_2	σ_3	ρ_{12}	ρ_{23}	ρ_{31}
-Nov/2006	1.112	0.279	0.004	0.005	0.000	0.000	0.544	0.000	0.367	0.139	0.196	0.083	-0.603	0.378
-Oct/2002	1.107	0.293	0.311	0.110	0.597	0.000	0.070	0.017	0.371	0.374	0.399	-0.173	-0.983	0.352
Copper	κ	γ	α	β	a	b	c	d	σ_1	σ_2	σ_3	ρ_{12}	ρ_{23}	ρ_{31}
-Dec/2006	0.758	0.218	0.274	0.044	0.000	0.000	0.146	0.000	0.260	0.453	0.480	0.103	-0.871	0.293
-Nov/2004	0.918	0.143	0.036	0.007	0.000	1.720	0.079	0.000	0.224	0.317	0.319	0.368	-0.840	0.130

観測誤差

WTI	Front Month	1stDec	2ndDec	3rdDec	4thDec	5thDec	6thDec	7thDec
-Nov/2006	0.0019	1E-12	4.702E-05	1.822E-06	2.233E-05	1.152E-05	1E-12	1.543E-05
-Oct/2002	0.0022	1E-12	4.093E-05	6.512E-06	1.682E-05	4.188E-06	2.274E-06	1.331E-05
Copper	Front Month	1stDec	2ndDec	3rdDec	4thDec	5thDec	6thDec	
-Dec/2006	1E-11	4.84E-05	8.828E-06	2.932E-05	1E-11	0.0001	8.916E-05	
-Nov/2004	1E-11	3.671E-05	2.135E-06	1.225E-05	1.123E-05	2.695E-06	6.084E-05	

■ 非回帰モデル

パラメータ

WTI	κ	γ	α	a	b	c	σ_1	σ_2	σ_3	ρ_{12}	ρ_{23}	ρ_{31}
-Nov/2006	1.086	0.262	-0.010	0.000	0.000	0.550	0.364	0.134	0.192	0.098	-0.577	0.371
-Oct/2002	1.048	0.253	-0.007	0.529	0.000	0.063	0.363	0.138	0.182	0.192	-0.619	0.261
Copper	κ	γ	α	a	b	c	σ_1	σ_2	σ_3	ρ_{12}	ρ_{23}	ρ_{31}
-Dec/2006	0.746	0.188	-0.048	0.000	0.000	0.189	0.260	0.374	0.379	0.255	-0.798	0.240
-Nov/2004	0.930	0.153	-0.014	0.000	2.044	0.096	0.224	0.287	0.287	0.402	-0.801	0.155

観測誤差

WTI	Front Month	1stDec	2ndDec	3rdDec	4thDec	5thDec	6thDec	7thDec
-Nov/2006	0.002	1E-12	4.724E-05	2.334E-06	2.263E-05	1.138E-05	1E-12	1.574E-05
-Oct/2002	0.002	1E-12	4.811E-05	6.074E-06	2.731E-05	1.033E-05	1E-12	1.372E-05
Copper	Front Month	1stDec	2ndDec	3rdDec	4thDec	5thDec	6thDec	
-Dec/2006	1E-11	4.874E-05	9.576E-06	2.878E-05	1E-11	0.0001	8.073E-05	
-Nov/2004	1E-11	3.647E-05	2.2E-06	1.224E-05	1.108E-05	2.742E-06	6.025E-05	

回帰モデルの場合，WTI の 2002 年までのデータを用いた推定においては $\beta > 0.1$ となっており， x^3 の平均回帰性が見られるが，それ以外の期間においては WTI, Copper 共に β がほとんど 0 であることから， x^3 は平均回帰性を持って変動するのではなく，ランダムウォークのように変動していることがわかる．

Copper のパラメータは 2004 年までのデータを用いたものと，2006 年までのデータを用いたも

のとで大きく異なっているが，これは 2004 年までのデータで推定を行った場合，2 年強のデータしか使用していないことで，その 2 年に最適化された偏ったパラメータが算出されていると考えられる．

リスクの市場価格は，WTI においては 2002 年までのデータで推定した場合パラメータ a に大きく表れ，Copper においては 2004 年までのデータで推定した場合パラメータ b に大きく表れていた．しかし WTI, Copper ともに 2006 年までのデータを使って推定した場合にはパラメータ c のみに表れていた．

3.2 実データとの比較

2006 年までのデータを用いカルマンフィルタで推測された各状態変数が，NYMEX の WTI，LME の Copper の価格とどの程度相関があるのか検証を行う．

各状態変数は第 2 章で説明したように，先物の期間構造と対応付けることができる．今回，各状態変数が以下の表のように対応すると想定し，相関がどの程度あるのかを分析した．

	WTI	Copper
x^1	Front Month	Front Month
x^2	3rd DEC - 6th DEC	2nd DEC - 5th DEC
x^3	6th DEC	5th DEC

状態変数と，対数価格の 5 営業日毎の差分から計算された相関を表にまとめた．

	回帰モデル		非回帰モデル	
	WTI	Copper	WTI	Copper
x^1	0.922	0.996	0.924	0.996
x^2	0.917	0.913	0.910	0.908
x^3	0.983	0.857	0.980	0.826

WTI, Copper ともに概ね高い相関を有しており，状態変数が実データとほぼ対応した動きをしていることがわかる．

4 先物に対するヘッジ手法

この節では長期先物契約 1 単位の取引に対するヘッジ戦略の構築方法を，特に，我々の 3 ファクター・モデルをこのテーマにいかに関用するかという観点から示す．

先物価格を表す式は，状態変数 x^1, x^2, x^3 を用いて表現されており，(パラメータが変化しない場合)この状態変数が変化することで先物価格の形状が変化する．よって，長期先物価格における各状態変数のデルタを計算し，満期の短い先物でそのデルタを打ち消すポジション

$\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$ を構成することにより，理論上は長期先物価格の変動をヘッジすることができる．

ヘッジすべきファクターの数は 3 つなので，このヘッジポートフォリオを構成するには 3 つの満期の異なる先物が必要となる． $G_{T_1}(t), G_{T_2}(t), G_{T_3}(t)$ をそれぞれ満期の異なる満期の短い先物の価格とし， $G_{T_4}(t)$ をヘッジ対象の長期先物価格とする．このとき Φ は次の連立方程式の解として得られる．

$$A\Phi = b.$$

ただし

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_{T_1}(t)}{\partial x_1} & \frac{\partial G_{T_2}(t)}{\partial x_1} & \frac{\partial G_{T_3}(t)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial G_{T_1}(t)}{\partial x_2} & \frac{\partial G_{T_2}(t)}{\partial x_2} & \frac{\partial G_{T_3}(t)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial G_{T_1}(t)}{\partial x_3} & \frac{\partial G_{T_2}(t)}{\partial x_3} & \frac{\partial G_{T_3}(t)}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_{T_4}(t)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial G_{T_4}(t)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial G_{T_4}(t)}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

このようにして求められたヘッジポートフォリオによるヘッジを「デルタヘッジ」と呼ぶ。時系列データを当てはめた場合、このヘッジポートフォリオを用いると、どの程度のヘッジ誤差率でヘッジが可能かを検証する。なお、ヘッジ誤差率とはヘッジ開始時点におけるヘッジ対象の価格で最終的な累積ヘッジ誤差額を割った誤差率を表すとする。

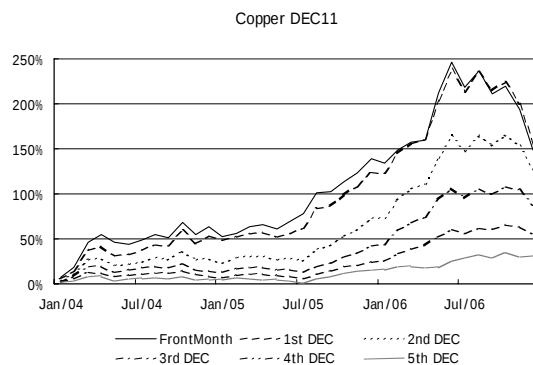
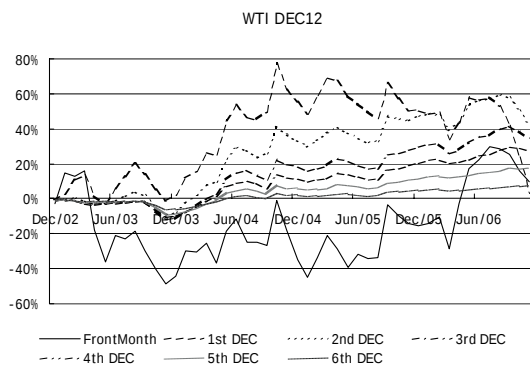
比較として Metallgesellschaft 社が行っていたような、ヘッジ対象先物より満期の短い同一単位の先物を保有することによるヘッジについてのヘッジ誤差率についても示す。このヘッジ方法を以降では「パラレルヘッジ」と呼ぶことにする。Metallgesellschaft 社は長期先物に対し、1～3 限月の非常に短期の先物でヘッジを行っていたが、現在の商品先物市場は中期程度まで流動性が高まってきているため、ここでは WTI については 6 年の先物まで、Copper については 5 年先の先物までを使用し、パラレルヘッジの効率を検証する。

以降の検証では特に断りのない限りヘッジ対象先物には WTI が直近から 10 番目の DEC の先物、Copper が 8 番の DEC の先物とする。また、ヘッジ期間は WTI に関しては 6 番目の DEC の先物で反対売買をすることによりポジションを閉じることを想定する。つまり、ヘッジ対象が残存 10 年から 6 年になるまでの 4 年間ヘッジを行うものとする。Copper は 5 番目の DEC の先物で反対売買をすることでポジションを閉じることを想定し、ヘッジ対象先物の残存 8 年から 5 年までの 3 年間ヘッジを行うものとする。パラレルヘッジではヘッジに用いる資産として上場されている DEC の先物を用いる。また、デルタヘッジでは直近から WTI が 1, 3, 6 番目の DEC、Copper が 1, 2, 5 番目の DEC とし、各先物限月のポジションは 1 ヶ月毎にヘッジ比率の見直しを行い、月初第 1 営業日にポジションの調整を行う。また、パラレルヘッジ、デルタヘッジともに 1 年経過する毎に次の年の同じ月へと限月の乗り換え(以降「ロール」と呼ぶ)を繰り返すものとする。(例えば、DEC12 を DEC06 のポジションでヘッジし始めた場合、1 年経過した段階でヘッジに使用している DEC06 を DEC07 に乗り換えてヘッジを行う。) 期先の先物ほど流動性は低下するが、DEC の先物の流動性は相対的に高く、また、ヘッジ比率の組換え頻度の低さとヘッジに必要な単位数の変化の小ささを考えれば、現実的なヘッジといえる。なお、これらの先物限月の選択は、第 6 章のヘッジ誤差率が小さくなる組み合わせを用いている。

4.1 パラレルヘッジによるヘッジ誤差率

最初に、パラレルヘッジを行った場合、どの程度のヘッジ誤差率が現れるかについて検証を行った。ヘッジ対象の先物限月における価格は、回帰モデルをベースに 2006 年までのデータをもとにカルマンフィルタにより推定されたパラメータと状態変数を用いて算出した。

次のグラフは WTI と Copper の時系列データを用いて累積ヘッジ誤差率(ヘッジ開始時点におけるヘッジ対象の価格でその時点までの累積ヘッジ誤差額を割った誤差率)を計測したものである。ここで、FrontMonth は直近限月を毎月ロールするパラレルヘッジの累積ヘッジ誤差率を表し、それ以外は各年の DEC を用いて 1 年ロールでパラレルヘッジを行った場合の累積ヘッジ誤差率を表している。ヘッジ対象先物は WTI が DEC12、Copper が DEC11 とし、ヘッジ終了年は直近の 2006 年としている。横軸はヘッジ開始時点からの時間の経過を表しており、縦軸はその時点までの累積ヘッジ誤差率を表している。なお、Appendix 8.3 - 8.6 及び本文中のグラフに関してもこれと同様の表記を用いている。



このグラフより，どちらもできるだけ期先の先物を用いてヘッジを行った方が誤差は小さいことがわかる．また，Copper の方が WTI に比べヘッジ誤差率は大きく，Copper の期間構造は平行に変化する成分が WTI に比べ小さいことがわかる．しかし，平行ヘッジではヘッジ誤差率の小さい最も期先の先物を用いた場合であっても WTI で約 8%，Copper で約 30%のヘッジ誤差率が観測された．

4.2 デルタヘッジによるヘッジ誤差率

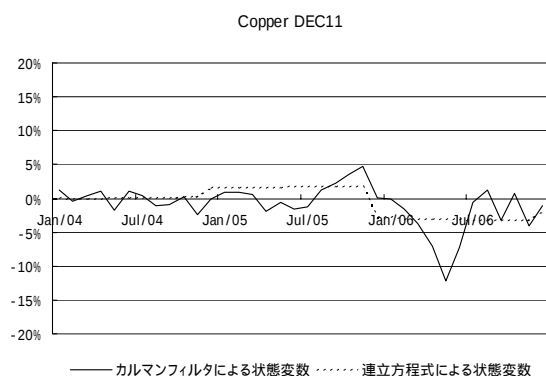
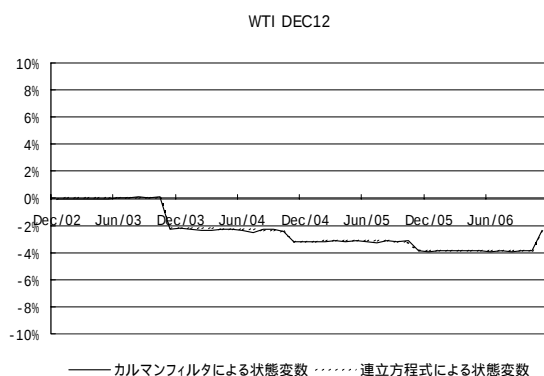
次に，回帰モデル，非回帰モデルに対しデルタヘッジを行った場合のヘッジ誤差率を計測した．

各モデルとも 2006 年までのデータより推定したパラメータを用い，長期先物価格を推定するための状態変数は 2 つの方法により推定したものについて検証を行う．ひとつはカルマンフィルタにより推定された状態変数(以降「カルマンフィルタによる状態変数」と呼ぶ)，もうひとつはヘッジに用いる先物限月の先物価格と，モデルの先物価格が一致するように状態変数に関する連立一次方程式を作成し，それを解くことで求めた状態変数(以降「連立方程式による状態変数」と呼ぶ)を用いる．以降の検証ではモデルによるヘッジの精度を相対的に比較するため，平行ヘッジの中で精度の良かった最も期先の先物を用いた平行ヘッジの結果も同一の表に記載する．

ヘッジ対象先物を変えて検証を行い，得られたヘッジ誤差率を表に纏めた．

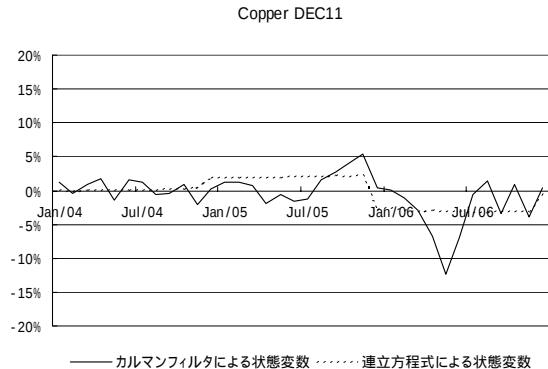
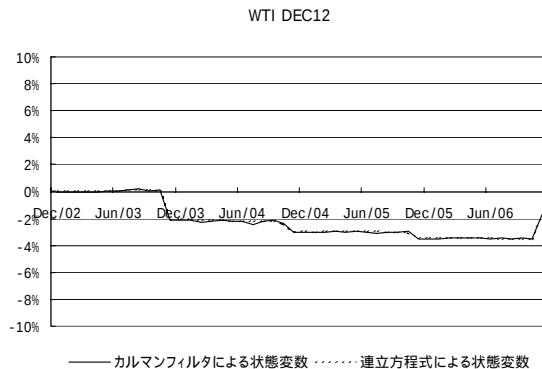
■ 回帰モデルのヘッジ誤差率

		WTI						Copper	
		DEC07	DEC08	DEC09	DEC10	DEC11	DEC12	DEC10	DEC11
カルマンフィルタ による状態変数	デルタヘッジ	0.5%	1.2%	0.6%	-0.5%	-1.3%	-2.3%	-1.9%	-1.0%
	平行ヘッジ	3.9%	8.2%	3.3%	-3.4%	2.6%	7.8%	11.8%	30.1%
連立方程式 による状態変数	デルタヘッジ	0.5%	1.1%	0.6%	-0.5%	-1.4%	-2.3%	-2.3%	-1.9%
	平行ヘッジ	3.9%	8.2%	3.3%	-3.4%	2.5%	7.9%	12.1%	30.6%



■ 非回帰モデルのヘッジ誤差率

		WTI						Copper	
	ヘッジ対象先物	DEC07	DEC08	DEC09	DEC10	DEC11	DEC12	DEC10	DEC11
カルマンフィルタ による状態変数	デルタヘッジ	0.2%	0.8%	0.4%	-0.4%	-0.7%	-1.7%	-1.3%	0.5%
	パラレルヘッジ	3.8%	8.2%	3.1%	-4.0%	2.3%	7.8%	12.2%	30.3%
連立方程式 による状態変数	デルタヘッジ	0.2%	0.8%	0.4%	-0.4%	-0.9%	-1.7%	-1.9%	-0.5%
	パラレルヘッジ	3.8%	8.2%	3.1%	-4.0%	2.2%	7.8%	12.5%	30.8%



上記グラフ以外のヘッジ対象先物における累積ヘッジ誤差率に関するグラフは、カルマンフィルタによる状態変数と連立方程式による状態変数と別々に分け、Appendix 8.3, 8.4 に掲載した。

パラレルヘッジは、期間構造全体がパラレルに変化する場合にはヘッジができていたものの、期間構造の形状が変化した場合に大きくヘッジ誤差が発生しているのに対し、デルタヘッジは単純なパラレルヘッジに比べ、非常に安定した結果となっていることがわかる。

デルタヘッジを行った場合、カルマンフィルタによる状態変数と、連立方程式による状態変数とでは、Copper に関してはカルマンフィルタにより状態変数を推定した場合、上記グラフにあるように、ヘッジ期間中に大きくヘッジ誤差が表れることがあった。これはヘッジに用いる資産価格とヘッジ対象の資産の価格が一致するように求められているかどうかの違いによるものと考えられる。連立方程式による状態変数を用いた場合、モデル価格は(ロールのタイミングを除き)ヘッジに用いる資産価格とヘッジ対象の資産価格に一致する。一方、カルマンフィルタによる状態変数を用いた場合は、ヘッジ対象はモデル価格であるのに対し、ヘッジに用いる資産の実際の価格はモデル価格から外れているため、ヘッジを行った際にヘッジ誤差が生じる。WTI はヘッジに用いている先物限月の観測誤差が小さく、連立方程式による状態変数とほぼ等しいため、状態変数の決め方による違いが小さい。

これらの結果より、以降では WTI, Copper とともに連立方程式による状態変数を用いた場合のみ検証を行うこととする。

5 ヘッジの安定性

これまでの検証は全てヘッジ期間も含んだデータを元にパラメータの推定を行っていた。しかし、実際にはパラメータ推定期間とヘッジ期間は異なる。また、これまで長期先物をターゲットにヘッジを組み立てているが、一般に長期の契約は先物ではなく先渡しとなるため、金利要因についても考慮する必要がある。

ここでは実際に近い状態で検証を行うため、次の設定について確認する。

1. パラメータの推定期間と、ヘッジ期間を重複させない場合について

Copper に関しては時系列データの制約から、一部の期間が重複する。

2. 先渡しに対するヘッジについて.

以降、パラメータ推定期間にヘッジ期間が完全に含まれている場合のことを「In Sample」、パラメータ推定期間とヘッジ期間が分かれている場合のことを「Out of Sample」と呼ぶこととする。

5.1 Out of Sample でのヘッジ

この節では Out of Sample でのヘッジ効率について検証を行うため、パラメータは3章で推定したもののうち、WTI が 2002 年までのデータから推定したもの、Copper が 2004 年までのデータから推定したものを用いる。また、ヘッジ対象先物は WTI が DEC12(ヘッジ期間は 2002 年から 2006 年)、Copper が DEC11(ヘッジ期間は 2003 年から 2006 年)とする。

Copper は一部パラメータ推定期間と、ヘッジ・シミュレーションの期間が重複しているが、Copper の時系列データは 2002 年 9 月からのデータとなるため、ヘッジ期間を 3 年と考えた場合、完全に Out of Sample でパラメータを推定しようとする、1 年強のデータでパラメータを推定しなければならない。しかし、1 年分のデータで推定されたパラメータは非常に不安定であるため、Copper に関しては、2004 年 11 月分までのデータを用いパラメータを推定し、2003 年 12 月から 2006 年 12 月までヘッジを行うものとする。

これらパラメータを用い、モデルにより推定された長期の先物価格をヘッジした際のヘッジ誤差率について、時系列データを用いて検証を行い、結果を表にまとめた。比較用として、前章で計測した In Sample での結果についても同一の表に掲載している。

	回帰モデル		非回帰モデル	
	In Sample	Out of Sample	In Sample	Out of Sample
WTI	-2.3%	-34.2%	-1.7%	-1.5%
Copper	-1.9%	-2.5%	-0.5%	-1.9%

これら結果に対する累積ヘッジ誤差率のグラフは Appendix 8.5 参照。

回帰モデルの場合、Out of Sample の WTI においては、2003 年以降の原油価格の急騰時に長期の価格水準が変化し、平均回帰性がほぼなくなっているのにも関わらず、モデルにより算出された長期の先物価格は 2002 年までのデータで見られた平均水準へ回帰してしまい、ヘッジ誤差率が大きくなってしまっていた。Copper に関しては平均回帰性が小さかったこともあり、回帰モデルにおいても大きな影響はなかった。

非回帰モデルの場合、WTI のパラメータ推定期間の違いによるヘッジ誤差率の違いはそれほど大きくないことが確認できた。Copper に関しては、In Sample と Out of Sample で得られたパラメータが異なっていたこともあり、ヘッジ誤差率が In Sample と Out of Sample で異なっていた。しかし、Out of Sample での誤差率は若干大きくなるものの、極端に誤差が発生するわけではないため、最尤法により得られたパラメータが異なったものであったとしても、モデルによるヘッジは比較的安定的であると考えられる。

このことから、回帰モデルでは回帰水準の変化等があった場合にヘッジ誤差が発生し易いと考えられるため、ヘッジを前提に価格を考える場合、非回帰モデルを用いた方がよいと考えられる。

この結果を踏まえ、以下の検証では非回帰モデルの場合のみを扱うこととする。

5.2 長期先渡し契約の先物でのヘッジ

これまでの検証は全て先物に対するヘッジを考えていたが、実際には取引所で取引されていない長期の部分に関しては、一般に先渡しでの取引となる。金利が確定的、もしくは原資産の変動と独立であれば先物と先渡しの価格は一致するが、金利が確定的でない場合には、金利の変動を考慮しなければヘッジを行うことが出来ない。

ヘッジを単純化するため金利と原資産が独立に推移するものと考え、ヘッジ対象が先渡し、ヘッジに用いる資産が先物の場合にどのようにヘッジするかについて述べ、時系列データを用いてヘッジの有効性を検証する。ここでは以下の手順でヘッジを考える。

ヘッジ対象の長期先渡しと同じ満期の長期先物とゼロクーポン債によりヘッジを行う。
で用いた長期先物を4章と同様に満期の短い先物でデルタデルタヘッジを行う。

については4章で説明しているため、の手順について説明する。
記号を以下のように定義する。

$F_T(t)$: 満期 T の先渡しの時刻 t での価格。

$G_T(t)$: 満期 T の先物の時刻 t での価格。

$P_T(t)$: 満期 T のゼロクーポン債の時刻 t での価格。

また $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$ とする。このとき、時刻 t_i から t_{i+1} までの期間における先渡し損益の時刻 T での変化額は以下のとおり。

$$(数式 16) \quad (F_T(t_{i+1}) - F_T(0)) - (F_T(t_i) - F_T(0)) = F_T(t_{i+1}) - F_T(t_i).$$

また、時刻 t_{i+1} における PV は $(F_T(t_{i+1}) - F_T(0))P_T(t_{i+1})$ と表される。よって、先渡しの t_i から t_{i+1} までの期間における PV の変化額は以下のとおり。

$$(数式 17) \quad (F_T(t_{i+1}) - F_T(0))P_T(t_{i+1}) - (F_T(t_i) - F_T(0))P_T(t_i).$$

このとき(数式 17)は以下のように変形できる。

$$(数式 18) \quad \begin{aligned} & (F_T(t_{i+1}) - F_T(0))P_T(t_{i+1}) - (F_T(t_i) - F_T(0))P_T(t_i) \\ &= (F_T(t_{i+1}) - F_T(t_i))P_T(t_i) + (F_T(t_i) - F_T(0))(P_T(t_{i+1}) - P_T(t_i)) + \Delta c_i. \end{aligned}$$

Δc_i は期間 $[t_i, t_{i+1}]$ における二次変分を表す。さらに、 Δc_i を時刻 T まで累積した場合の評価額 ΔC_m は

$$\Delta C_m \approx \sum_{j=0}^{m-1} e^{\sum_{i=j+1}^{m-1} r_i(t_{i+1}-t_i)} \Delta c_j = \sum_{j=0}^{m-1} e^{\sum_{i=j+1}^{m-1} r_i(t_{i+1}-t_i)} \{F_T(t_{j+1}) - F_T(t_j)\} \{P_T(t_{j+1}) - P_T(t_j)\},$$

と近似できる。ここで期間 $[t_i, t_{i+1}]$ における短期金利を定数 r_i により近似している。 ΔC_m は2次変分に相当する誤差とその運用・調達コストにより生じる誤差の金額の総計を表しているおり、それらは微小と考えられるため、以降無視することにする。

金利が原資産価格と独立と仮定すると、先渡しの価格と先物の価格は等しくなる

$(F_T(t) = G_T(t))$ ため、(数式 18)は次のように表される。

$$(数式 19) \quad \begin{aligned} & (F_T(t_{i+1}) - F_T(t_i))P_T(t_i) + (F_T(t_i) - F_T(0))(P_T(t_{i+1}) - P_T(t_i)) \\ &= (G_T(t_{i+1}) - G_T(t_i))P_T(t_i) + (G_T(t_i) - G_T(0))(P_T(t_{i+1}) - P_T(t_i)). \end{aligned}$$

この右辺第1項の先物の変化に対し、4章と同様の方法を用いてより満期の短い3つの限月の先物でデルタヘッジを行う。以上により、1単位の先渡しは以下の先物とゼロクーポン債のポートフォリオにより近似的にヘッジできる。

$P_T(t)$ 単位の先物 $G_T(t)$ に対し、より満期の短い3つの限月の先物を用いデルタヘッジ

を行う．

$G_T(t) - G_T(0)$ 単位のゼロクーポン債 $P_T(t)$ を購入する．

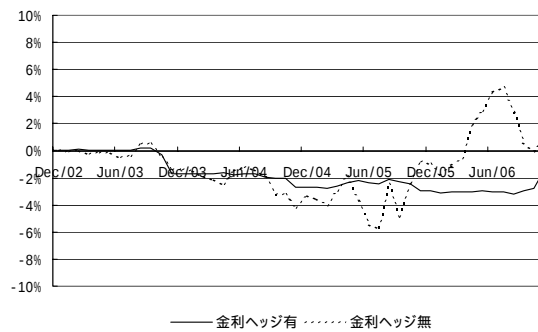
次に，上記手法により WTI の先渡し契約を WTI の先物とゼロクーポン債でヘッジを行った場合のヘッジ誤差率について分析を行う．なお，ゼロクーポン債の購入及び先物の値洗いにより発生するキャッシュフローは全て，短期金利により運用・調達を行うものとする．

検証の際，パラメータは In Sample のものを用い，簡単のためゼロクーポン債の計算には 8 年のスワップレートを，運用・調達用の短期金利には 1M LIBOR をスポットイールドとして用いた．

ヘッジ対象先渡しの違いによるヘッジ誤差率は以下の表のとおり．

ヘッジ対象先渡し	DEC07	DEC08	DEC09	DEC10	DEC11	DEC12
金利ヘッジ有	-0.1%	0.7%	0.4%	-0.5%	-0.9%	-1.4%
金利ヘッジ無	-0.8%	-1.2%	-1.9%	-5.9%	0.1%	1.0%

WTI DEC12



上記グラフ以外のヘッジ対象先渡しに対する累積ヘッジ誤差率のグラフは Appendix 8.6 参照．

これより，金利と先物価格の時系列データを用いた今回の検証においては，金利と原資産価格は独立と仮定したとしても，ゼロクーポン債と先物を用いて先渡しをヘッジすることで，先渡しと先物の違いにより生じる金利要因がほぼヘッジできていた．ただし，金利ヘッジを行わなかった場合，グラフにあるようにヘッジ期間中に大きくヘッジ誤差が生じることがあり，金利部分のヘッジを行わなくてもよいという結果にはならなかった．

なお，金利と原資産の間に相関が存在する場合は，例えば定理 2 の仮定の下で次の命題のように先渡し価格を求めることができる．

命題 5.1 定理 2 の仮定の下，先渡し価格は次のように表すことができる．

$$(数式 20) \quad F_T(t) = \frac{S_t}{P_T(t)} \exp\left(-\mu_\delta(x_t^1, x_t^2, x_t^3, T-t) + \frac{\Sigma_\delta(T-t)}{2}\right),$$

$$P_T(t) = \exp\left(-\mu_r(x_t^1, x_t^2, x_t^3, T-t) + \frac{\Sigma_r(T-t)}{2}\right).$$

μ_r , μ_δ , Σ_r , Σ_δ については Appendix 8.2 参照．

証明 先渡し価格 $F_T(t)$ は $F_T(t) = \frac{E_t\left[\exp\left(-\int_t^T r(u)du\right)S_T\right]}{P_T(t)}$, $P_T(t) = E_t\left[\exp\left(-\int_t^T r(u)du\right)\right]$ と表される．

このとき $r, \delta, \log S$ の正規性より $P_T(t), F_T(t)$ は積率母関数の計算と同様の計算を行うことで(数式 20)のように表される．

6 ヘッジ誤差率の分布の計測

今までの検証では、ヘッジ誤差率は時系列データに基づき計測しているため、高々数本のパスしか観測できなかった。ここではシミュレーションにより原資産を変動させ、ヘッジ誤差率がどのような分布となるのかを計測する。シミュレーションに用いるパラメータは In Sample のものを用い、先物を先物でヘッジする場合について考える。具体的なシミュレーション手順は以下のとおり。

カルマンフィルタにより推定されたパラメータ・状態変数を元に、過去の日次の先物価格を作成する。

で作成されたモデルをベースとした先物価格と、取引所より発表されている実際の先物価格(WTI は直近限月と 1 番目～6 番目の DEC, Copper は直近限月と 1 番目～5 番目の DEC)との誤差の割合を $(\text{実データ} - \text{モデル価格}) \div \text{モデル価格}$ により算出し、誤差の平均と分散・共分散を求める。誤差は多次元正規分布に従うと仮定する。3 次元正規乱数を生成し、状態変数をモデルに従い変動させ、先物の期間構造を作成する。

で作成された先物期間構造に、の分布に従う多次元正規乱数を生成し誤差として乗じ、元の期間構造に足す。(のモデル価格 + のモデル価格 × の誤差分布に従う乱数)

で作成された期間構造が実際に観測される市場の期間構造と想定し、連立方程式による状態変数を計算する。

で作成された期間構造により長期の価格を推定し、その価格に対してヘッジを行い、最終的なヘッジ誤差率を計測する。

～を一定回数繰り返し試行し、得られたヘッジ誤差率の標本平均と標本標準偏差を求める。

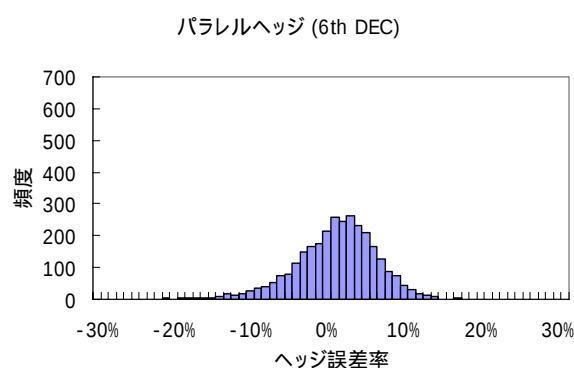
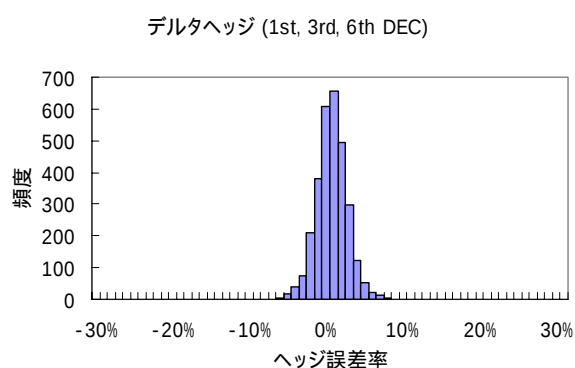
6.1 ヘッジ誤差率の分布

前述の手順に従いヘッジに用いる先物限月の組み合わせ毎に 3,000 回の試行を行い、ヘッジ誤差率の平均と標準偏差を算出した。初期値の違いによるヘッジ誤差率の違いはほとんどないため、ヘッジ対象資産として WTI は DEC16 を 2006 年から 4 年間、Copper は DEC14 を 2006 年から 3 年間ヘッジすることとした。

得られたヘッジ誤差率の平均と標準偏差の結果は以下の表のとおり。表の先物限月の項目は直近から何番目の DEC を用いてヘッジを行っているかを表しており、例えば 1-3-6 であれば、1 番目、3 番目、6 番目の DEC を用いてヘッジを行っていることを表している。また、6Y Parallel(5Y Parallel)は 6 番目(5 番目)の DEC によりパラレルヘッジした際のヘッジ誤差率(パラレルヘッジに対するヘッジ対象資産の価格は WTI：1-3-6，Copper：1-2-5 により求められた価格)を表す。

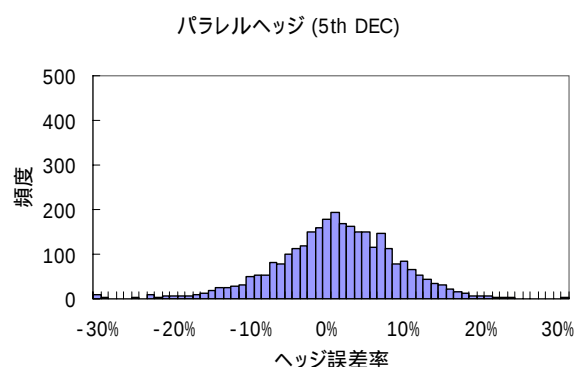
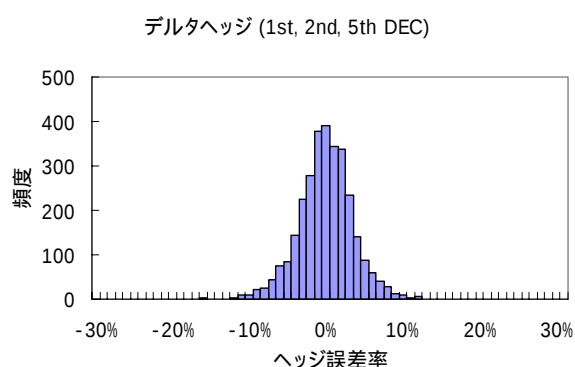
・WTI

先物限月	1-2-3	1-2-4	1-2-5	1-2-6	1-3-4	1-3-5	1-3-6	1-4-5	1-4-6	1-5-6	2-3-4
平均	-16.8%	-6.8%	-2.3%	-0.7%	-3.4%	-0.4%	0.3%	0.2%	0.4%	0.4%	-2.4%
標準偏差	16.7%	7.1%	3.4%	2.0%	7.4%	3.8%	2.0%	4.7%	2.2%	2.0%	9.9%
先物限月	2-3-5	2-3-6	2-4-5	2-4-6	2-5-6	3-4-5	3-4-6	3-5-6	4-5-6	6Y Parallel	
平均	0.3%	0.6%	0.5%	0.6%	0.4%	0.2%	0.5%	0.3%	0.2%	0.6%	
標準偏差	4.9%	2.4%	5.3%	2.4%	2.1%	6.5%	2.7%	2.3%	2.8%	5.4%	



• Copper

先物限月	1-2-3	1-2-4	1-2-5	1-3-4	1-3-5	1-4-5	2-3-4	2-3-5	2-4-5	3-4-5	5Y Parallel
平均	-15.1%	-3.2%	-0.5%	-0.1%	0.3%	-0.2%	0.6%	0.6%	-0.3%	-1.1%	0.7%
標準偏差	11.6%	5.9%	3.6%	7.2%	3.8%	3.6%	8.9%	4.2%	3.9%	4.6%	7.9%



ヘッジ開始時点における先物限月の選択の違いによる必要な先物単位数に関しては Appendix 8.7 参照。

このシミュレーションの結果からも、デルタヘッジを行う際にヘッジポートフォリオに用いる先物限月を適切に選択することで、パラレルヘッジに比べ高い精度でヘッジが可能であることがわかる。特に、WTI においては 1 番目、3 番目、6 番目の DEC，Copper は 1 番目、2 番目、5 番目の DEC を使用したものがヘッジに必要なアmount(Appendix 8.7 参照)及び、ヘッジ誤差率の平均、標準偏差の関係から最もヘッジ効率が良いと考えられる。また全体的な結果として、ヘッジポートフォリオを組む際に使用する先物は、なるべく互いに離れた限月を使用する方がよいと考えられる。これは、ヘッジに用いる先物が互いに近いと x^1, x^2, x^3 のデルタの構造も近く、ヘッジ対象のデルタを消去するのに必要な先物の単位数が多くなってしまいうためである。ヘッジに使用する先物の単位数が大きくなればなるほど、モデルと実際の先物の価格差が大きな誤差となて表れてしまう。逆に、互いに離れた先物を用いると、デルタの構造はバラバラのため、ヘッジに大きな単位数を必要としなくてすむ可能性が高い。

7 結論

本論文では商品現物価格の変動過程に基づく 3 ファクター・モデルを開発し、これを用いて商品先物価格の解析解を導出するとともに、ある仮定の下で Schwartz(1997)のモデルとの対応関係について示した。

次に、パラメータを適切に推定することにより、上場されている期間の商品先物(NYMEX WTI, LME Copper)の期間構造を再現し、それらと整合的な長期先物価格を求めることができた。

また、モデルから得られる長期先物・先渡し価格に対するヘッジ方法を提案し、そのヘッジ方法は Metallgesellschaft 社が行っていたような満期の短い先物による単純なヘッジ戦略(パラレルヘッジ)と比較したとき、様々な状況(backwardation, contango, 価格の上昇期, 下落期など)に対して安定的であることが検証により確かめられた。また、WTI の Out of Sample でのヘッジにおいては長期の先物価格が平均回帰水準を固定したモデルに比べ、平均回帰水準を固定しないモデルの方が安定的にヘッジ可能であることも確認された。そして、シミュレーションを行うことでヘッジに用いる先物限月の違いにより、ヘッジ誤差率がどのように表れるのかを計測した。

今後の課題としては、このモデルによるオプション価格の評価及び、そのヘッジ手法の構築が挙げられる。商品のオプションは一般的に平均型であり、計算が複雑となる。また、そのヘッジ方法及びその効率についても検証していくことは有用であると考えられる。

参考文献

- Bessembinder et al(1995). "Mean Reversion in Equilibrium Asset Prices: Evidence from the future term structure", *Journal of Finance*, 50, 361-375.
- Bjerk Sund, P.(1991) "Contingent claims evaluation when the convenience yield is stochastic: analytical results", *Working Paper, Norwegian School of Economics and Business Administration*.
- Black, F.(1976), "The pricing of commodity contracts", *Journal of Financial Economics*, 3, 167-179.
- Brenann, M.J. & Schwartz, E.S.(1985). "Evaluating natural resources investments", *Journal of Business*, 58, 135-157.
- Brenann, M.J. & Crew, N.I.(1997), "Hedging Long-Maturity Commodity Commitments with Short-Dated Futures Contracts", in M. Dempster & S.Pliska(Eds), *Mathematics of derivatives securities*, pp165-190, Cambridge University Press
- Buhler, W., Korn, O. & Schobel, R.(2000), "Pricing and Hedging of Oil Futures -A Unifying Approach-", *Working paper*
- Casassus, J. & Collin-Dufresne, P.(2005), "Stochastic Convenience Yield Implied from Commodity Futures and Interest Rates", *Journal of Finance*, 60, 2283-2331.
- Cortazar, G. & Naranjo, L.(2006), "An N-Factor Gaussian Model of Oil Futures Prices", *Journal of Futures Markets*, 26, 243-268.
- Culp, C.L. & Miller, M.H.(1995), "Metallgesellschaft and the Economics of Synthetic Storage", *Journal of Applied Corporate Finance*, 7, 62-76.

Gibson, R. & Schwartz, E.S.(1990), "Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims", *Journal of Finance*, 45, 959-976.

Heath, D., Jarrow, R. & Morton, A.(1992), "Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation", *Econometrica*, 60, 77-105.

Hull, J.C. & A. White (1990), "Pricing interest-rate-derivative securities", *Review of Financial Studies*, 3, 573-592.

Jamshidian, F. & Fein, M.(1990), "Closed-form solutions for oil futures and European options in the Gibson-Schwartz model" *Working paper, Merrill Lynch Capital Markets*

Mello, A.S. & Parsons, J.E.(1995), "Maturity Structure of a Hedge Matters: Lessons from the Metallgesellschaft Debacle" , *Journal of Applied Corporate Finance*, 8, 106-121.

Miltersen, K.R. & Schwartz, E.S.(1998), "Pricing of Options on Commodity Futures with Stochastic Term Structures of Convenience Yields and Interest Rates", *Journal of Financial And Quantitative Analysis* 33, 33-59.

Schwartz, E.S.(1997), "The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging", *Journal of Finance*, Vol52, 923-973.

Schwartz, E.S. & Smith, J.E.(2000), "Short-Term Variations Long-Term Dynamics. in Commodity Prices", *Management Science* 46, 893-911.

8 Appendix

8.1 状態変数の期待値及び分散共分散

$$E_t \begin{bmatrix} x_T^1 \\ x_T^2 \\ x_T^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{11}(x_t^1, x_t^2, x_t^3, T-t) \\ \mu_{22}(x_t^1, x_t^2, x_t^3, T-t) \\ \mu_{33}(x_t^1, x_t^2, x_t^3, T-t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-\kappa(T-t)} x_t^1 + \frac{\kappa(e^{-\gamma(T-t)} - e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa - \gamma} x_t^2 + \frac{\kappa(e^{-\beta(T-t)} - e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa - \beta} x_t^3 + \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{\kappa e^{-\beta(T-t)} - \beta e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa - \beta} \right) \\ e^{-\gamma(T-t)} x_t^2 \\ e^{-\beta(T-t)} x_t^3 + \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta(T-t)}) \end{bmatrix},$$

$$\text{Cov}_T \begin{bmatrix} x_T^1 \\ x_T^2 \\ x_T^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11}(T-t) & \Sigma_{12}(T-t) & \Sigma_{13}(T-t) \\ \Sigma_{12}(T-t) & \Sigma_{22}(T-t) & \Sigma_{23}(T-t) \\ \Sigma_{13}(T-t) & \Sigma_{23}(T-t) & \Sigma_{33}(T-t) \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{11} = & \sigma_1^2 \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa} + \sigma_2^2 \left(\frac{\kappa}{\kappa - \gamma} \right)^2 \left(\frac{1 - e^{-2\gamma(T-t)}}{2\gamma} + \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa} - 2 \frac{1 - e^{-(\kappa+\gamma)(T-t)}}{\kappa + \gamma} \right) \\ & + \sigma_3^2 \left(\frac{\kappa}{\kappa - \beta} \right)^2 \left(\frac{1 - e^{-2\beta(T-t)}}{2\beta} + \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa} - 2 \frac{1 - e^{-(\kappa+\beta)(T-t)}}{\kappa + \beta} \right) \\ & + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \frac{\kappa}{\kappa - \gamma} \left(\frac{1 - e^{-(\kappa+\gamma)(T-t)}}{\kappa + \gamma} - \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa} \right) \\ & + 2\rho_{23}\sigma_2\sigma_3 \frac{\kappa^2}{(\kappa - \gamma)(\kappa - \beta)} \left(\frac{1 - e^{-(\beta+\gamma)(T-t)}}{\beta + \gamma} - \frac{1 - e^{-(\kappa+\beta)(T-t)}}{\kappa + \beta} - \frac{1 - e^{-(\kappa+\gamma)(T-t)}}{\kappa + \gamma} + \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa} \right) \\ & + 2\rho_{13}\sigma_1\sigma_3 \frac{\kappa}{\kappa - \beta} \left(\frac{1 - e^{-(\kappa+\beta)(T-t)}}{\kappa + \beta} - \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa} \right), \end{aligned}$$

$$\Sigma_{22} = \sigma_2^2 \frac{1 - e^{-2\gamma(T-t)}}{2\gamma}, \quad \Sigma_{33} = \sigma_3^2 \frac{1 - e^{-2\beta(T-t)}}{2\beta},$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{12} = & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \frac{1 - e^{-(\kappa+\gamma)(T-t)}}{\kappa + \gamma} + \sigma_2^2 \frac{\kappa}{\kappa - \gamma} \left(\frac{1 - e^{-2\gamma(T-t)}}{2\gamma} - \frac{1 - e^{-(\kappa+\gamma)(T-t)}}{\kappa + \gamma} \right) \\ & + \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 \frac{\kappa}{\kappa - \beta} \left(\frac{1 - e^{-(\beta+\gamma)(T-t)}}{\beta + \gamma} - \frac{1 - e^{-(\kappa+\gamma)(T-t)}}{\kappa + \gamma} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{13} = & \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 \frac{1 - e^{-(\kappa+\beta)(T-t)}}{\kappa + \beta} + \sigma_3^2 \frac{\kappa}{\kappa - \beta} \left(\frac{1 - e^{-2\beta(T-t)}}{2\beta} - \frac{1 - e^{-(\kappa+\beta)(T-t)}}{\kappa + \beta} \right) \\ & + \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 \frac{\kappa}{\kappa - \gamma} \left(\frac{1 - e^{-(\beta+\gamma)(T-t)}}{\beta + \gamma} - \frac{1 - e^{-(\kappa+\beta)(T-t)}}{\kappa + \beta} \right), \end{aligned}$$

$$\Sigma_{23} = \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 \frac{1 - e^{-(\beta+\gamma)(T-t)}}{\beta + \gamma}.$$

8.2 先渡し価格のパラメータ

$$\begin{aligned}
 \mu_r = & \psi_0(T-t) + \psi_1 \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} x_t^1 \\
 & + \psi_1 \frac{\kappa}{\kappa - \gamma} \left(\frac{1 - e^{-\gamma(T-t)}}{\gamma} - \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \right) x_t^2 + \psi_2 \frac{1 - e^{-\gamma(T-t)}}{\gamma} x_t^2 \\
 & + \psi_1 \frac{\kappa}{\kappa - \beta} \left(\frac{1 - e^{-\beta(T-t)}}{\beta} - \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \right) x_t^3 + \psi_3 \frac{1 - e^{-\beta(T-t)}}{\beta} x_t^3 \\
 & + \frac{\alpha}{\beta} \left[\psi_1 \left((T-t) - \frac{\kappa}{\kappa - \beta} \frac{1 - e^{-\beta(T-t)}}{\beta} + \frac{\beta}{\kappa - \beta} \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \right) + \psi_3 \left((T-t) - \frac{1 - e^{-\beta(T-t)}}{\beta} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma_r = & \psi_1^2 \sigma_1^2 \frac{1}{\kappa^2} \left[(T-t) - \frac{2(1 - e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} + \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa} \right] \\
 & + \psi_1^2 \sigma_2^2 \left(\frac{\kappa}{\kappa - \gamma} \right)^2 \left[\frac{1}{\gamma^2} \left\{ (T-t) - \frac{2(1 - e^{-\gamma(T-t)})}{\gamma} + \frac{1 - e^{-2\gamma(T-t)}}{2\gamma} \right\} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{2}{\kappa\gamma} \left\{ (T-t) - \frac{(1 - e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} - \frac{(1 - e^{-\gamma(T-t)})}{\gamma} + \frac{1 - e^{-(\kappa+\gamma)(T-t)}}{\kappa + \gamma} \right\} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\kappa^2} \left\{ (T-t) - \frac{2(1 - e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} + \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa} \right\} \right] \\
 & + \psi_2^2 \sigma_2^2 \frac{1}{\gamma^2} \left\{ (T-t) - \frac{2(1 - e^{-\gamma(T-t)})}{\gamma} + \frac{1 - e^{-2\gamma(T-t)}}{2\gamma} \right\} \\
 & + \psi_1^2 \sigma_3^2 \left(\frac{\kappa}{\kappa - \beta} \right)^2 \left[\frac{1}{\beta^2} \left\{ (T-t) - \frac{2(1 - e^{-\beta(T-t)})}{\beta} + \frac{1 - e^{-2\beta(T-t)}}{2\beta} \right\} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{2}{\kappa\beta} \left\{ (T-t) - \frac{(1 - e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} - \frac{(1 - e^{-\beta(T-t)})}{\beta} + \frac{1 - e^{-(\kappa+\beta)(T-t)}}{\kappa + \beta} \right\} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\kappa^2} \left\{ (T-t) - \frac{2(1 - e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} + \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa} \right\} \right] \\
 & + \psi_3^2 \sigma_3^2 \frac{1}{\beta^2} \left\{ (T-t) - \frac{2(1 - e^{-\beta(T-t)})}{\beta} + \frac{1 - e^{-2\beta(T-t)}}{2\beta} \right\} \\
 & + 2\psi_1^2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} \frac{\kappa}{\kappa - \gamma} \left[\frac{1}{\kappa\gamma} \left\{ (T-t) - \frac{(1 - e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} - \frac{(1 - e^{-\gamma(T-t)})}{\gamma} + \frac{1 - e^{-(\kappa+\gamma)(T-t)}}{\kappa + \gamma} \right\} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{\kappa^2} \left\{ (T-t) - \frac{2(1 - e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} + \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa} \right\} \right] \\
 & + 2\psi_1 \psi_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} \frac{1}{\kappa\gamma} \left\{ (T-t) - \frac{(1 - e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} - \frac{(1 - e^{-\gamma(T-t)})}{\gamma} + \frac{1 - e^{-(\kappa+\gamma)(T-t)}}{\kappa + \gamma} \right\} \\
 & + 2\psi_1^2 \sigma_1 \sigma_3 \rho_{13} \frac{\kappa}{\kappa - \beta} \left[\frac{1}{\kappa\beta} \left\{ (T-t) - \frac{(1 - e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} - \frac{(1 - e^{-\beta(T-t)})}{\beta} + \frac{1 - e^{-(\kappa+\beta)(T-t)}}{\kappa + \beta} \right\} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{\kappa^2} \left\{ (T-t) - \frac{2(1 - e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} + \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa} \right\} \right] \\
 & + 2\psi_1 \psi_3 \sigma_1 \sigma_3 \rho_{13} \frac{1}{\kappa\beta} \left\{ (T-t) - \frac{(1 - e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} - \frac{(1 - e^{-\beta(T-t)})}{\beta} + \frac{1 - e^{-(\kappa+\beta)(T-t)}}{\kappa + \beta} \right\} \\
 & + 2\psi_1 \psi_2 \sigma_2^2 \frac{\kappa}{\kappa - \gamma} \left[\frac{1}{\gamma^2} \left\{ (T-t) - \frac{2(1 - e^{-\gamma(T-t)})}{\gamma} + \frac{1 - e^{-2\gamma(T-t)}}{2\gamma} \right\} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{\kappa\gamma} \left\{ (T-t) - \frac{(1 - e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} - \frac{(1 - e^{-\gamma(T-t)})}{\gamma} + \frac{1 - e^{-(\kappa+\gamma)(T-t)}}{\kappa + \gamma} \right\} \right] \\
 & + 2\psi_1^2 \sigma_2 \sigma_3 \rho_{23} \frac{\kappa^2}{(\kappa - \gamma)(\kappa - \beta)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\frac{1}{\gamma\beta} \left\{ (T-t) - \frac{(1-e^{-\gamma(T-t)})}{\gamma} - \frac{(1-e^{-\beta(T-t)})}{\beta} + \frac{1-e^{-(\gamma+\beta)(T-t)}}{\gamma+\beta} \right\} \right. \\
& - \frac{1}{\kappa\gamma} \left\{ (T-t) - \frac{(1-e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} - \frac{(1-e^{-\gamma(T-t)})}{\gamma} + \frac{1-e^{-(\kappa+\gamma)(T-t)}}{\kappa+\gamma} \right\} \\
& - \frac{1}{\kappa\beta} \left\{ (T-t) - \frac{(1-e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} - \frac{(1-e^{-\beta(T-t)})}{\beta} + \frac{1-e^{-(\kappa+\beta)(T-t)}}{\kappa+\beta} \right\} \\
& \left. + \frac{1}{\kappa^2} \left\{ (T-t) - \frac{2(1-e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} + \frac{1-e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa} \right\} \right] \\
& + 2\psi_1\psi_3\sigma_2\sigma_3\rho_{23} \frac{\kappa}{\kappa-\gamma} \left[\frac{1}{\gamma\beta} \left\{ (T-t) - \frac{(1-e^{-\gamma(T-t)})}{\gamma} - \frac{(1-e^{-\beta(T-t)})}{\beta} + \frac{1-e^{-(\gamma+\beta)(T-t)}}{\gamma+\beta} \right\} \right. \\
& \left. - \frac{1}{\kappa\beta} \left\{ (T-t) - \frac{(1-e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} - \frac{(1-e^{-\beta(T-t)})}{\beta} + \frac{1-e^{-(\kappa+\beta)(T-t)}}{\kappa+\beta} \right\} \right] \\
& + 2\psi_1\psi_2\sigma_2\sigma_3\rho_{23} \frac{\kappa}{\kappa-\beta} \left[\frac{1}{\gamma\beta} \left\{ (T-t) - \frac{(1-e^{-\gamma(T-t)})}{\gamma} - \frac{(1-e^{-\beta(T-t)})}{\beta} + \frac{1-e^{-(\gamma+\beta)(T-t)}}{\gamma+\beta} \right\} \right. \\
& \left. - \frac{1}{\kappa\gamma} \left\{ (T-t) - \frac{(1-e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} - \frac{(1-e^{-\gamma(T-t)})}{\gamma} + \frac{1-e^{-(\kappa+\gamma)(T-t)}}{\kappa+\gamma} \right\} \right] \\
& + 2\psi_2\psi_3\sigma_2\sigma_3\rho_{23} \frac{1}{\gamma\beta} \left\{ (T-t) - \frac{(1-e^{-\gamma(T-t)})}{\gamma} - \frac{(1-e^{-\beta(T-t)})}{\beta} + \frac{1-e^{-(\gamma+\beta)(T-t)}}{\gamma+\beta} \right\} \\
& + 2\psi_1\psi_3\sigma_3^2 \frac{\kappa}{\kappa-\beta} \left[\frac{1}{\beta^2} \left\{ (T-t) - \frac{2(1-e^{-\beta(T-t)})}{\beta} + \frac{1-e^{-2\beta(T-t)}}{2\beta} \right\} \right. \\
& \left. - \frac{1}{\kappa\beta} \left\{ (T-t) - \frac{(1-e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} - \frac{(1-e^{-\beta(T-t)})}{\beta} + \frac{1-e^{-(\kappa+\beta)(T-t)}}{\kappa+\beta} \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_\delta &= \psi_0(T-t) + (\psi_1 + \kappa) \frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} x_t^1 \\
&+ (\psi_1 + \kappa) \frac{\kappa}{\kappa-\gamma} \left(\frac{1-e^{-\gamma(T-t)}}{\gamma} - \frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \right) x_t^2 + (\psi_2 - \kappa) \frac{1-e^{-\gamma(T-t)}}{\gamma} x_t^2 \\
&+ (\psi_1 + \kappa) \frac{\kappa}{\kappa-\beta} \left(\frac{1-e^{-\beta(T-t)}}{\beta} - \frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \right) x_t^3 + (\psi_3 - \kappa) \frac{1-e^{-\beta(T-t)}}{\beta} x_t^3 \\
&+ \frac{\alpha}{\beta} \left[(\psi_1 + \kappa) \left((T-t) - \frac{\kappa}{\kappa-\beta} \frac{1-e^{-\beta(T-t)}}{\beta} + \frac{\beta}{\kappa-\beta} \frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \right) \right. \\
&\left. + (\psi_3 - \kappa) \left((T-t) - \frac{1-e^{-\beta(T-t)}}{\beta} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_\delta &= (\psi_1 + \kappa)^2 \sigma_1^2 \frac{1}{\kappa^2} \left\{ (T-t) - \frac{2(1-e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} + \frac{1-e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa} \right\} + \sigma_1^2 (T-t) \\
&+ (\psi_1 + \kappa)^2 \sigma_2^2 \left(\frac{\kappa}{\kappa-\gamma} \right)^2 \left[\frac{1}{\gamma^2} \left\{ (T-t) - \frac{2(1-e^{-\gamma(T-t)})}{\gamma} + \frac{1-e^{-2\gamma(T-t)}}{2\gamma} \right\} \right. \\
&\left. - \frac{2}{\kappa\gamma} \left\{ (T-t) - \frac{(1-e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} - \frac{(1-e^{-\gamma(T-t)})}{\gamma} + \frac{1-e^{-(\kappa+\gamma)(T-t)}}{\kappa+\gamma} \right\} \right. \\
&\left. + \frac{1}{\kappa^2} \left\{ (T-t) - \frac{2(1-e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} + \frac{1-e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa} \right\} \right] \\
&+ (\psi_2 - \kappa)^2 \sigma_2^2 \frac{1}{\gamma^2} \left\{ (T-t) - \frac{2(1-e^{-\gamma(T-t)})}{\gamma} + \frac{1-e^{-2\gamma(T-t)}}{2\gamma} \right\} \\
&+ (\psi_1 + \kappa)^2 \sigma_3^2 \left(\frac{\kappa}{\kappa-\beta} \right)^2 \left[\frac{1}{\beta^2} \left\{ (T-t) - \frac{2(1-e^{-\beta(T-t)})}{\beta} + \frac{1-e^{-2\beta(T-t)}}{2\beta} \right\} \right.
\end{aligned}$$

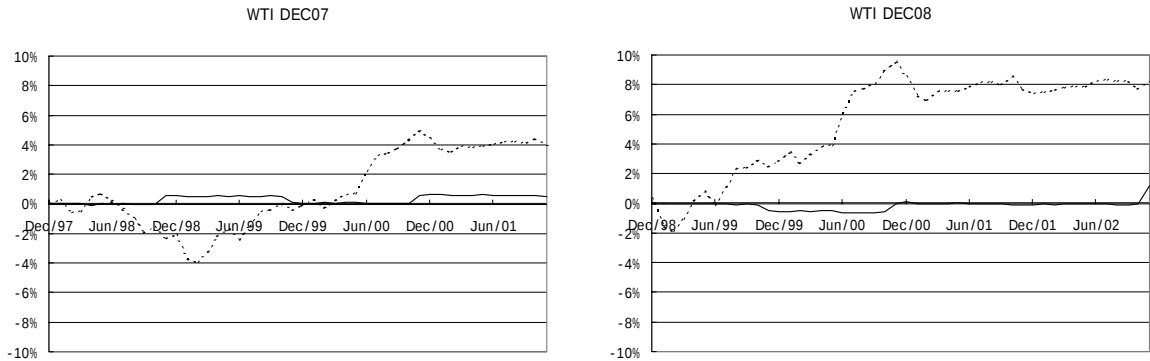
$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{\kappa\beta}\left\{(T-t)-\frac{(1-e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa}-\frac{(1-e^{-\beta(T-t)})}{\beta}+\frac{1-e^{-(\kappa+\beta)(T-t)}}{\kappa+\beta}\right\} \\
& +\frac{1}{\kappa^2}\left\{(T-t)-\frac{2(1-e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa}+\frac{1-e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa}\right\}] \\
& +(\psi_3-\kappa)^2\sigma_3^2\frac{1}{\beta^2}\left\{(T-t)-\frac{2(1-e^{-\beta(T-t)})}{\beta}+\frac{1-e^{-2\beta(T-t)}}{2\beta}\right\} \\
& +2(\psi_1+\kappa)\sigma_1^2\frac{1}{\kappa}\left\{(T-t)-\frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}\right\} \\
& +2(\psi_1+\kappa)^2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}\frac{\kappa}{\kappa-\gamma} \\
& \times\left[\frac{1}{\kappa\gamma}\left\{(T-t)-\frac{(1-e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa}-\frac{(1-e^{-\gamma(T-t)})}{\gamma}+\frac{1-e^{-(\kappa+\gamma)(T-t)}}{\kappa+\gamma}\right\}\right. \\
& \left.-\frac{1}{\kappa^2}\left\{(T-t)-\frac{2(1-e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa}+\frac{1-e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa}\right\}\right] \\
& +2(\psi_1+\kappa)(\psi_2-\kappa)\sigma_1\sigma_2\rho_{12} \\
& \times\frac{1}{\kappa\gamma}\left\{(T-t)-\frac{(1-e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa}-\frac{(1-e^{-\gamma(T-t)})}{\gamma}+\frac{1-e^{-(\kappa+\gamma)(T-t)}}{\kappa+\gamma}\right\} \\
& +2(\psi_1+\kappa)^2\sigma_1\sigma_3\rho_{13}\frac{\kappa}{\kappa-\beta} \\
& \times\left[\frac{1}{\kappa\beta}\left\{(T-t)-\frac{(1-e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa}-\frac{(1-e^{-\beta(T-t)})}{\beta}+\frac{1-e^{-(\kappa+\beta)(T-t)}}{\kappa+\beta}\right\}\right. \\
& \left.-\frac{1}{\kappa^2}\left\{(T-t)-\frac{2(1-e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa}+\frac{1-e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa}\right\}\right] \\
& +2(\psi_1+\kappa)(\psi_3-\kappa)\sigma_1\sigma_3\rho_{13} \\
& \times\frac{1}{\kappa\beta}\left\{(T-t)-\frac{(1-e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa}-\frac{(1-e^{-\beta(T-t)})}{\beta}+\frac{1-e^{-(\kappa+\beta)(T-t)}}{\kappa+\beta}\right\} \\
& -2(\psi_1+\kappa)\sigma_1^2\frac{1}{\kappa}\left((T-t)-\frac{(1-e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa}\right) \\
& -2(\psi_1+\kappa)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}\frac{\kappa}{\kappa-\gamma}\left[\frac{1}{\gamma}\left\{(T-t)-\frac{1-e^{-\gamma(T-t)}}{\gamma}\right\}\right. \\
& \left.-\frac{1}{\kappa}\left\{(T-t)-\frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}\right\}\right] \\
& -2(\psi_2-\kappa)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}\frac{1}{\gamma}\left\{(T-t)-\frac{1-e^{-\gamma(T-t)}}{\gamma}\right\} \\
& -2(\psi_1+\kappa)\sigma_1\sigma_3\rho_{13}\frac{\kappa}{\kappa-\beta}\left[\frac{1}{\beta}\left\{(T-t)-\frac{1-e^{-\beta(T-t)}}{\beta}\right\}\right. \\
& \left.-\frac{1}{\kappa}\left\{(T-t)-\frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}\right\}\right] \\
& -2(\psi_3-\kappa)\sigma_1\sigma_3\rho_{13}\frac{1}{\beta}\left\{(T-t)-\frac{1-e^{-\beta(T-t)}}{\beta}\right\} \\
& +2(\psi_1+\kappa)(\psi_2-\kappa)\sigma_2^2\frac{\kappa}{\kappa-\gamma}\left[\frac{1}{\gamma^2}\left\{(T-t)-\frac{2(1-e^{-\gamma(T-t)})}{\gamma}+\frac{1-e^{-2\gamma(T-t)}}{2\gamma}\right\}\right. \\
& \left.-\frac{1}{\kappa\gamma}\left\{(T-t)-\frac{(1-e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa}-\frac{(1-e^{-\gamma(T-t)})}{\gamma}+\frac{1-e^{-(\kappa+\gamma)(T-t)}}{\kappa+\gamma}\right\}\right] \\
& +2(\psi_1+\kappa)^2\sigma_2\sigma_3\rho_{23}\frac{\kappa}{\kappa-\gamma}\frac{\kappa}{\kappa-\beta} \\
& \times\left[\frac{1}{\gamma\beta}\left\{(T-t)-\frac{(1-e^{-\gamma(T-t)})}{\gamma}-\frac{(1-e^{-\beta(T-t)})}{\beta}+\frac{1-e^{-(\gamma+\beta)(T-t)}}{\gamma+\beta}\right\}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\kappa\gamma}\left\{(T-t) - \frac{(1-e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} - \frac{(1-e^{-\gamma(T-t)})}{\gamma} + \frac{1-e^{-(\kappa+\gamma)(T-t)}}{\kappa+\gamma}\right\} \\
& -\frac{1}{\kappa\beta}\left\{(T-t) - \frac{(1-e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} - \frac{(1-e^{-\beta(T-t)})}{\beta} + \frac{1-e^{-(\kappa+\beta)(T-t)}}{\kappa+\beta}\right\} \\
& +\frac{1}{\kappa^2}\left\{(T-t) - \frac{2(1-e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} + \frac{1-e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa}\right\}] \\
& +2(\psi_1+\kappa)(\psi_3-\kappa)\sigma_2\sigma_3\rho_{23}\frac{\kappa}{\kappa-\gamma} \\
& \times\left[\frac{1}{\gamma\beta}\left\{(T-t) - \frac{(1-e^{-\gamma(T-t)})}{\gamma} - \frac{(1-e^{-\beta(T-t)})}{\beta} + \frac{1-e^{-(\gamma+\beta)(T-t)}}{\gamma+\beta}\right\}\right. \\
& \left.-\frac{1}{\kappa\beta}\left\{(T-t) - \frac{(1-e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} - \frac{(1-e^{-\beta(T-t)})}{\beta} + \frac{1-e^{-(\kappa+\beta)(T-t)}}{\kappa+\beta}\right\}\right] \\
& +2(\psi_1+\kappa)(\psi_2-\kappa)\sigma_2\sigma_3\rho_{23}\frac{\kappa}{\kappa-\beta} \\
& \times\left[\frac{1}{\gamma\beta}\left\{(T-t) - \frac{(1-e^{-\gamma(T-t)})}{\gamma} - \frac{(1-e^{-\beta(T-t)})}{\beta} + \frac{1-e^{-(\gamma+\beta)(T-t)}}{\gamma+\beta}\right\}\right. \\
& \left.-\frac{1}{\kappa\gamma}\left\{(T-t) - \frac{(1-e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} - \frac{(1-e^{-\gamma(T-t)})}{\gamma} + \frac{1-e^{-(\kappa+\gamma)(T-t)}}{\kappa+\gamma}\right\}\right] \\
& +2(\psi_2-\kappa)(\psi_3-\kappa)\sigma_2\sigma_3\rho_{23} \\
& \times\frac{1}{\gamma\beta}\left\{(T-t) - \frac{(1-e^{-\gamma(T-t)})}{\gamma} - \frac{(1-e^{-\beta(T-t)})}{\beta} + \frac{1-e^{-(\gamma+\beta)(T-t)}}{\gamma+\beta}\right\} \\
& +2(\psi_1+\kappa)(\psi_3-\kappa)\sigma_3^2\frac{\kappa}{\kappa-\beta}\left[\frac{1}{\beta^2}\left\{(T-t) - \frac{2(1-e^{-\beta(T-t)})}{\beta} + \frac{1-e^{-2\beta(T-t)}}{2\beta}\right\}\right. \\
& \left.-\frac{1}{\kappa\beta}\left\{(T-t) - \frac{(1-e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} - \frac{(1-e^{-\beta(T-t)})}{\beta} + \frac{1-e^{-(\kappa+\beta)(T-t)}}{\kappa+\beta}\right\}\right]
\end{aligned}$$

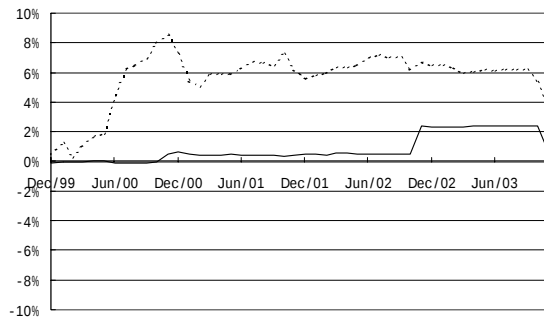
8.3 累積ヘッジ誤差率(カルマンフィルタによる状態変数)

—— Delta Hedge Parallel Hedge

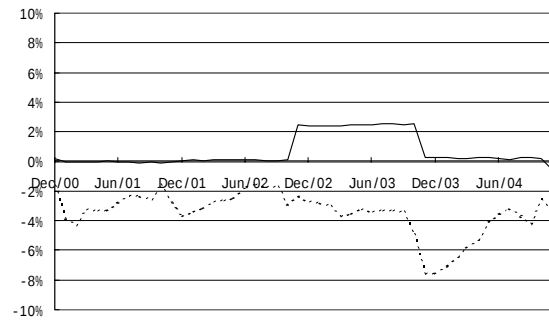
■ 回帰モデル



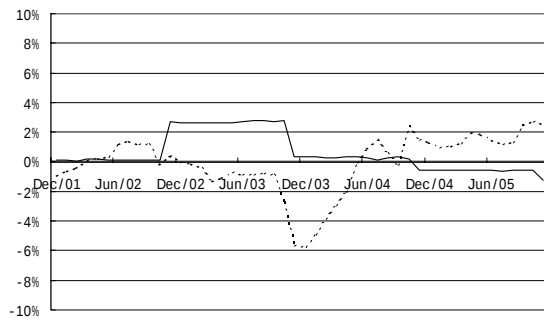
WTI DEC09



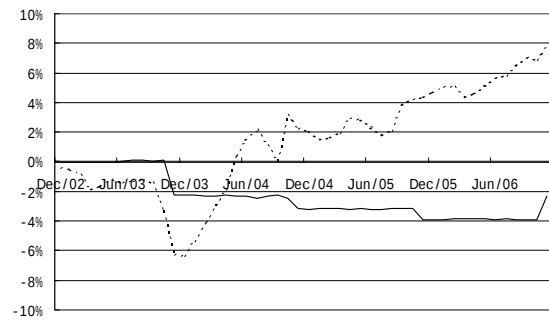
WTI DEC10



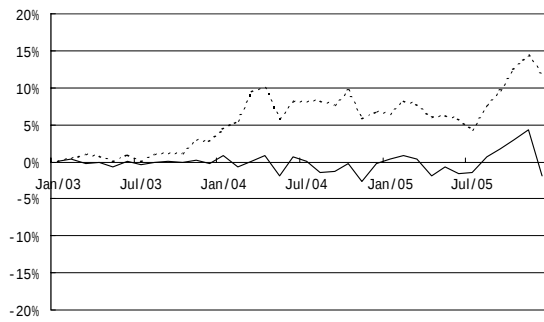
WTI DEC11



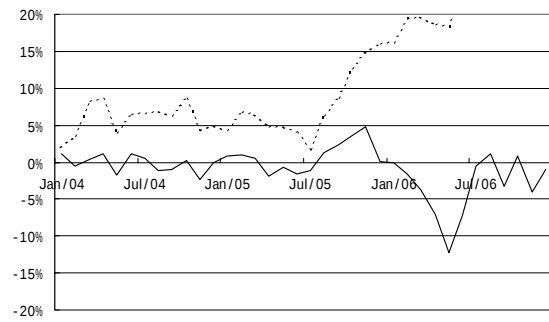
WTI DEC12



Copper DEC10

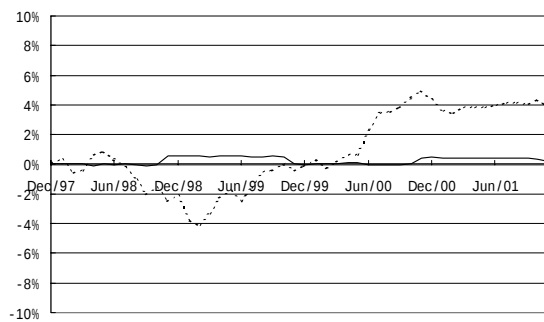


Copper DEC11

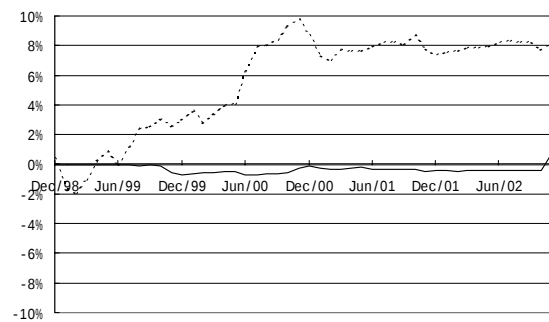


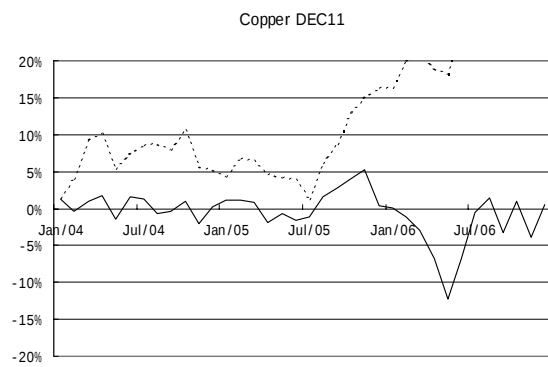
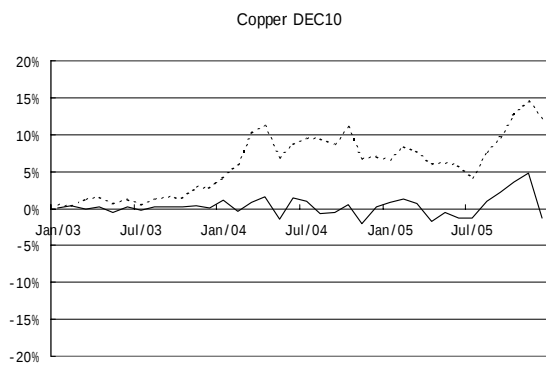
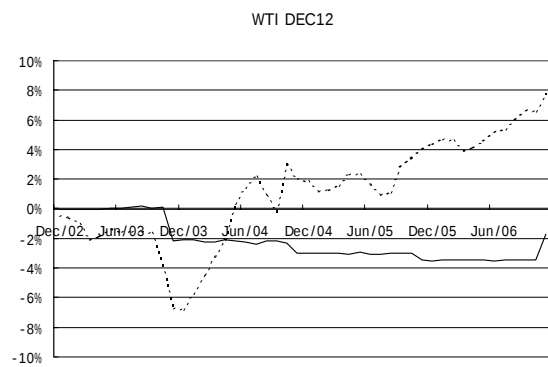
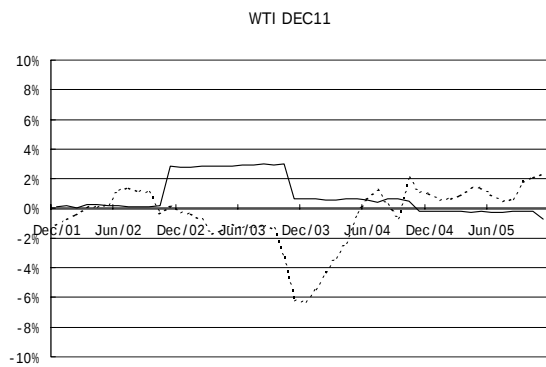
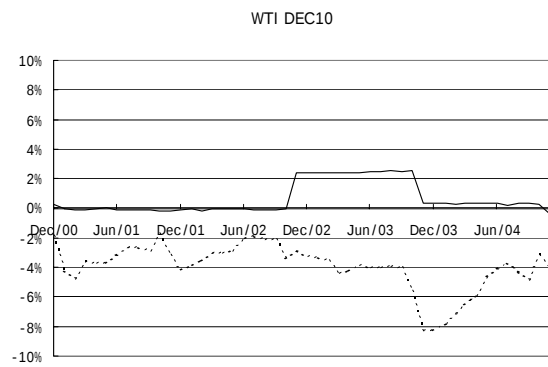
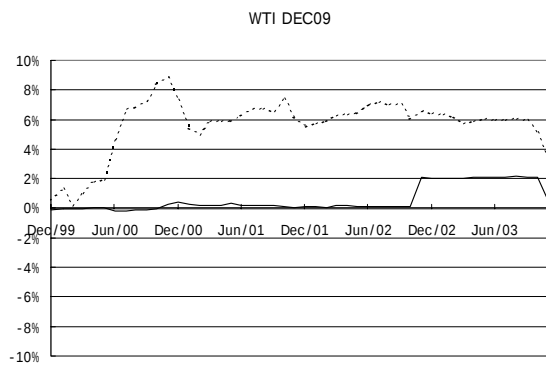
■ 非回帰モデル

WTI DEC07



WTI DEC08

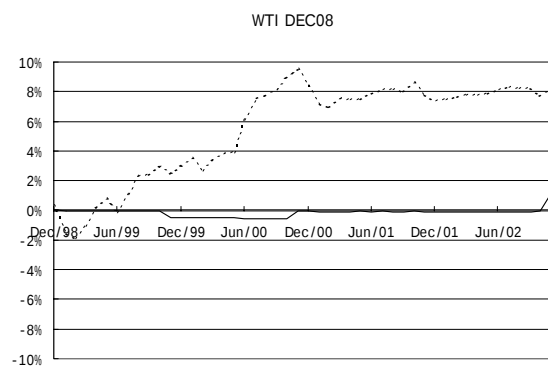
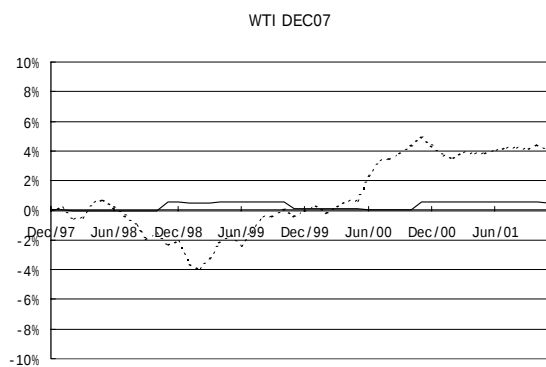




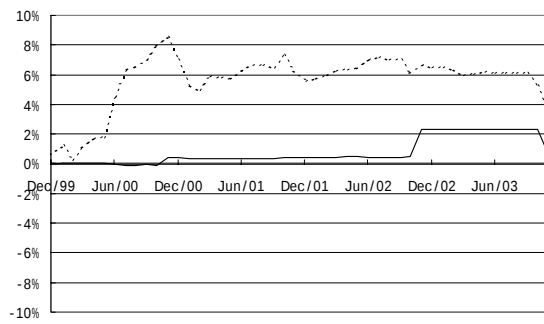
8.4 累積ヘッジ誤差率(連立方程式による状態変数)

—— Delta Hedge Parallel Hedge

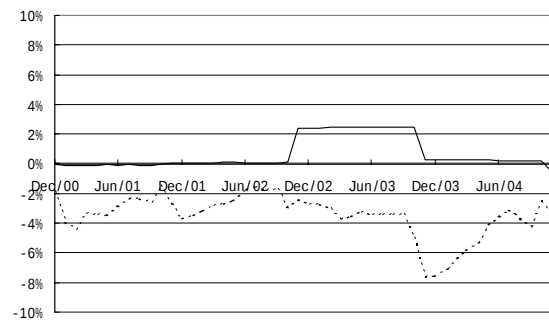
■ 回帰モデル



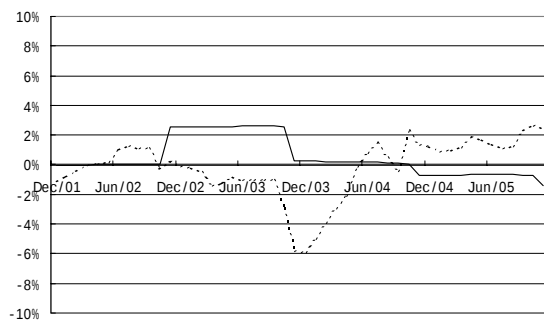
WTI DEC09



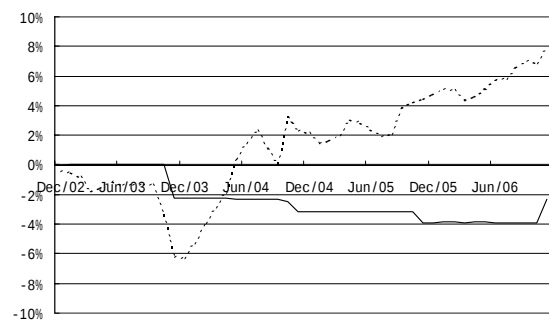
WTI DEC10



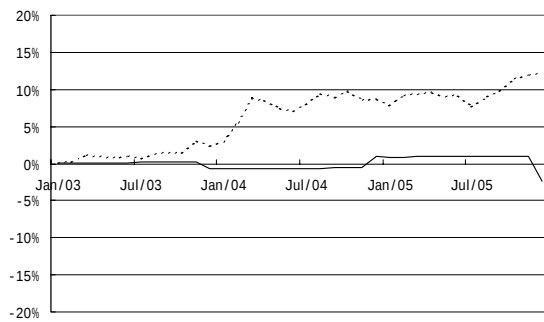
WTI DEC11



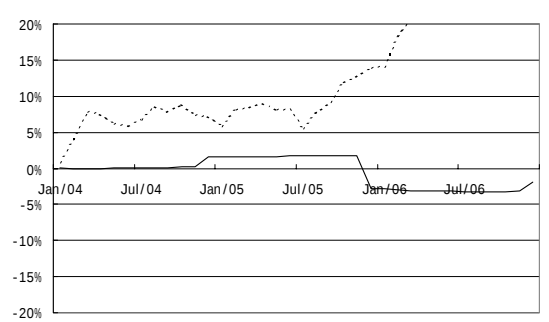
WTI DEC12



Copper DEC10

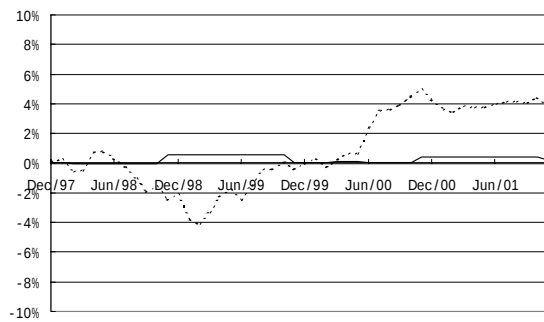


Copper DEC11

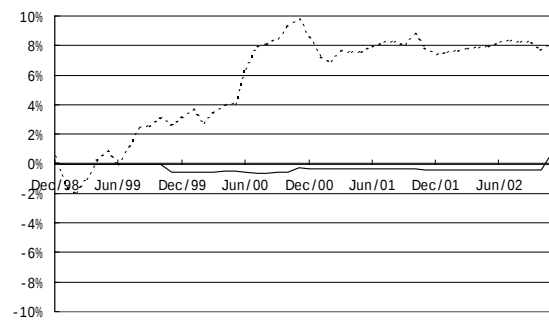


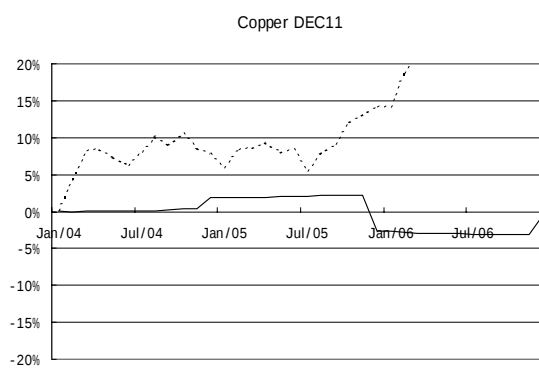
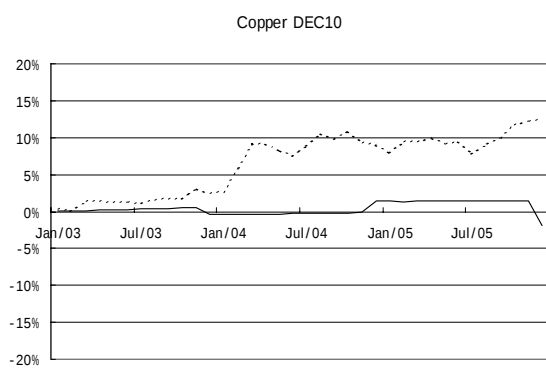
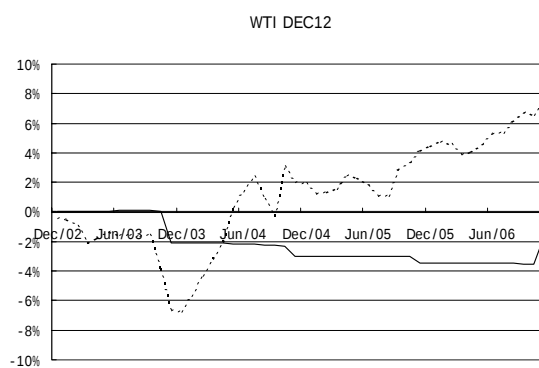
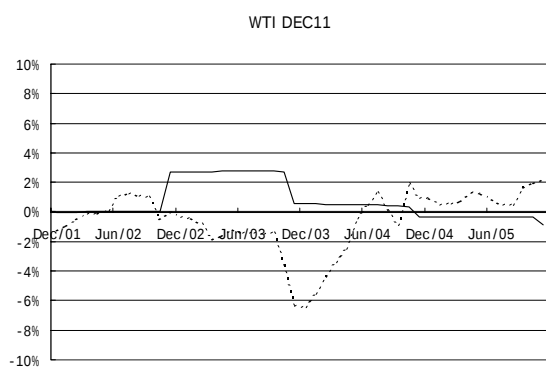
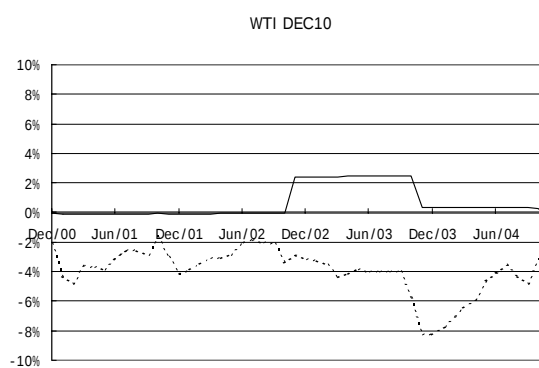
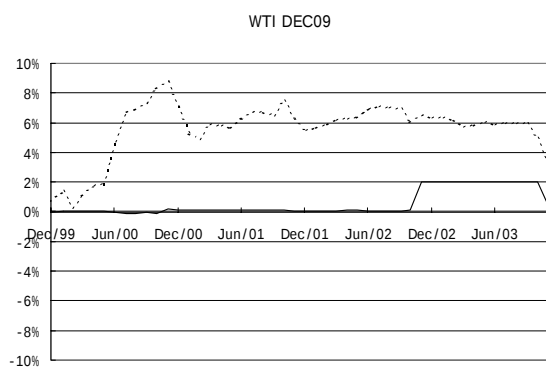
■ 非回帰モデル

WTI DEC07



WTI DEC08

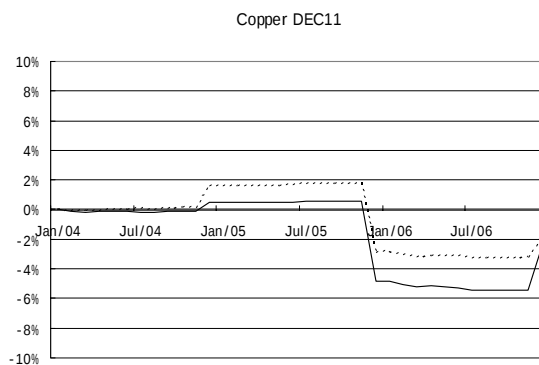
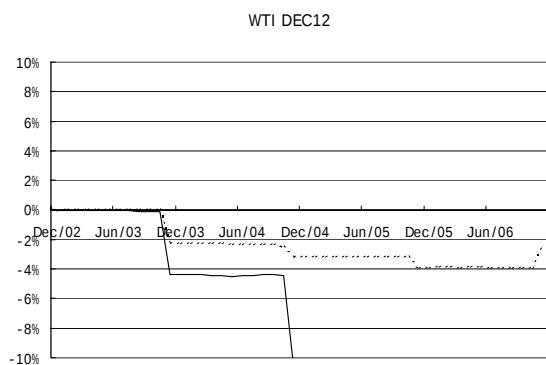




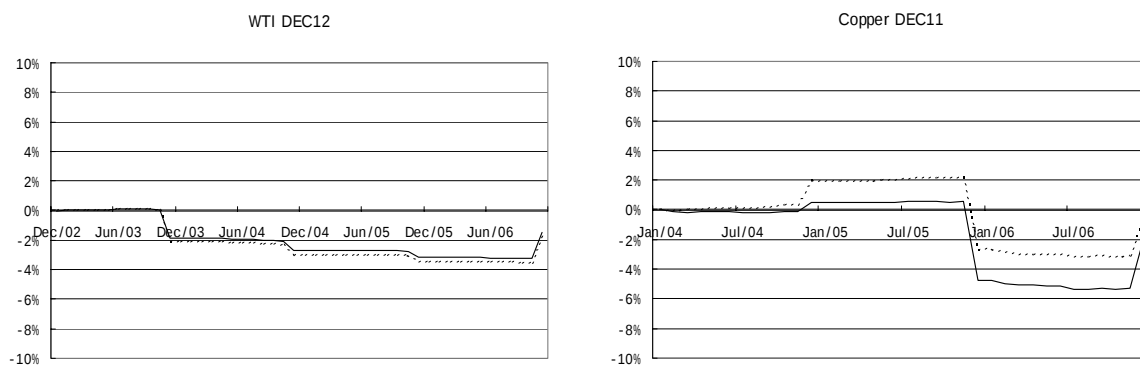
8.5 Out of Sample での累積ヘッジ誤差率(連立方程式による状態変数)

—— Delta Hedge(Out of Sample) Delta Hedge(In Sample)

■ 回帰モデル

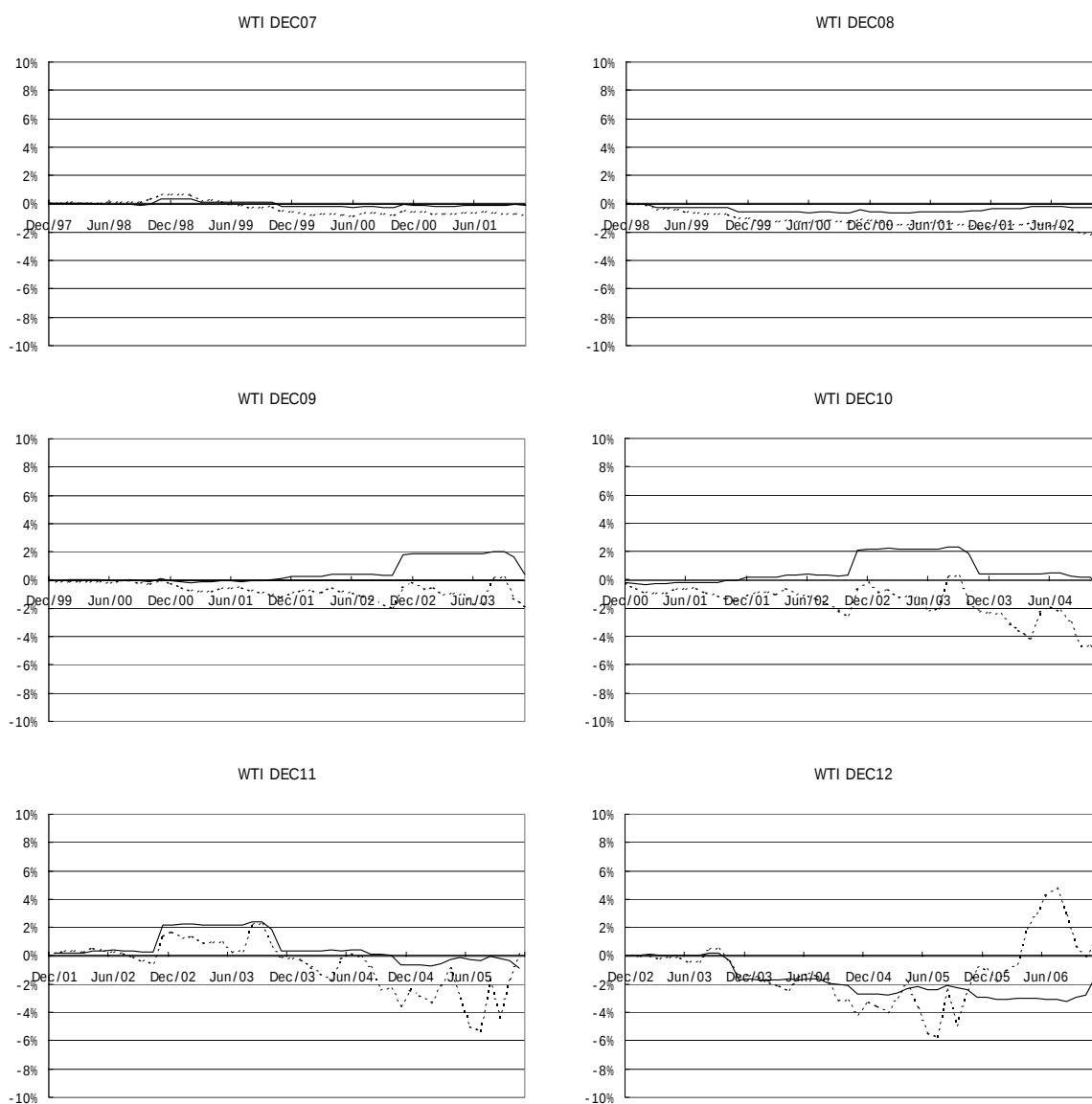


■ 非回帰モデル



8.6 先渡しに対する累積ヘッジ誤差率(非回帰モデル, 連立方程式による状態変数)

—— 金利ヘッジ有 金利ヘッジ無



8.7 ヘッジ先物限月とヘッジに必要な単位数

・WTI パラメータ(1)

WTI	1stDEC	2ndDEC	3rdDEC	4thDEC	5thDEC	6thDEC
1-2-3	1.21	-5.27	5.08	0	0	0
1-2-4	0.62	-2.11	0	2.51	0	0
1-2-5	0.35	-1.09	0	0	1.76	0
1-2-6	0.2	-0.61	0	0	0	1.43
1-3-4	0.22	0	-3.39	4.19	0	0
1-3-5	0.12	0	-1.32	0	2.22	0
1-3-6	0.07	0	-0.66	0	0	1.61
1-4-5	0.05	0	0	-2.68	3.65	0
1-4-6	0.03	0	0	-1.02	0	2
1-5-6	0.01	0	0	0	-2.22	3.22
2-3-4	0	1.19	-5.3	5.13	0	0
2-3-5	0	0.58	-2.03	0	2.47	0
2-3-6	0	0.31	-1	0	0	1.71
2-4-5	0	0.2	0	-3.18	4	0
2-4-6	0	0.11	0	-1.19	0	2.1
2-5-6	0	0.05	0	0	-2.4	3.36
3-4-5	0	0	1.09	-4.9	4.82	0
3-4-6	0	0	0.52	-1.81	0	2.31
3-5-6	0	0	0.18	0	-2.82	3.66
4-5-6	0	0	0	0.95	-4.3	4.36

Copper	1stDEC	2ndDEC	3rdDEC	4thDEC	5thDEC
1-2-3	1.67	-6.21	5.54	0	0
1-2-4	0.77	-2.18	0	2.4	0
1-2-5	0.39	-1.01	0	0	1.61
1-3-4	0.28	0	-2.99	3.69	0
1-3-5	0.14	0	-1.07	0	1.91
1-4-5	0.07	0	0	-2.06	2.98
2-3-4	0	1.24	-4.68	4.42	0
2-3-5	0	0.59	-1.69	0	2.09
2-4-5	0	0.22	0	-2.51	3.28
3-4-5	0	0	1.01	-4	3.99