

証券化と金融危機 ABS CDO のリスク特性とその評価*

藤井 眞理子[†]

竹本 遼太[‡]

概要

米国のサブプライムローン問題から始まった金融市場の大混乱は各国で深刻な景気後退を引き起こしているが、いまだ収束の気配がみえない。この一連の危機で世界の主要な金融機関も大きな打撃を受けているが、金融機関の損失において特徴的なことは、サブプライムなどの住宅ローンを裏付けとする資産担保証券（ABS）を元に作られた債務担保証券（CDO）である ABS CDO の損失率が 6~7 割ときわめて高く、次いで住宅ローン担保証券（RMBS）を中心とする ABS の劣化が著しいことである。

本稿では、標準的な信用リスクのモデルを用い、シミュレーションを通じて証券化商品のリスク特性、特に ABS を担保とする ABS CDO のリスク特性を検証し、今回の危機のメカニズムを理解するとともに今後のリスク管理における課題を論じる。

証券化という構造には、分散化のメリットと表裏の関係でシステムティック・リスクに対する感応度が高いというリスク特性が内在している。このため、大きなショックが発生した時には CDO 証券などの価値が同時に且つ急激に毀損することがある。すなわち、第 1 に、証券化によりメザニン以下のトランシェでは元のローンプールよりテイルリスクが増大する。この特徴は ABS CDO などの重複的証券化によって増幅される。第 2 に、細かいトランシェ分けを行うとトランシェの優先度合いにかかわらず元のプールよりもシステムティック・リスクへの感応度が高くなり、典型的には「クリフ効果」とよばれるような極端な損失率の急上昇がみられる。第 3 に、こうしたテイルリスクおよびシステムティック・リスクに対するクリフ効果などの事象は、劣化するトランシェほど、また、証券化が重なるほど増幅する形で顕在化する。第 4 に、個々のローンのデフォルト確率の増大やデフォルト相関の上昇などの変化が生じた場合には、証券化が繰り返されている場合ほど顕著な影響が生じる。なお、相関の上昇は一斉に悪いことが起きる可能性を高めるので、シニアトランシェのリスクをも高める結果となる。

こうした ABS CDO の特徴が住宅市場の悪化や市場環境の変化の中で顕在化し、大規模な証券化商品の価値の下落につながったのではないかと考えられる。

*本研究は科学研究費補助金基盤研究 (B) の助成による。なお、論文は著者の所属する機関の見解を示すものではない。

[†] 東京大学先端科学技術研究センター、金融庁金融研究研修センター特別研究員

[‡] 株式会社かんぼ生命保険運用企画部

1 はじめに

サブプライムローン問題に端を発する 2007 年からの金融危機は世界的な景気後退に進み、その調整過程が 2009 年の経済見通しを大きく左右する状況にある。米国発の金融危機の底流には住宅ブームとその崩壊というメカニズムが働いているが、それが住宅ローンを供給していた金融機関の不良債権や損失にとどまらず、欧州を含む主要な金融機関の存亡に関わる市場の混乱に至った要因の一つには証券化が関係している。

証券化自体は、米国における住宅金融市場の発展と密接に関連した金融技術であり、これまでは流通市場の拡大を可能とした金融革新としてむしろプラスに評価されてきた。今回、サブプライムローン市場の拡大と同時に進行した（民間）住宅ローン担保証券（RMBS）の急拡大とこれを組み込んだ債務担保証券（CDO）には、どのようなリスクとリターンの特徴があり、大きな混乱につながったのかを明らかにするため、本稿ではこうした資産担保証券（ABS）を裏付けとする ABS CDO のリスク特性をシミュレーションを通じて具体的に検証し、合わせて、リスク管理における今後の課題を論じる。

2007 年、米国から始まった金融危機の結果見込まれる世界全体の金融機関損失見込みは、時期を追って拡大しており、その最終的な帰結はまだ明らかではない。特に、2008 年秋を境に各国の株式市場は一段と下落の度合いを強め、各国の実体経済も急速に悪化している。IMF が推計している金融機関の損失見通しは、2008 年 4 月見通しの最大 9,450 億ドルから 10 月には約 1.5 倍の 1 兆 4,050 億ドルに拡大し、2009 年 2 月には 2.2 兆ドルに達している（IMF, Global Financial Stability Report）¹⁾。損失の商品別内訳が公表されている 2008 年 10 月の見込み額をみると、全体の損失額のうち、サブプライムローンや Alt-A ローン、商業用不動産など、ローンに係る部分の損失見込みは 4,250 億ドルであるのに対し、証券関係は、ABS、ABS CDO の損失を中心に 9,800 億ドルと全体の約 2/3 を占めている。残高に対する損失見込額の比率では、72.5%となる ABS CDO がもっとも高く、ABS でも残高の 2 割近くに及ぶ損失額が見込まれている。イングランド銀行は、不確実性や流動性が回復すれば小さくなるとしつつも、証券市場の資産に係る損失合計を 2008 年 10 月時点での時価評価で 2.8 兆ドル超とみているが、この場合にも証券化商品の価値の毀損が著しい。

いずれの推計でも特徴的なことは、サブプライムなどの住宅ローンを裏付けとする ABS を元に作られた CDO である ABS CDO の損失率（損失見込額 / 残高）が 6~7 割ときわめて高く、次いで RMBS を中心とする ABS の劣化が著しいことである。

本稿では、信用リスクを扱う標準的なモデルを用いてシミュレーションを行うことにより、RMBS および RMBS CDO のキャッシュフローやそのリスクの性質を明らかにする。さらに、住宅価格の動向や金利の変化と関連付けられるシステムティック・リスクがこうした証券化商品に与える影響を分析する。証券化商品においては、プールされる元の資産の個別リスクについては分散効果が働き、個別リスクから大きな影響を受けることはなくなる。しかし、システムティック・リスクについては、むしろ感応度が高まる関係にある。すなわち、証券化という構造においては、分散化のメリットが働く一方でシステムティック・リスクに対しては感応度が高くなるというリスク特性が現れる。このため、大きなショックが発生した場合には CDO 証券などの価値が同時に且つ急激に毀損することが生じ得る。

¹⁾2008 年 4 月から 10 月の見通しにかけて拡大した損失は、事業法人向け貸出やプライムローン、高格付け社債など全般的なリスクの見直しの中で価格低下の影響を間接的に受けた部分が中心となっている。

また、優先劣後構造のためメザニン以下のトランシェでは元のローンプールよりテイルリスクが増大している。この特徴は ABS CDO などの重複的証券化によって増幅される。

今回の危機では、さらに住宅ローンのデフォルト率などのパラメータの見誤りなどもあったと考えられ、これらも ABS CDO のように証券化が繰り返されている場合ほど増幅された形で影響を及ぼすため、全体として大規模な証券化商品の価値の下落につながったのではないかと考えられる。

以下、第 2 節で CDO や ABS CDO の仕組みと本稿で用いる証券化商品の損失モデルについて説明し、第 3 節ではシミュレーションによるリスク分析の結果を示す。第 4 節は、システムティック・リスクを中心とした分析を行う節であり、クリフ効果とよばれる現象が生じる要因を示す。第 5 節では格付け評価との関係を論じ、第 6 節はまとめと課題である。

2 証券化商品の仕組みとモデルの設定

信用リスク、特にデフォルトリスクは、市場リスクとは異なる性質を持っている。事象としては、一回限りの事象であり、一度生じれば回復できない一方向性のリスクである。信用リスクの評価にあたってはポートフォリオの損失分布を求めることが一般的であり、特にストレス時における分布の端の特性が注目される。CDO の格付け評価などにおいても、それぞれのトランシェに発生する損失が重視されている。

本稿では CDO など証券化商品のリスク特性を具体的に検証するため、1 ファクターのガウシアン・コピュラによってデフォルト事象の依存関係を表現する標準的な信用リスクモデルを仮定する。本節では、まず、ポートフォリオの損失分布を求める簡単なシミュレーションのためのモデルの構築について説明する。

2.1 CDO の仕組み：優先劣後構造と重複的な証券化

CDO は、信用リスクのある資産を裏付けとする証券化商品の総称であるが、近年では、派生商品も含む多様な資産を裏付けとして組成されている。一般に証券化商品の担保資産には、クレジットカード債権のような多数の小口債権から、より規模の大きい貸出債権、あるいはクレジット・デフォルト・スワップ (CDS) などのクレジットデリバティブなど、多様な資産が使われている。

2000 年代以降、特に大きく増加したのは、RMBS などを含む ABS を裏付け資産として証券化を行ったタイプの CDO である。CDO においても RMBS と同様に優先劣後構造を持つキャッシュフローが作り出され、信用力の異なる証券として発行される²⁾。

ABS CDO は、CDO のうち、ABS を裏付けとするものを指し、RMBS などが担保となっている。2004～06 年にかけてサブプライムローンの証券化 (サブプライム RMBS の組成) が急増したが、同時に、これらを担保とした ABS CDO の発行額も増加している。図 1 は、担保資産別に見た CDO の発行状況を示している。

ABS も CDO も、ともに優先劣後構造を持っており、ABS CDO は証券化を繰り返した商品になっている。2007 年以降の金融危機では、証券化商品、特に ABS CDO が著しい

²⁾サブプライムローンを証券化した ABS CDO の仕組みや規模については Gorton (2009) 等を参照されたい。

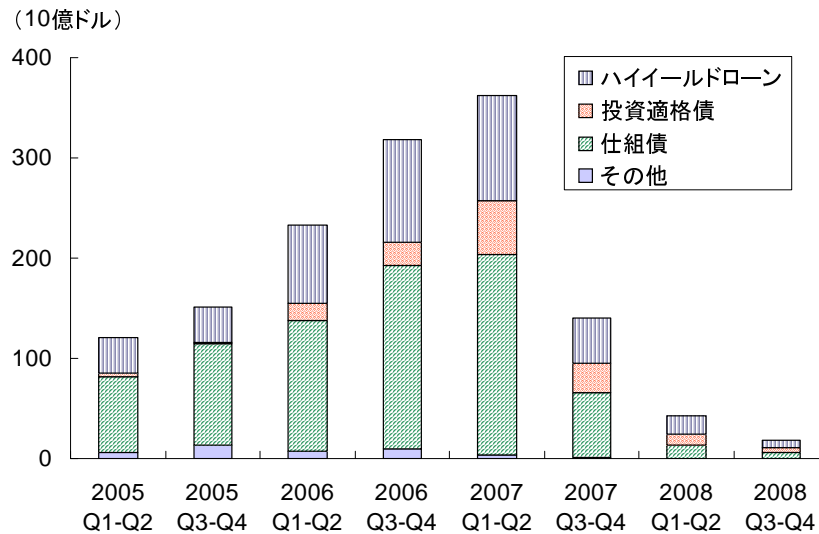


図 1: 担保資産別 CDO の発行額推移

(注) 51%以上を占める担保資産による分類である。仕組債には、RMBS、CMBS、CMO、ABS、CDO、CDS その他の証券化商品を含む。

(資料) 米証券業金融市場協会 (SIFMA)

資産価値の下落を経験しているが、以下ではその理由と考えられる ABS CDO のリスク特性をシミュレーションモデルにより検証してみよう。

このため、まず、優先劣後のある証券化によってどのようなリスク特性が生じるのか、また、これらのトランシェの一部を担保として組成された CDO にはどのような特徴が現れるのかを順に明らかにする。説明の分かりやすさのため、はじめに住宅ローンを多数集めた RMBS を組成し、このリスク特性を論じる。次に、この RMBS の一部のトランシェ (メザニントランシェ) から CDO を組成し、ABS CDO などの重複的な証券化商品にみられる特色を具体的に示すこととする。

2.2 RMBS の損失モデル

いま、時点 t における住宅ローン i の損失額を $L_i(t)$ とすると、 $L_i(t)$ は A_i を住宅ローン i の元本額、 LGD_i を住宅ローン i のデフォルト時の損失率、 τ_i をローン i がデフォルトする時刻として、次のように表すことができる。

$$L_i(t) = A_i \times LGD_i \times \iota_{\{\tau_i \leq t\}} \quad (1)$$

ここで、 ι は定義関数であり、時刻 t がデフォルト時刻 τ より後の場合 (すなわち、デフォルトした場合) に 1 の値、そうでなければ 0 をとる。簡単のため、本稿では住宅ローンの期限前償還は考えないものとする³⁾。

³⁾一般の RMBS では、金利低下に伴う期限前償還がキャッシュフローに大きな影響を与える要因になるが、サブプライムローンの場合には、その多くが変動金利であり、期限前償還には高い手数料がかかるなど、現実にもその動向が大きな影響を与える状況とはなっていないようである。

このとき、 N 件の住宅ローンから構成されたローンプール全体の合計損失 L は、

$$L(t) = \sum_{i=1}^N L_i(t) = \sum_{i=1}^N A_i \times LGD_i \times \mathbb{1}_{\{\tau_i \leq t\}} \quad (2)$$

となる。式 (2) より損失分布を求めるためには、各住宅ローンの元本 A_i は既知として、各住宅ローンの損失率 LGD_i とデフォルト時刻 τ_i について何らかの仮定をおくことが必要となる。一般に、個々の住宅ローンのデフォルトは、債務者固有の理由によるばかりではなく、経済全体の影響も受ける。このため、住宅ローンにおけるデフォルトの発生は相互に依存していると考えられ、個別のローンのデフォルトが全体としてどのように生じるのかを知るためには、すべてのローンのデフォルト時刻の同時分布 $G(\tau_1, \dots, \tau_N)$ を考えることが重要となる。

$G_i(\tau_i)$ をデフォルト時刻 τ_i の周辺分布とすると、デフォルト時刻の同時分布は、個別ローンのデフォルト時刻とデフォルト時刻同士の依存関係によって一般には複雑な関数になり得る。近年、扱いやすさ等の観点から広く使われている方法は、各デフォルトに共通のファクターを考えるとともに、デフォルト相互の依存関係を扱いやすい多変量正規分布の形に従うよう変換してモデル化するファクター・コピュラ・アプローチと呼ばれる手法である⁴⁾。これは、デフォルト時刻の条件付き独立性を仮定し、個別ローンのデフォルト時刻の周辺分布とデフォルト時刻同士の依存関係を分離して表現するコピュラの考え方に基づいている。本稿でもこの手法を使い、コピュラの中でも標準的なモデルであるガウシアン・コピュラモデルを用いてデフォルト時刻の同時分布を求める⁵⁾。

具体的には、共通ファクター V が与えられた下で、個々のローン i ($i = 1, \dots, N$) のデフォルト時刻 τ_1, \dots, τ_N は互いに独立となることを仮定する。すなわち、 $G_i(\tau_i | V)$ を個別ローンに関するデフォルト時刻の条件付き周辺分布とすると、次の関係が成り立つことを仮定する。

$$G(\tau_1, \dots, \tau_N | V) = \prod_{i=1}^N G_i(\tau_i | V) \quad (3)$$

この仮定の下では、個別ローンに関するデフォルト時刻の条件付き周辺分布 $G_i(\tau_i | V)$ が分かればプール全体の同時分布を求めることができる。なお、デフォルト時刻の同時分布は $G(\tau_1, \dots, \tau_N | V)$ を共通ファクター V の分布関数 G_V によって積分することで得られ

⁴⁾ファクター・コピュラ・アプローチによる CDO の価格付けについては Laurent and Gregory (2005) 等を、ポートフォリオの信用リスクモデルへのコピュラの利用については Li (2008) 等を参照されたい。

⁵⁾「コピュラ」は接合関数とも訳されるが、周辺分布の情報を保持しつつ、多変数の同時分布関数を扱いやすい形に表現するものである。McNeil et al. (2005) によると、商用の信用リスクモデルの多くはガウシアン・コピュラに基づいている。ファクター・コピュラモデルはシミュレーション目的での利用が容易であり、1ファクターのガウシアン・コピュラモデルが実務において広く利用されている理由として、アセット相関 ρ という 1 つのパラメータでデフォルト事象の依存関係を表現できるという点が大きい。

ただし、ガウシアン・コピュラモデルはデフォルトリスクの依存関係を扱うための一つの方法にすぎず、多様な依存関係を表現するにあたって限界があることには留意が必要である。例えば、ガウシアン・コピュラは分布の裾において二つの確率変数が漸近的に独立となるため、分布の裾で起こる極値事象が同時に発生する確率を実際よりも過小に評価してしまうおそれがある。

また、現行の商用モデルの多くは、デフォルトの依存関係を表現するためのモデルパラメータを統計的手法により推定していない点も問題といえる。これは、特に高格付けの企業に対して、信頼に足るパラメータ推定値が得られるだけのデフォルト実績データが十分に無いという理由によるものである。Heitfield (2008) は、十分な量のデータがない場合に上位のトランシェほど価格評価が正確に行えないことを指摘している。

る。すなわち、

$$\begin{aligned} G(\tau_1, \dots, \tau_N) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau_1, \dots, \tau_N | V = v) dG_V(v) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N G_i(\tau_i | V = v) dG_V(v) \end{aligned} \quad (4)$$

となる。

各ローンの条件付き独立なデフォルト時刻の周辺分布を求めるため、標準正規分布に従う状態変数 X_i を新たに導入し、デフォルト時刻 τ_i を

$$\tau_i = G_i^{-1}(\Phi(X_i))$$

と表すものとする。なお、 Φ は標準正規分布の分布関数である。共通ファクター V が与えられた下で X_1, \dots, X_N が条件付き独立であれば、 τ_1, \dots, τ_N も条件付き独立となるため、そのような状態変数 X_i を式 (5) の形でモデル化する。

$$X_i = \sqrt{\rho_i}V + \sqrt{1 - \rho_i}\varepsilon_i \quad (i = 1, \dots, N) \quad (5)$$

ここで、共通ファクター V は標準正規分布に従うと仮定し、また、 V と独立な個別リスク ε_i も標準正規分布に従うと仮定する⁶⁾。これは、共通要素を1つ考える1ファクターのガウシアン・コピュラ・アプローチとよばれる手法である。パラメータ $\rho_i \in [0, 1]$ は状態変数間の相関を定めるパラメータである。状態変数 X_i はデフォルト時刻を決定付けることからローンの借り手 i の資産価値を表していると解釈することもでき、 ρ_i はアセット相関とよばれることもある。なお、状態変数間の相関 ($\text{Corr}(X_i, X_j)$) はデフォルト時刻間の相関 ($\text{Corr}(\tau_i, \tau_j)$) と一対一に対応するものの、必ずしも同じ値ではない点に留意する必要がある⁷⁾。

このとき、デフォルト時刻の条件付き周辺分布 $G_i(\tau_i | V)$ は、

$$\begin{aligned} G_i(\tau_i | V = v) &= \text{Prob}\{X_i \leq \Phi^{-1}(G_i(\tau_i)) | V = v\} \\ &= \text{Prob}\left\{\varepsilon_i \leq \frac{\Phi^{-1}(G_i(\tau_i)) - \sqrt{\rho_i}v}{\sqrt{1 - \rho_i}}\right\} \\ &= \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(G_i(\tau_i)) - \sqrt{\rho_i}v}{\sqrt{1 - \rho_i}}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

として求まる⁸⁾。したがって、ローンポートフォリオのデフォルトに関する上のようなモデル化において、住宅ローンプール全体の損失分布を求めるには、次に挙げる3つの要素に関する仮定が重要となる。

⁶⁾ $G_i(\tau_i)$ は区間 $[0, 1]$ の一様分布に従うため、 $X_i = \Phi^{-1}(G_i(\tau_i))$ は標準正規分布に従う。

⁷⁾ 補論2において、これら相関の違いについて簡単な設定の下で考察を行う。なお、 $\text{Corr}(X_i, X_j) = \sqrt{\rho_i\rho_j}$ であり、各ローンの相関パラメータが一定 (ρ) と仮定すれば $\text{Corr}(X_i, X_j) = \rho$ となる。相関パラメータを $\rho_i = a_i^2$ と置き換えて、 $X_i = a_iV + \sqrt{1 - a_i^2}\varepsilon_i$ と定式化されることも多い。このときには、例えば ρ_i が 0.1 であれば a_i は 0.3 程度となる。モデルの考え方に違いはないが、パラメータ値についてはどちらの相関パラメータによるのかに注意が必要である。

⁸⁾ 式 (6) を式 (4) に代入すると、デフォルト時刻の同時分布はガウシアン・コピュラとなることが分かる (Li (2000))。

- 各住宅ローンのデフォルト時損失率： LGD_i ($i = 1, \dots, N$)
- 各住宅ローンのデフォルト時刻の周辺分布： $G_i(\cdot)$ ($i = 1, \dots, N$)
- 各住宅ローンのデフォルト時刻に関する相関パラメータ： ρ_i ($i = 1, \dots, N$)

本稿では ρ_i をデフォルト相関とよぶこととし、簡単化のため、その値は i によらず一定であると仮定する。

2.3 RMBS および CDO の損失計算

以上のようなデフォルトのモデルを持つ個々の住宅ローンから RMBS を組成する。RMBS は、シニア、メザニン、エクイティにトランシェ分けされることとし、各トランシェの元本推移は次の手順に従って求める。

まず、住宅ローンから支払われた金利の合計から RMBS の各トランシェの支払いクーポン合計を差し引いた額が超過スプレッドとなり、RMBS エクイティの元本を増額させる。一方、各住宅ローンのデフォルトを 1 ファクターのガウシアン・コピュラモデルを用いてシミュレートし、デフォルトした住宅ローンについては、その損失額の合計をローンプールのデフォルト損失額として RMBS エクイティの元本から減額する。このとき、RMBS エクイティの元本がローンプールのデフォルト損失額よりも小さければ、不足する分だけ RMBS メザニンの元本を減額する。さらに不足する場合（ローンプールに生じたデフォルト損失額が RMBS メザニンの元本でも補えない場合）には、その分だけ RMBS シニアの元本を減額することになる。

CDO は、上記により組成された RMBS のいずれかのメザニントランシェから組成され、RMBS と同様、シニア、メザニン、エクイティにトランシェ分けされることとする。CDO の各トランシェの元本推移も同様の計算手順で求められる。CDO の超過スプレッドは、担保である RMBS メザニンの支払いクーポン合計から CDO の各トランシェに対する支払いクーポンの合計額を差し引いた額となる。以上の計算の詳細は、補論 1 に示している。

3 証券化商品のリスク特性：シミュレーションによる分析

本節では、サブプライム RMBS を担保としていた CDO にはどのようなリスク特性があるのかを考察するため、第一段階としてサブプライム RMBS のトランシェごとのリスク特性について、第二段階としてサブプライム RMBS のメザニントランシェから組成した仮想の RMBS CDO について、それぞれシミュレーションによってリスク特性を検証する。

3.1 シミュレーションの設定

第一段階の RMBS は N 件の住宅ローンから組成されることとし、この RMBS のメザニントランシェをさらに M 個集め、CDO として証券化することを考える。ベースケースの RMBS は、シニア、メザニン、エクイティの 3 段階の構造を持つとし、これらのうちの RMBS メザニンから新たな CDO を組成すると想定する。CDO においても、同様にシニ

ア、メザニン、エクイティのトランシェ分けを行うこととし、優先劣後構造の設定による信用補完のあり方が最終的な持分のキャッシュフロー特性に及ぼす影響を分析する。すなわち、

- 各 RMBS は重複しない N 件の住宅ローンを担保として組成される、
- 組成された RMBS メザニンの M 個を裏付け資産とする CDO を考える、
- CDO および各 RMBS はシニア、メザニン、エクイティの 3 つのトランシェを持つ、

とする。なお、単純化のため、住宅ローン、RMBS、CDO のいずれにおいてもクーポンはゼロとする⁹⁾。トランシェ分けにあたっては、格付機関のレポートなどを参考に、シニアについてはデフォルト発生確率（当該トランシェにデフォルトが発生する確率）が 1% 程度となるようなトランシェ分けを設定し、エクイティには当初元本の 10% を充てた。このような格付方法が適切であるかどうか、また、トランシェ分けをどのように行うかは、CDO の各トランシェのリスク特性に影響してくるが、具体的な論点については、後の節で論じる。

3.2 シミュレーションの条件

はじめに住宅ローンプールの損失率分布を以下の条件の下でシミュレートする。ただし、これらの条件は現実のデータから推定したものではなく、証券の性質を明らかにするために便宜上おいた値である。

- 担保住宅ローン件数は 1,000 件とする ($N = 1,000$)。与信額の等しい均質ポートフォリオとする。
- 各ローンのデフォルト確率は毎年 3%、各ローンの回収率は 50% ($LGD = 0.5$) でいずれも一定とする。
- デフォルト相関は 0.1 ($\rho = 0.1$) で一定と仮定する。
- 住宅ローン、RMBS、CDO の満期はすべて 5 年とする。

モンテカルロ・シミュレーションの回数は 10,000 回、擬似乱数の発生アルゴリズムは Multiply-With-Carry 法を用いる¹⁰⁾。

3.3 証券化商品のリスク特性：シミュレーション結果

はじめに住宅ローンプールの性質を示し、その上でトランシェ分けされた場合との比較を明らかにしておこう。

⁹⁾クーポンを考えても基本の構造は変わらないと考えられる。実際には、価格評価の際に優先劣後以外の信用補完、例えば超過スプレッドの設定なども含め、担保資産のクーポンを与件として証券化商品のクーポンと価格が同時決定されることになる。本稿では、プールあるいはトランシェの損失見込みを評価しようとしているため、価格の問題について、この段階で特定の仮定はおいていない。

¹⁰⁾シミュレーションにはプログラミング言語 Ox を利用し、既定の設定である乱数生成方法を用いた。

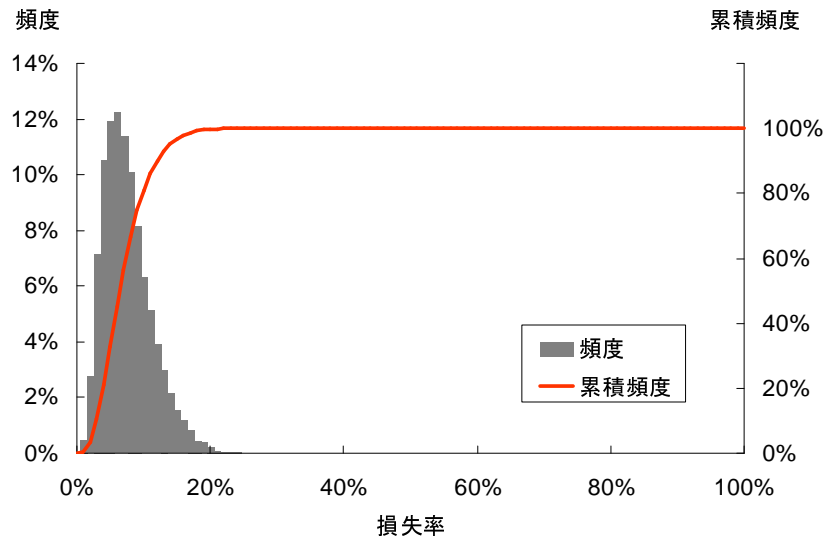


図 2: 住宅ローンプールの損失分布

3.3.1 住宅ローンプールと相関

図 2 は、住宅ローンプールの満期時点（5 年後）における損失率分布を示したグラフである。個別ローンのデフォルト確率を毎年 3%としたときのローンプールの平均的な損失率は約 7% となる。分布の 99%点、すなわち累積頻度が 99%となる点に対応する損失率をみると約 20%となっているので、この住宅ローンプールを裏付けとして組成される RMBS の元本全体の 80%分については、優先劣後構造を利用した信用補完によって損失が発生する確率を 1%程度に抑えることができる¹¹⁾。

すでに述べたように、個別ローンのデフォルトが相関する程度 ρ の大きさが住宅ローンプールの損失分布の形状を左右する。図 3 は相関の程度 ρ の大きさをそれぞれゼロ、0.1、0.5 と変化させた場合の損失分布を示している。図から分かるように、無相関の場合にはほとんどのケースが平均的な損失率のあたりに集中して生じるが、（正の）相関が大きくなるほど分布の最頻値の損失率は左、すなわち小さい値となるが、その分、平均より大きな損失率が発生する頻度が高くなっていく。トランシェ分けされた場合には、相関が大きいほど、よい事象、あるいは悪い事象がまとまった形で生じる確率が高くなるため、シニアではむしろ悪影響を被る形となり、エクイティでは改善する方向に変化する。この点は、3.4 節において、改めて確認する。

3.3.2 デフォルトの発生確率と信用補完の関係

上記で示したように、ここでは元本の 80%についてデフォルト発生確率を 1%に抑えることができるので、RMBS について、シニアが 80%、メザニンが 10%、エクイティが 10%となる優先劣後構造を設定しよう。このときの各トランシェの損失率分布は、図 4、図 5 に示される形となる。

¹¹⁾Greenlaw et al. (2008) によると、2005、2006 年に行われたサブプライムの証券化では約 80%がトリプル A のトランシェと格付けされていたという。

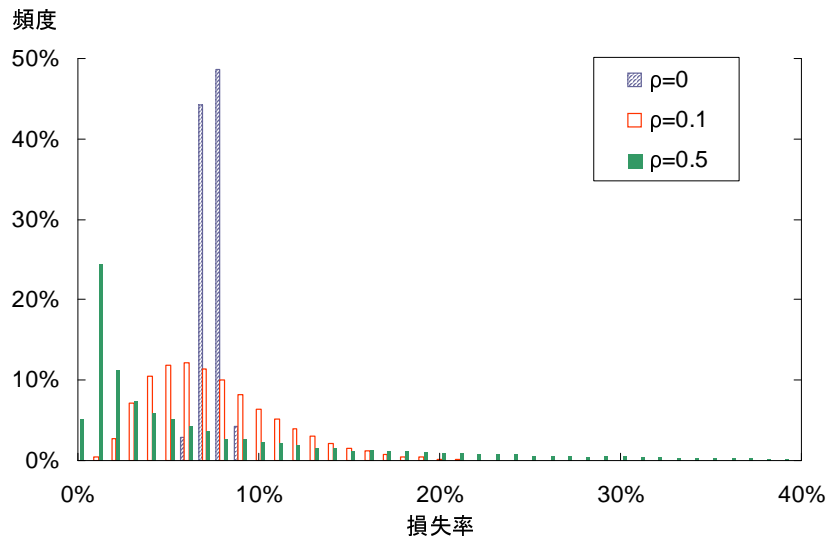


図 3: デフォルト相関と損失分布の関係

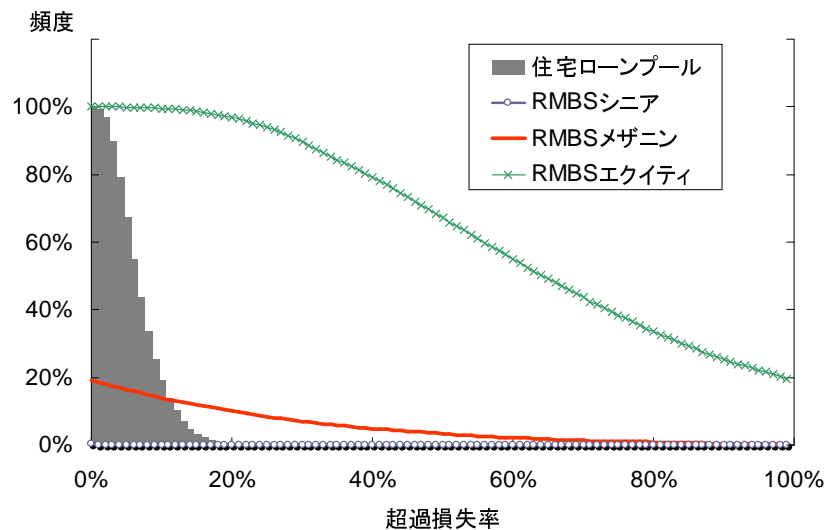


図 4: RMBS の各トランシェの損失分布

(注) 損失率がある値 (横軸の超過損失率) を超過する確率を表す。なお、損失率が 100% を超過する確率は常にゼロであるため、損失率 100% に対応する点は図中にプロットしていない。

図 4 は、各トランシェの損失率がある値を超える確率 (超過損失となる確率) を表している。例えば損失率が 0% を超える (何らかの損失が発生する) 確率は、エクイティおよびローンプール全体の場合には 100% であるが、メザニンの場合には 19%、シニアでは 0.2% である。また、損失率が 20% を超える確率は、ローンプール全体では 0.2% と極めて小さくなるが、エクイティでは 97%、メザニンでは 10% と高いことが分かる。なお、シニアの場合にはほぼ 0% となる。したがって、エクイティ部分が高い損失を吸収し、シニアとメザニンでの平均的な損失率を小さくしていること、ならびに、エクイティとメザニン

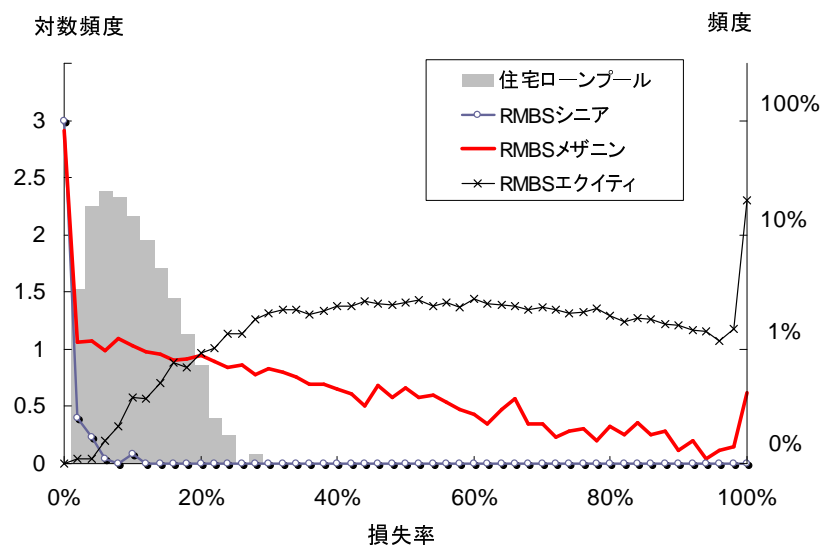


図 5: RMBS の各トランシェの損失分布 (対数密度)

は元のローンプールに比べて大きな損失の発生確率が著しく高いことが分かる。

この点を、図 4 と同一のシミュレーションに基づく頻度の分布で示したものが図 5 である。損失率の高い領域である図の右端の頻度の状況を分かりやすくするため、頻度の値をスケール変換して示しているが、分布の裾の事象の頻度 (損失率の高い端のほうの領域における事象の発生確率) は、メザニン、エクイティの場合には元のローンプールの場合よりかなり高くなるのが分かる。ここでは、こうした分布の端にあるような、滅多には起こらないが生じるときわめて大きな損失の発生するリスクを「テイルリスク」とよぶこととする¹²⁾。(なお、以下では、図の見易さから頻度を累積した分布関数で示す図 4 のような超過損失率のグラフを使うこととする。)

3.3.3 ベースケースでの RMBS と CDO の分析

次に、以上の RMBS のメザニン部分 (RMBS メザニン) 10 個から組成される CDO について、下記の条件のもとでその損失率分布のシミュレーションを行う。すなわち、

- CDO の原資産は 10 個 ($M = 10$) の RMBS とし、この RMBS メザニンから CDO を組成する

と想定する¹³⁾。

図 6 は CDO の担保となる RMBS メザニン全体のプールの満期時点における損失率分布を表す。分布の 99% 点は損失率がおよそ 70% の点に対応しているため、5 年間の累積デフォルト確率が 1% 程度となる高格付けのトランシェは、全体の 30% 分程度が組成できる。

¹²⁾ 「テイルリスク」は収益率分布などの場合には正規分布より分布の裾が厚いことを指したり (ファットテイル)、頻度はきわめて小さいが生じると多額の損失をもたらす事象を意味したり、分布の裾に不確実性が高いことを言う場合もある。

¹³⁾ モンテカルロ・シミュレーションの条件は前と同じである。

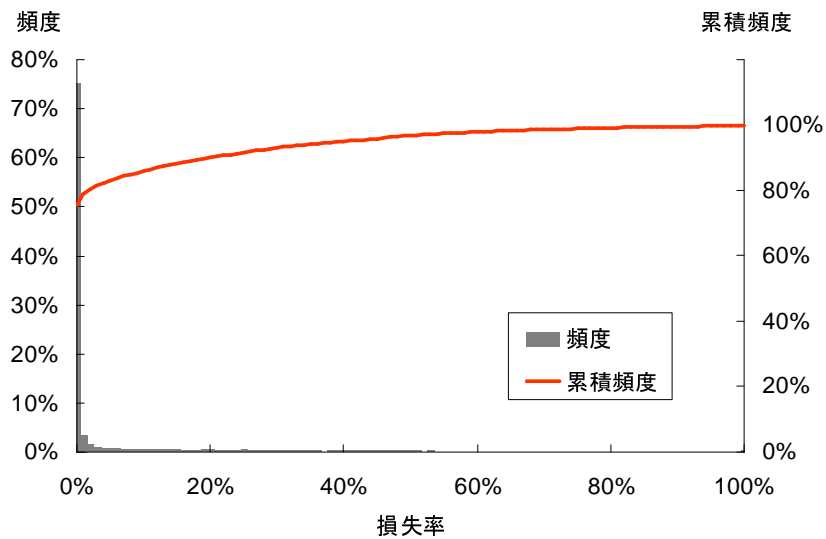


図 6: CDO の裏付けとなる RMBS メザニンの合計損失分布

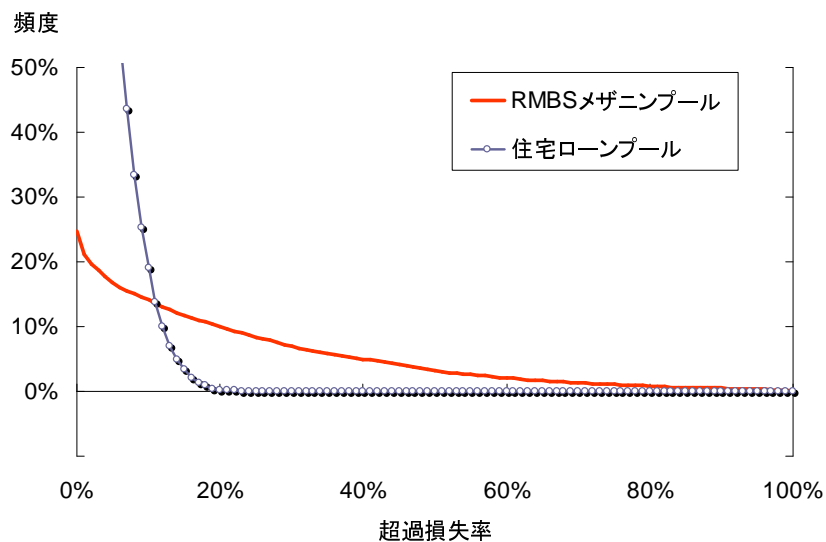


図 7: 住宅ローンプールと RMBS メザニンプールの損失分布

(注) 損失率がある値 (横軸の超過損失率) を超過する確率を表す。

そこで、CDO のトランシェ分けにおいてもデフォルトの発生確率が 1%程度に抑えられる分をシニアとして 30%、残りについて、エクイティを 10%とり、メザニンを 60%とする。

図 7 に、RMBS の担保となる住宅ローンプール全体の満期時点における損失分布と CDO の担保となる RMBS メザニンプールの損失分布を超過損失率の形で示す。住宅ローンプール全体の損失分布と比較すると、RMBS メザニンプールの損失分布は裾が厚いため、CDO のキャッシュフローは元の RMBS プールよりテイルリスクが大きい (極端な損失が発生す

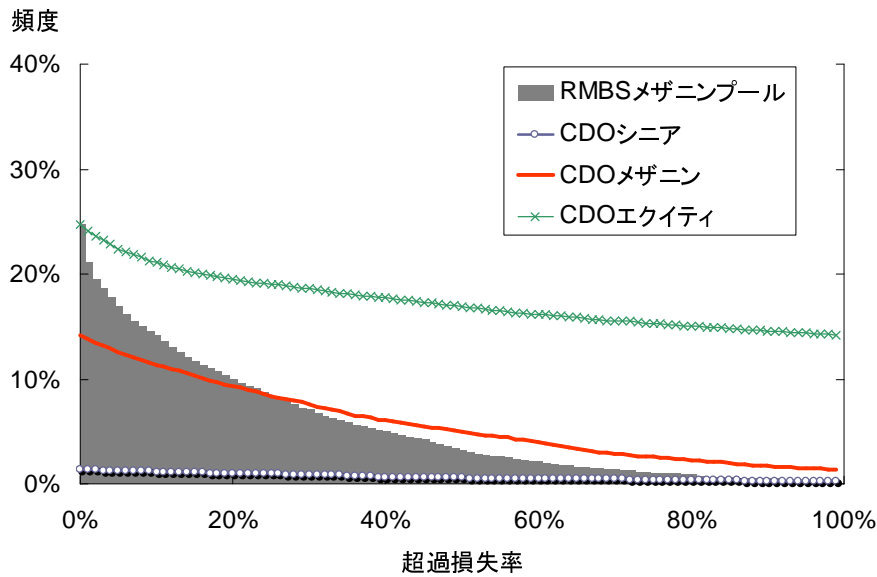


図 8: CDO の各トランシェの損失分布

(注) 損失率がある値(横軸の超過損失率)を超過する確率を表す。なお、損失率が100%を超過する確率は常にゼロであるため、損失率100%に対応する点は図中にプロットしていない。

表 1: ベースケースにおけるリスク指標

	デフォルト発生確率	期待損失率	最頻損失率	99%VaR	99%ES	2 割損失確率
ローンプール	100.0%	7.1%	6%	17.8%	19.5%	0.3%
RMBS シニア	0.2%	0.0%	0%	0.0%	0.0%	0.0%
RMBS メザニン	19.0%	5.4%	0%	77.5%	90.0%	10.2%
RMBS エクイティ	100.0%	65.2%	100%	100.0%	100.0%	97.0%
CDO シニア	1.3%	0.7%	0%	20.3%	63.3%	1.0%
CDO メザニン	14.1%	5.8%	0%	100.0%	100.0%	9.3%
CDO エクイティ	24.7%	17.4%	0%	100.0%	100.0%	19.6%

る確率が高い) ことが分かる¹⁴⁾。

図 8 は、CDO の各トランシェの満期時点における損失率分布を表したものである。5 年以内に何らかの損失が発生する確率は元の RMBS メザニンプールに比べるとおおむね低くなっているが、CDO のメザニンを元の RMBS メザニンプールと比較すると、40%を超えるような大きな損失率の発生する確率で見ると CDO のメザニンのほうが高くなっている。

以上の計算結果をまとめた表 1 をみれば、RMBS のデフォルト発生確率はシニア、メザニン、エクイティでそれぞれ 0.2%、19.0%、100.0%であるが、このメザニンから組成した CDO でのデフォルト発生確率はシニア、メザニン、エクイティでそれぞれ 1.3%、14.1%、24.7%となる。

¹⁴⁾これはシンセティック CDO を担保に持つ CDO スクエアードに関して指摘されている特徴と同様である (Whetten and Adelson (2005))。

表1には、担保資産プールに係るリスク指標として、1)デフォルト発生確率(正の損失が発生するかどうかの確率)、2)損失率の平均値(期待損失率)と最頻値(最頻損失率)、3)99%バリュアットリスク(VaR)、4)99%期待ショートフォール(ES)(99%分位点より損失率が高いサンプルの平均値)、5)当初元本の2割に相当する損失が発生する確率、を示した。最頻損失率と期待損失率の関係は分布の左右での歪みの程度を示しており、3)~5)はリスク管理に関連した指標である。表1から、RMBSメザニンから組成したCDOは、当初のローンプールと比較してもRMBSのメザニンと比較しても損失分布の裾が厚く、テイルリスクの大きいことが分かる。

全体をまとめれば、第1に、元の住宅ローンプールは損失率の高い領域での確率密度が小さく、ほとんどの場合、損失率は20%以下にとどまっている。RMBSメザニンになると、期待損失率や最頻損失率はそれぞれ5.4%、0%と小さくなるが、分布の裾に関わる3)から5)の3つのリスク指標はすべて悪化し、テイルリスクが拡大する。

第2に、一段階目のシニアトランシェであるRMBSシニアは、リスク指標を含め、ここで示した指標に関してはリスクが高くなっている点は見当たらない。他方、RMBSメザニンを担保として組成されたCDOのシニアトランシェになると、デフォルト発生確率や期待損失率、最頻損失率はいずれも1%程度に抑えられているものの、99%VaR等の裾に関するリスク指標は、RMBSシニアより悪化しているだけではなく、元の住宅ローンプールよりテイルでのリスクが大きい形に変化している。例えば、RMBSシニアの損失分布の99%点が0%の損失であるのに対し、CDOシニアの損失分布の99%点は元本の20.3%の損失である。これは、担保資産がRMBSメザニンという当初の住宅ローンプール全体よりテイルリスクの高い資産であることによる結果であり、トランシェ分けという信用補完によって一定の期待キャッシュフローは確保されるものの、悪いケースでの損失率が極めて高い形となるリスク・パターンに変化したことが分かる。

第3に、CDOのメザニン部分はこうしたテイルリスクが高いという特徴をより鮮明な形で示す分布となっている。

RMBSメザニンから組成されたCDOは、すでにみたように、CDOシニアであっても、RMBSシニアよりすべての指標でリスクが高くなっている。元のローンプールと比較すると、デフォルト確率や期待損失率は低く抑えられているが、分布の端のほうでの損失がかなり大きく、99%期待ショートフォールは63.3%とかなり高い値になる。CDOのメザニン部分になると、こうした傾向はさらに顕著になる。デフォルト発生確率は元のプールより小さく、期待損失率もほぼ元の住宅ローンプール並みであるが、元のプールの99%VaRが17.8%であるのに対し、CDOのメザニンは100%を失う結果となっており、シミュレーション上は10回に1回は2割の損失が発生する。

3.4 リスク指標とそのパラメータ感応度

次に、住宅ローンプールのキャッシュフローの性質を変えるような変化が生じた場合の証券化商品への影響をみてみよう。表2は、個々の住宅ローンの平均的なデフォルト確率が1.5倍に上昇した場合(デフォルト確率が毎年3%→4.5%)のリスク指標とベースケースからの変化を示す。表の()内は、いずれも表1に示したベースケースのCDOとの比較(%ポイント差)である。RMBSとCDOのトランシェ分けは前節と同様に、RMBS

表 2: 住宅ローンのデフォルト確率上昇に対するリスク指標の感応度

	デフォルト発生確率	期待損失率	最頻損失率	99%VaR	99%ES	2割損失確率
ローンプール	100.0% (±0.0%)	10.3% (+3.3%)	8% (+2%)	23.4% (+5.6%)	25.7% (+6.2%)	3.4% (+3.2%)
RMBS シニア	3.4% (+3.1%)	0.1% (+0.1%)	0% (±0%)	4.2% (+4.2%)	7.2% (+7.1%)	0.0% (+0.0%)
RMBS メザニン	47.1% (+28.1%)	19.0% (+13.7%)	0% (±0%)	100.0% (+22.5%)	100.0% (+10.0%)	31.8% (+21.5%)
RMBS エクイティ	100.0% (0.0%)	83.3% (+18.1%)	100% (±0%)	100.0% (±0.0%)	100.0% (±0.0%)	99.5% (+2.6%)
CDO シニア	9.0% (+7.7%)	5.8% (+5.1%)	0% (±0%)	100.0% (+79.7%)	100.0% (+36.7%)	7.5% (+6.5%)
CDO メザニン	39.1% (+25.0%)	21.4% (+15.6%)	0% (±0%)	100.0% (±0.0%)	100.0% (±0.0%)	30.3% (+21.0%)
CDO エクイティ	55.3% (+30.7%)	44.8% (+27.3%)	0% (±0%)	100.0% (±0.0%)	100.0% (±0.0%)	48.4% (+28.7%)

(注) ()内はベースケースからの変化を表す。

の場合、シニア：メザニン：エクイティ = 80%：10%：10%、CDOの場合、シニア：メザニン：エクイティ = 30%：60%：10%である。

元のローンプールの期待損失率は、約 1.5 倍の 10.3% となる。RMBS をみると、シニア部分にはデフォルト発生確率を 1%程度に抑えるというトランシェ分けの仮定からほとんど影響が及んでいないが、メザニン以下ではシニアの安全が確保される分、増幅的な影響が生じている。変化の程度でみると、メザニン部分への影響が著しい。(エクイティ部分は当初よりデフォルト吸収の役割を果たしているため、指標によっては変化がない。)

大きな影響を受けた RMBS メザニンを原資産とした CDO にあっては、シニア部分であってもデフォルト確率が 9% 程度となるため、もはや「シニア」トランシェとはいえないキャッシュフロー・パターンとなっている。現実には、ここで大きな格下げが起こることになるだろう。期待損失率でみると、いずれの場合もシニア、メザニン、エクイティと下位になるほどデフォルト確率上昇の影響は増大し、一次証券化である RMBS と二次証券化である CDO を比較すると、いずれのトランシェにおいても CDO のほうが変化が大きくなっている。

表 3 は、住宅ローンのデフォルト相関を大きくした場合 (デフォルト相関 ρ を 0.1 \rightarrow 0.5) のリスク指標とベースケースからの変化である。元の住宅ローンプールにおいては、期待損失率は変わらないものの、分布が左方向に歪む結果、運が良ければ損失が生じないケースが生じてくる一方、テイルリスクが高くなる。

これを前提に RMBS の各トランシェへの影響をみると、シニア、メザニンのリスク指標は悪化する一方、エクイティについてはリスク指標の悪化を伴わないデフォルト発生確率と損失率の改善という逆の影響がみられる。RMBS メザニンから組成した CDO の指標は全般的に悪化しているが、特に注意すべき点は、CDO のシニアトランシェの損失分布において 99% 点の損失率が 100% に跳ね上がっていることであり、この点は後で論じる高格付けトランシェの「クリフ効果」とよばれる現象と関係している。

一般的には、個別ローンの相関が高くなると証券化商品におけるシニアの損失率は増大

表 3: 住宅ローンのデフォルト相関上昇に対するリスク指標の感応度

	デフォルト発生確率	期待損失率	最頻損失率	99%VaR	99%ES	2割損失確率
ローンプール	94.9%	7.1%	1%	39.4%	43.2%	10.7%
	(-5.2%)	(+0.1%)	(-5%)	(+21.7%)	(+23.7%)	(+10.4%)
RMBS シニア	10.6%	1.2%	0%	24.3%	29.0%	1.8%
	(+10.4%)	(+1.2%)	(±0%)	(+24.3%)	(+28.9%)	(+1.8%)
RMBS メザニン	24.9%	16.9%	0%	100.0%	100.0%	20.8%
	(+5.9%)	(+11.5%)	(±0%)	(+22.5%)	(+10.0%)	(+10.6%)
RMBS エクイティ	94.9%	45.1%	100%	100.0%	100.0%	59.7%
	(-5.2%)	(-20.0%)	(±0%)	(±0.0%)	(±0.0%)	(-37.3%)
CDO シニア	13.9%	12.1%	0%	100.0%	100.0%	13.3%
	(+12.6%)	(+11.4%)	(±0%)	(+79.7%)	(+36.7%)	(+12.3%)
CDO メザニン	22.8%	17.9%	0%	100.0%	100.0%	20.4%
	(+8.6%)	(+12.2%)	(±0%)	(±0.0%)	(±0.0%)	(+11.1%)
CDO エクイティ	27.0%	24.3%	0%	100.0%	100.0%	25.2%
	(+2.4%)	(+6.8%)	(±0%)	(±0.0%)	(±0.0%)	(+5.6%)

(注) ()内はベースケースからの変化を表す。

表 4: 裏付け RMBS の個数増加に対するリスク指標の感応度

	デフォルト発生確率	期待損失率	最頻損失率	99%VaR	99%ES	2割損失確率
CDO シニア	1.6%	0.9%	0%	38.3%	75.6%	1.2%
	(+0.3%)	(+0.2%)	(0%)	(+17.9%)	(+12.3%)	(+0.2%)
CDO メザニン	14.2%	6.1%	0%	100.0%	100.0%	9.5%
	(+0.0%)	(+0.3%)	(0%)	(0.0%)	(0.0%)	(+0.2%)
CDO エクイティ	29.9%	17.8%	0%	100.0%	100.0%	20.1%
	(+5.3%)	(+0.3%)	(0%)	(0.0%)	(0.0%)	(+0.5%)

(注) ()内はベースケースからの変化を表す。

し、エクイティの損失率は減少する傾向が指摘されており、メザニンについては優先劣後の設定等によりいずれにもなる可能性があるとして理解される。

3.5 裏付け RMBS に係る個別リスクの検証

以上で示したシミュレーションにおいては、それぞれの RMBS の基本的な性質は共通とした。しかし、現実には、RMBS ごとに地域やモーゲージ会社の審査基準が異なるなど、固有のリスクが反映されている可能性がある。このような RMBS プール固有の性質にかかる個別リスクが CDO に及ぼす影響を検証するため、CDO の原資産である RMBS の個数をベースケースの 10 から 100 に増やした場合の分散効果を確認した。100 個の RMBS から組成した CDO トランシェのリスク指標を表 4 に示す。

デフォルトが発生する確率はやや高くなるが、期待損失率をはじめとする多くの指標に基本的な変化はみられない。本稿のように均質ポートフォリオという単純化の仮定の下では、個々の RMBS が十分な分散化を達成していれば、多数の RMBS を集めて CDO とす

ることによって一層の分散効果が得られるとは必ずしもいえないことが分かる¹⁵⁾。

4 ABS CDO のクリフ効果

本節では、証券化商品の組成における2つの特徴、すなわち、多数の担保資産をプールすることによる分散化とポートフォリオのランシェ分けが及ぼす影響をシステムティック・リスクと非システムティック・リスクの観点から分析する¹⁶⁾。

4.1 証券化によるシステムティック・リスクと損失の関係

図9は、1,000個の住宅ローンを証券化したRMBSのメザニンを10個集めて再証券化したCDOのランシェの損失率を示したものである。ここではランシェの規模を、RMBSの場合、シニア：メザニン：エクイティ = 80%：10%：10%、CDOについてはランシェ分けがメザニン部分に及ぼす影響に焦点を当てるために、メザニンの厚みを薄くして、30%：10%：60%とした。

図9の左上図から右上図への過程は住宅ローンプールからRMBSメザニンへのランシェ分けである。RMBSのメザニン部分を元の住宅ローンプールと比較すると、一定までのシステムティック・リスクに対してはきわめて小さい損失率にとどまるが、市場環境が悪化する等のシステムティック・リスクが高い状況になると急速に損失率が上昇する。

次に、右上図から左下図への過程はRMBSメザニンを多数集める分散化の過程であり、あるシステムティック・リスクの値に対して、(縦軸方向の)損失率のばらつきが小さくなっていることから、証券化の特徴の一つである分散化は非システムティック・リスクを低減させることが確認できる。左下図から右下図への変化がRMBSプールからCDOへのランシェ分けの結果を示している。ランシェ分けは、システムティック・リスクへの耐性を高める(システムティック・リスクがより大きな値でないと損失が発生しなくなる)とともに、システムティック・リスクへの感応度を高くする(損失が発生し始めた後のシステムティック・リスクの変化に対する損失率の傾きが急になる)ことが示されている。

また、証券化を繰り返すことによって分散化およびランシェ分けの影響は増幅することも分かる。2度の証券化(再証券化)に対応するここでのABS CDOのメザニントランシェについてみれば、システムティック・リスクが一定水準以上の大きになると損失率が急激に上昇する(元本が崖から落ちるように急速に毀損する)リスクの特徴が明確に現れている。BIS(2008)はこの特徴を「クリフ効果」とよび、Whetten and Adelson(2005)

¹⁵⁾現実には、RMBS以外の商品を組み込みことによって一層の分散効果を狙っていたといわれている。

¹⁶⁾BIS(2008)はABS CDOの信用リスクの経済的要因をシステムティック・リスクと個別リスクの観点から分析し、パフォーマンスの劇的な悪化はABS CDOの構造に内在するリスクであること、上位のランシェほどシステムティック・リスクに対する感応度が高いことを示している。これは、ABS CDOが多数のRMBSランシェを担保資産としてプールしていることにより、各担保資産の個別リスクには分散効果が働き、個別リスク全体としては大きなショックが発生し難くなるためである。なお、本稿では個別リスクを個別住宅ローンの債務者に関する信用リスク(個別ローンのリスク)と想定している。一方、BIS(2008)は個別リスクを各住宅ローンプールに固有の信用リスク(ローンプールのリスク)として扱っている。両者はともに非システムティック・リスクであり、担保資産のプールを十分に大きくすることで分散可能であるが、CDOの裏付け資産である全てのRMBSの担保となっている住宅ローンの数(本稿では $10 \times 1,000 = 10,000$ 個)は、RMBSの数(10個)に比べて非常に多く、個別ローンのリスクの方がローンプールのリスクよりも分散化の度合いが極めて強いと考えられる。

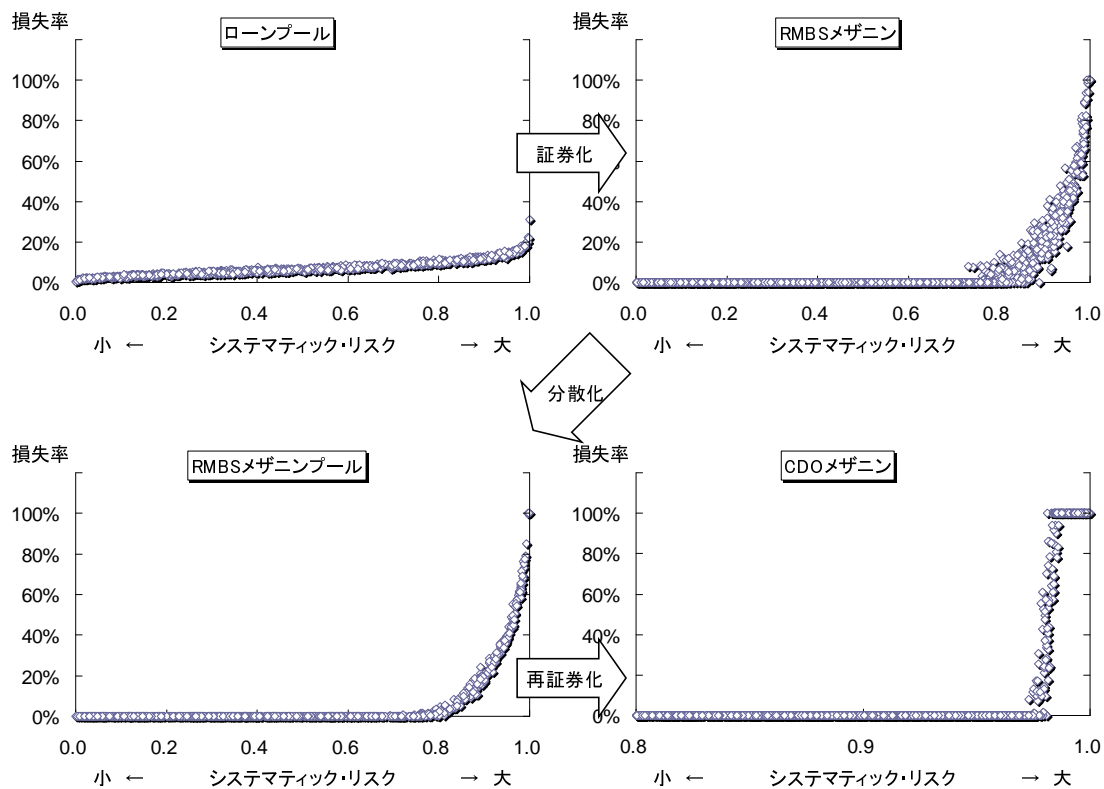


図 9: CDO の組成過程を通したクリフ効果の顕在化

(注) 左上はローンプール全体の損失率、右上は個別 RMBS メザニンの損失率、左下は CDO の担保となる RMBS メザニン・プールの損失率、右下は CDO メザニンの損失率を表す。なお、横軸のシステムティック・リスクは、共通ファクターを $V = v$ として $1 - \Phi(v)$ を表しているため、システムティック・リスクが大きいほどデフォルトが早い時点で起こりやすいことを意味する。

によれば、損失が発生すると直ちに元本の全額が毀損するような現象は「クリフリスク」とよばれている。

4.2 トランシェ分けと信用補完の水準の影響

次に、トランシェ分けの影響を信用補完の水準（劣後トランシェの規模）と当該トランシェの規模の 2 つの要因に分解して考えてみよう。図 10 は CDO のメザニントランシェの信用補完を大きくした場合（シニア：メザニン：エクイティ = 10%：10%：80%、「信用補完：大」のケース）と CDO のメザニントランシェ自身の規模を大きくした場合（シニア：メザニン：エクイティ = 10%：30%：60%、「トランシェの規模：大」のケース）におけるトランシェの損失率を先ほどの結果と比較したものである。

図 10 より、信用補完の水準を大きくすることはシステムティック・リスクに対する耐性を高めることが分かる。すなわち、トランシェがより大きな水準のシステムティック・リスクに耐え得るようになる。信用補完の大小による傾きの大きな変化はみられないので、信用補完水準を変化させたことによるシステムティック・リスクに対するトランシェの感

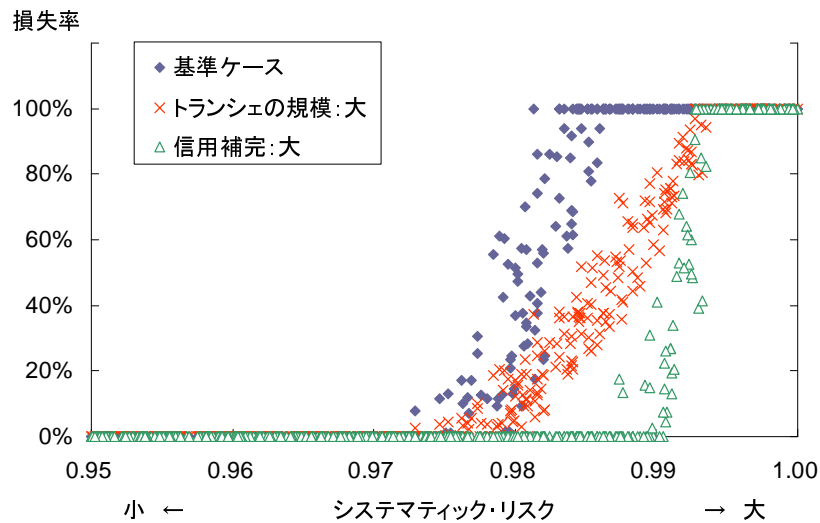


図 10: 信用補完およびトランシェの規模と CDO メザニンの損失率の関係

(注) で表した「基準ケース」はシニア：メザニン：エクイティ = 30%：10%：60%、 \times で表した「トランシェの規模：大」のケースはシニア：メザニン：エクイティ = 10%：30%：60%、 \triangle で表した「信用補完：大」のケースはシニア：メザニン：エクイティ = 10%：10%：80%とした場合である。

応度への影響はないと見られる。

一方、トランシェの規模を大きくすることはシステムティック・リスクに対するトランシェの感応度を低下、つまり傾きを小さくさせることが分かる。ただし、損失が発生し始めるシステムティック・リスクの大きさは変わっておらず、システムティック・リスクに対する耐性には影響しないと考えられる。これは、当該トランシェの規模が小さいほど、個々の住宅ローンのデフォルトの影響が相対的に大きく影響することによって考えられ、図 10 にみるように結果としてはクリフ効果が顕れやすくなることが分かる。このようなクリフ効果は、反復的かつ小規模なトランシェ分けによって特に顕著に現れる¹⁷⁾。

4.3 パラメータの変化とシステムティック・リスクに対する感応度

第 3.4 節では、パラメータの変化が証券化商品のトランシェのリスク指標等に与える影響を検証した。本節では、モデルのパラメータの変化をシステムティック・リスクに対する感応度の観点から分析してみよう。

¹⁷⁾ ローンプール全体のデフォルト損失額を L としてあるトランシェ (劣後部分の規模が A 、当該トランシェの規模が $B - A$ とする) の損失率を ℓ とすると、

$$\ell = \frac{\max\{L - A, 0\} - \max\{L - B, 0\}}{B - A}$$

となる。損失率 ℓ の感応度 $d\ell/dL$ は、 $L < A$ ではゼロであるが、 $A < L < B$ において $1/(B - A)$ であることが分かる。つまり、トランシェの損失率の感応度はトランシェ規模 $B - A$ に反比例し、本質的にはトランシェの規模が小さくなることでクリフ効果が顕れると考えられる。

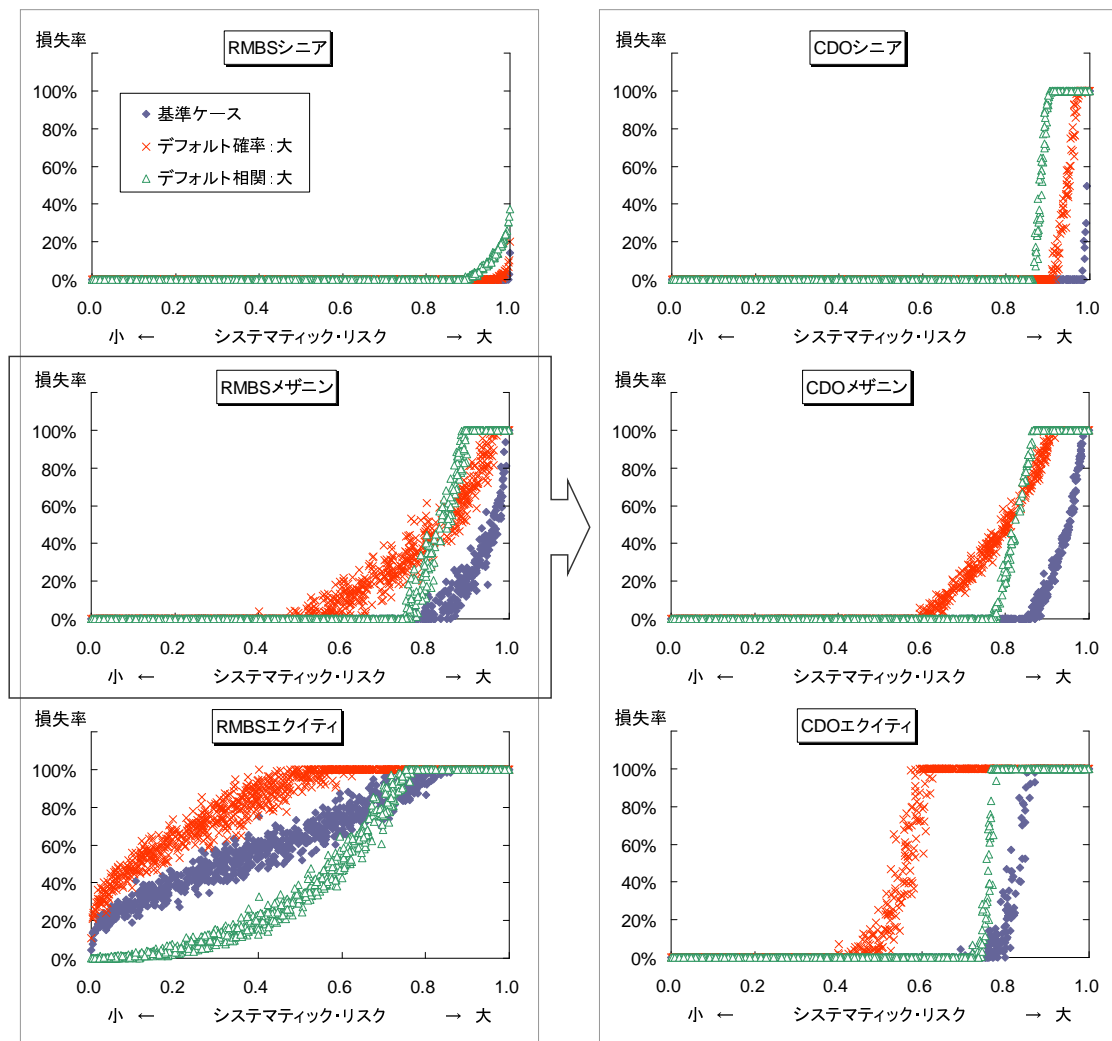


図 11: 損失率のパラメータ感応度

(注) は基準ケース(デフォルト確率が3%、デフォルト相関が0.1)の場合であり、×はデフォルト確率を4.5%にした場合、△はデフォルト相関を0.5にした場合のトランシェの損失率を表す。

図 11 は、モデルのパラメータを変化させた場合にシステマティック・リスクに対する感応度がどのように変化するかを左に RMBS、右に RMBS メザニンから組成した CDO の状況を示す形で図示している。パラメータの変化としては、個々の住宅ローンのデフォルト確率の増大とデフォルト相関の高まりを考え、基準ケースの結果と合わせてシミュレーション結果をグラフにプロットした。シミュレーションやトランシェ分けの条件は第 3.4 節と同じ設定であり、トランシェの規模は RMBS の場合、シニア：メザニン：エクイティ = 80%：10%：10%、CDO の場合、シニア：メザニン：エクイティ = 30%：60%：10% である。

まず、住宅ローンのデフォルト確率が高まると RMBS および CDO の各トランシェの損失率が上昇する。これは、RMBS のメザニン部分についてみると、より小さい値のシステマティック・リスクに対して損失率の上昇が始まるという結果をもたらす。このため、このメザニンを担保とした CDO ではすべてのトランシェにおいて、同様にシステマティッ

ク・リスクへの耐性の低下が生じる。この傾向は CDO の下位のトランシェほど著しい。

次に、ローンのデフォルト相関が高まると RMBS のエクイティの損失率が低下する一方、RMBS の他のトランシェおよび CDO の各トランシェの損失率は上昇することが分かる。RMBS メザニンでは、傾きが急になる形でこの変化が生じることとなるので、CDO のすべてのトランシェにおいてシステムティック・リスクに対する感応度（傾きの大きさ）が大きくなり、クリフ効果が生じる。

5 CDO の格付評価との関係

急速に拡大した証券化商品の価値評価の際にきわめて重要な役割を果たしていたのが格付機関である。格付機関は、複雑な証券化の組成のプロセスの中でトランシェ分けの判断などの商品設計に直接に関わり、売出される証券がどのように評価されるのかについても指針を与えていた。2007 年の半ば、すでに住宅価格もピークアウトしていた中で、格付機関はサブプライムローンの延滞の発生と損失見込みの大幅な上昇などを理由にサブプライム RMBS について広範な格下げを行った。この見直しは、証券化商品全般の格下げにつながり、多くの投資家を慌てさせる事態となった。

証券化商品の価格急落と同時に、これら商品にお墨付きともいえる格付けを付与してきた格付機関は多くの批判にさらされた。格付機関の甘い判断やモデルの不備、審査におけるインセンティブや手数料のあり方などさまざまな問題が浮かび上がってきた。批判を受けた米国証券取引委員会 (SEC) は、2007 年 8 月からフィッチ、ムーディーズ、S&P という 3 つの格付機関が行っていたサブプライムローンに関連した RMBS と CDO の格付けについて調査を行い、その結果をまとめた報告書を 2008 年 7 月 8 日に公表している。(この報告に基づく規則改正の提案は 2008 年 12 月に発表されている。)

5.1 RMBS や CDO の格付け

報告書では、2002 年以降、RMBS と CDO の件数および複雑さが増大し、格付けの過程がこの増加に適切に対応できていなかったことが指摘されている。特に、格付けの過程における重要な点が十分に開示されていなかったことに加え、内部的にも格付け手法のきちんとした記録が残されていない点や改善されるべき利益相反の問題などがあったことを明らかにしている。

証券化商品の格付けは、まず、組成者がローンプールに含まれる債権の属性情報や債務者情報、信用補完の状況などの情報を格付機関に提出することから始まる。格付機関のアナリストは、計量モデルに基づき、これらをインプットとして個々のトランシェに関するデフォルトの予測や損失の分析を行い、信用補完の必要の程度や格付けを決める。格付けが高いトランシェほどより厳しい条件でのテストが行われ、そうしたテストや分析に基づき、証券の構造とそれぞれのトランシェに対する格付けが格付機関から組成者に伝えられる。組成者は、利払いが小さくて済む高い格付けのトランシェをできるだけ多く設定しようとするため、調整が行われる場合もある。さらに、利払い等に関するキャッシュフロー分析が行われ、信用補完との関係などが確認される。

本稿で取り上げた ABS CDO の場合には、元々のローンの債務者情報等に遡るのではなく、CDO の裏付けとなっている ABS の格付けに基づいた分析が行われていた。RMBS の格付けは、プールの原資産についてのさまざまな情報に基づいて行われるため数十項目にのぼる入力事項が設定されている。しかし、例えば、こうした RMBS から組成される CDO の場合には、裏付けとなっている RMBS などの現在の格付けと満期、資産のタイプ、国および産業という 5 つの情報しかモデルに入力されていなかったという。これらから分析の重要な前提となる CDO の各トランシェのデフォルト確率や回収率、資産間の相関係数という 3 変数が出力されることとなっていたが、実際には裏付け資産のデフォルト確率などを社債の過去データに依存していた例もあったとされる。格付機関には RMBS などの基礎情報を検証する義務がない点も、振り返ってみれば問題であると指摘されている¹⁸⁾。

こうした方法が妥当であるためには、組み入れられる RMBS の格付けが適切であることは当然の前提であり、また、格付けの順序性も適切に設定されていなければならない。担保資産の性質やトランシェ分けによってプール資産および各トランシェのリスク特性が大きく変わり得る二次証券化商品の場合には、相当の検証がなされていない限り、上記のような手法は適切な評価手法とはならないだろう。

社債のデータを用いることにも問題が多い。社債のデフォルトは、個別リスクとシステムティック・リスクの両方の影響を受けるが、キャッシュフロー見通しは個別リスクにもかなりの程度左右される可能性がある。分散化を行い、個別リスクの影響を基本的には消去している RMBS の格付評価と、各社によって異なるものの、個別リスクにも影響される社債の格付評価の間の対応付けがどのように的確に図られるのかについて慎重な検討が必要である。

5.2 証券化商品の格付けと価格評価

BIS(2008) は、格付機関の定量モデルにおけるいくつかの仮定が CDO の担保資産に生じた劣化の影響に対する調整を遅らせた可能性があることを指摘している。すなわち、CDO の格付の場合には担保資産の損失の発生やその度合いに関する情報を担保資産の格付けに頼っていること、デフォルト相関を扱う統計モデルが極端なイベントの起こる確率を十分に捉えていないかもしれないこと、担保資産に損失が発生するタイミングや期限前償還率などについて実証分析に基づくのではなくアドホックなシナリオに頼っていることを挙げている。また、信用格付けは契約上の支払い義務のみに焦点を当てているため、システムティック・リスクに対する感応度の違いを捉えられる仕組みにはなっていないと述べている。

実務においては、多くの投資家は、証券化商品の格付けとスプレッドには一定の対応があるとの前提で一連のトランシェを評価し、投資していたといわれている。信用リスクの価格評価の手法にはいくつかの考え方があるが、証券化商品においても価格付けの基本はシステムティック・リスクによると考えるなら、BIS (2008) が示唆するように、個別リス

¹⁸⁾ RMBS や別の CDO を担保資産とする CDO は契約に沿った形で運用が継続されることもよくみられる。したがって、CDO の格付けはその運用指針に従った場合に予想される損失の分析を行うことになる。格付機関は発行後の監視を法律で義務付けられているわけではないが、組成者が裏付けとなっている担保資産の内容やパフォーマンスなどに関する情報を開示していない場合には、格付機関が行う CDO の格付けの変更が投資家に対して重要な情報を与える役割を担っていたとしている。危機の背景には、運用状況の監視（モニタリング）が十分ではなかったことも指摘されている。

クとシステムティック・リスクを適切に区別していなかった格付機関の評価手法はリスクに見合った価格付けに対して有用な情報を与えることにはなっていなかったと考えられる。

格付機関の評価は、バーゼルIIにおける信用リスク評価でもリスク・ウェイトを定める基準となっている。バーゼル銀行監督委員会は、今回の金融危機におけるABS CDOなどの著しい価値下落という現実に対応し、2008年4月に「銀行システムの強靱性強化のための対策」を明らかにし、複雑な仕組みクレジット商品などに対する自己資本比率の見直しなどを発表していた。2009年1月、一部の項目についての詳細が公表され、例えば、同じ格付けでも再証券化商品に対しては証券化商品を上回るリスク・ウェイトを設定することなどが提案されている。格付けが現実のリスク管理に大きな影響を与えている以上、格付機関の評価手法などについては詳細な分析が可能となるような十分な情報の開示が必要であろう。

6 結論と課題

以上で示したシミュレーションの結果は、いくつかの単純化や特定のパラメータの仮定に基づくモデル化によるものであり、設定やシミュレーションを簡便に行うために基本となる分布に正規分布を仮定するなど、注意が必要な点がある。現実在即した分析を行うためには、データに基づくパラメータの検証やコンピュータの選択とデフォルト時刻の同時分布に関する取り扱い、システムティックなリスクファクターの仮定の仕方など多くの課題がある。

そうした点に十分留意する必要を強調した上で、(多数の資産を集めて分散化をねらったタイプの)証券化商品にみられるリスク特性についてみると、証券化という構造には分散化のメリットと表裏の関係でシステムティック・リスクに対する感応度が高いというリスク特性がみられること、このため、大きなショックが発生した時にはCDO証券などの価値が同時に且つ急激に毀損することが生じ得るという特徴があることを十分に認識する必要がある。

モデルによる検証のインプリケーションをまとめれば、第1に、証券化によりメザニン以下のトランシェでは元のローンプールよりテイルリスクが増大する。この特徴はABS CDOなどの重複的証券化によって増幅される。

第2に、トランシェ分けを行うと、証券化商品の裏付けとなる担保住宅ローン1件当たりの元本に対する当該トランシェの元本の比率が小さくなるため、トランシェの優先度合いにかかわらず元のプールよりもシステムティック・リスクへの感応度が高くなり、典型的にはクリフ効果とよばれる極端な損失率の急上昇がみられることになる。なお、トランシェの優先度合いの基本的な影響はデフォルト発生確率に現れる。したがって、信用補完の大きさはデフォルトの発生が見込まれるシステムティック・リスクの最小値を決めるものの、システムティック・リスクに対する感応度は、信用補完の程度ではなくトランシェの元のローンプールに対する相対的な規模に依存すると考えられる。

第3に、以上のようなテイルリスクおよびシステムティック・リスクに対するクリフ効果などの事象は、劣後するトランシェほど、また、証券化が重なるほど増幅する形で顕在化する。

第4に、個々のローンのデフォルト確率の増大やデフォルト相関の上昇などの変化が生

じた場合には、証券化が繰り返されている場合ほど顕著な影響が生じる。なお、相関の上昇は一斉に悪いことが起きる可能性を高めるので、シニアトランシェのリスクをも高める結果となる。

現実に生じたこととの関係付けを考えると、仮にデフォルト確率や相関が正しく想定されていたとしても、金利の上昇や住宅市場の全般的な悪化などの状況が生じるとテイルリスクやクリフ効果が顕在化する。デフォルト確率などのパラメータに過小評価の見誤りがあったとすれば、それが明らかになった時点ですべての証券化商品の損失見込みは増大する。これらが今回の危機の損失見込みにおいて ABS、さらには ABS CDO の価値の毀損がもっとも著しかった理由をある程度説明するのではないかと考えられる。

また、すでに述べたようにデフォルト発生確率や期待損失率を重視したトランシェ分けという格付機関の手法にはリスク評価などの面で問題が多く、投資家はこうした点についてどの程度の理解や分析を行っていたのか、失敗の検証がなされる必要がある。金融商品が複雑化するに伴い、市場における価格情報からインデックスを作成したり、オーダーメイドの金融商品の価格評価を専門に行ったりする会社も登場している。新たな金融商品の普及のためにはこうした情報提供機関や格付機関が大きな役割を果たすことも多いが、提供された格付けなどの情報が投資判断の責任を負うわけではない。格付機関の手法の見直しや開示を適切に行うことは不可欠だが、同時に、投資家は自らの投資判断の基礎についても一層精緻な分析を行うことが必要である。その意味では、格付機関、投資家ともに新しい金融商品におけるリスク特性の分析、特にテイルリスクなどの極端な結果が生じるケースなどについて検証を深めていく必要があり、金融監督においてもこれらに関する知見の提供がより重要となるのではないかと考えられる。

補論1：裏付けRMBSの損失計算

デフォルトの発生モデル

1ファクターのガウシアン・コピュラを用いて住宅ローンのデフォルト時点をシミュレートする。

- $i (= 1, \dots, N)$ 番目のローンのデフォルト時点を τ_i とする。
- τ_i の分布関数を G_i とする。
- デフォルトファクター間の相関を ρ とする。

周辺分布 G_i ($i = 1, \dots, N$) および相関 ρ を持つデフォルト時点の組 τ_i ($i = 1, \dots, N$) を以下のようにして発生させて、各時点のデフォルト件数を求める。

1. 標準正規分布に従う乱数 V, ε_i ($i = 1, \dots, N$) を発生させる。

$$V \sim N(0, 1), \varepsilon_i \sim N(0, 1) \quad (i = 1, \dots, N)$$

2. デフォルトファクター $X_i = \Phi^{-1}(G_i(\tau_i))$ を計算する (Φ は標準正規分布の分布関数)。

$$X_i = \sqrt{\rho}V + \sqrt{1 - \rho}\varepsilon_i$$

3. デフォルト時点 τ_i を計算する。

$$\tau_i = G_i^{-1}(\Phi(X_i))$$

時点 $t = 1, \dots, T$ におけるデフォルト件数 $D(t)$ ならびにローンの残存件数 $N(t)$ を計算する。

$$D(t) = \sum_{i=1}^N \iota_{\{\tau_i=t\}} \quad (\iota \text{ は定義関数})$$

$$N(t) = N(t-1) - D(t), \quad N(0) = N$$

RMBSの損失計算

$j (= 1, \dots, M)$ 番目のRMBSについて以下のように記号を定義する。

- シニアの残存元本を $F_{S_j}^R(t)$ 、メザニンの残存元本を $F_{M_j}^R(t)$ 、エクイティの残存元本を $F_{E_j}^R(t)$ とする。
- シニアのクーポンを C_S^R 、メザニンのクーポンを C_M^R とする。
- 担保住宅ローンの残存件数を $N_j(t)$ 、各ローンの元本は1とする。
- 住宅ローンの金利を $I(t)$ 、デフォルト時の損失率を LGD とする。

$t = 0, \dots, T - 1$ について各トランシェの損失を計算する。

1. RMBS の超過スプレッド（金利収入 - クーボン支払い）を計算する。

$t+1$ における住宅ローンの金利収入は $N_j(t)I(t)$ 、RMBS のクーポン支払いは $F_{S_j}^R(t)C_S^R + F_{M_j}^R(t)C_M^R$ なので、超過スプレッド $spr_j^R(t+1)$ は、

$$spr_j^R(t+1) = N_j(t)I(t) - (F_{S_j}^R(t)C_S^R + F_{M_j}^R(t)C_M^R)$$

2. デフォルト損失を考慮して、エクイティの残存元本を計算する。

デフォルト損失 $L_j^R(t+1)$ は、

$$L_j^R(t+1) = (N_j(t) - N_j(t+1)) \times 1 \times LGD$$

であるため、エクイティの損失 $Loss_{E_j}^R(t+1)$ は、

$$Loss_{E_j}^R(t+1) = \min\{F_{E_j}^R(t) + spr_j^R(t+1), L_j^R(t+1)\}$$

となる。超過スプレッドとデフォルト損失を考慮して、 $t+1$ におけるエクイティの残存元本を計算する。

$$F_{E_j}^R(t+1) = F_{E_j}^R(t) + spr_j^R(t+1) - Loss_{E_j}^R(t+1)$$

3. メザニンの残存元本を同様にして計算する。

メザニンの損失 $Loss_{M_j}^R(t+1)$ は、

$$Loss_{M_j}^R(t+1) = \min\left\{F_{M_j}^R(t), \max\{0, L_j^R(t+1) - F_{E_j}^R(t) - spr_j^R(t+1)\}\right\}$$

であるため、 $t+1$ におけるメザニンの残存元本が以下の式で計算される。

$$F_{M_j}^R(t+1) = F_{M_j}^R(t) - Loss_{M_j}^R(t+1)$$

4. シニアの残存元本を同様にして計算する。

シニアの損失 $Loss_{S_j}^R(t+1)$ は、

$$Loss_{S_j}^R(t+1) = \min\left\{F_{S_j}^R(t), \max\{0, L_j^R(t+1) - F_{E_j}^R(t) - spr_j^R(t+1) - F_{M_j}^R(t)\}\right\}$$

であるため、 $t+1$ におけるシニアの残存元本が以下の式で計算される。

$$F_{S_j}^R(t+1) = F_{S_j}^R(t) - Loss_{S_j}^R(t+1)$$

CDO の損失計算

CDO について以下のように記号を定義する。

- シニアの残存元本を $F_S^C(t)$ 、メザニンの残存元本を $F_M^C(t)$ 、エクイティの残存元本を $F_E^C(t)$ とする。

- シニアのクーポンを C_S^C 、メザニンのクーポンを C_M^C とする。

$t = 0, \dots, T - 1$ について各トランシェの損失を計算する。

1. CDO の超過スプレッド（金利収入 - クーポン支払い）を計算する。

$t + 1$ における裏付け RMBS のメザニンからのクーポン収入は $\sum_{j=1}^M F_{Mj}^R(t)C_M^R$ 、CDO のクーポン支払いは $F_S^C(t)C_S^C + F_M^C(t)C_M^C$ なので、超過スプレッド $spr^C(t+1)$ は、

$$spr^C(t+1) = \sum_{j=1}^M F_{Mj}^R(t)C_M^R - (F_S^C(t)C_S^C + F_M^C(t)C_M^C)$$

2. デフォルト損失を考慮して、エクイティの残存元本を計算する。

CDO のデフォルト損失 $L^C(t+1)$ は裏付け RMBS のメザニンの元本毀損に起因するため、

$$L^C(t+1) = \sum_{j=1}^M Loss_{Mj}^R(t+1)$$

である。エクイティの損失 $Loss_E^C(t+1)$ は、

$$Loss_E^C(t+1) = \min\{F_E^C(t) + spr^C(t+1), L^C(t+1)\}$$

となる。超過スプレッドとデフォルト損失を考慮して、 $t + 1$ におけるエクイティの残存元本を計算する。

$$F_E^C(t+1) = F_E^C(t) + spr^C(t+1) - Loss_E^C(t+1)$$

3. メザニンの残存元本を同様に計算する。

メザニンの損失 $Loss_M^C(t+1)$ は、

$$Loss_M^C(t+1) = \min\left\{F_M^C(t), \max\{0, L^C(t+1) - F_E^C(t) - spr^C(t+1)\}\right\}$$

であるため、 $t + 1$ におけるメザニンの残存元本が以下の式で計算される。

$$F_M^C(t+1) = F_M^C(t) - Loss_M^C(t+1)$$

4. シニアの残存元本を同様に計算する。

シニアの損失 $Loss_S^C(t+1)$ は、

$$Loss_S^C(t+1) = \min\left\{F_S^C(t), \max\{0, L^C(t+1) - F_E^C(t) - spr^C(t+1) - F_M^C(t)\}\right\}$$

であるため、 $t + 1$ におけるシニアの残存元本が以下の式で計算される。

$$F_S^C(t+1) = F_S^C(t) - Loss_S^C(t+1)$$

シミュレーションのパラメータ

以上のシミュレーションにおいて選択できるパラメータは、次のとおりとなる；

- 住宅ローンプールの規模 N 、住宅ローン金利 $I(t)$
- 住宅ローンの累積デフォルト率 $G(t)$ 、デフォルトファクターの相関 ρ
- 住宅ローンのデフォルト時損失率 LGD
- RMBS および CDO の各トランシェのサイズ (当初元本) $F_S^R, F_M^R, F_E^R, F_S^C, F_M^C, F_E^C$,
- RMBS および CDO の各トランシェのクーポン $C_S^R, C_M^R, C_S^C, C_M^C$,
- RMBS および CDO の満期 T

シミュレーションの設定

- モンテカルロ・シミュレーションの回数：10,000 回
- 擬似乱数の発生アルゴリズム：Multiply-With-Carry 法

補論 2：相関パラメータ ρ とデフォルト時刻の相関の関係

相関パラメータ ρ とデフォルト時刻の相関の関係をより具体的に示すため、ここではデフォルト時刻 τ がパラメータ h の指数分布に従う (ハザードレート h が時間によらず一定) と仮定して、両者の関係を具体的に示してみよう。この場合には、デフォルト時刻の分布関数は

$$G(t) = \Pr\{\tau \leq t\} = \begin{cases} 1 - e^{-ht} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

であり、 G の逆関数は

$$G^{-1}(s) = -\frac{1}{h} \log(1 - s), \quad (0 \leq s < 1)$$

である。また、デフォルト時刻の期待値と分散は

$$E[\tau] = \frac{1}{h}, \quad \text{Var}(\tau) = \frac{1}{h^2}$$

と表される。従って、デフォルト時刻 τ_i と τ_j がパラメータ h_i および h_j を持つ指数分布に従っていると仮定すると、デフォルト時刻の相関は、

$$\text{Corr}(\tau_i, \tau_j) = \frac{E[\tau_i \tau_j] - E[\tau_i]E[\tau_j]}{\sqrt{\text{Var}(\tau_i)\text{Var}(\tau_j)}} = \frac{E[\tau_i \tau_j] - \frac{1}{h_i h_j}}{\frac{1}{h_i h_j}} = h_i h_j E[\tau_i \tau_j] - 1$$

となる。

1ファクターのガウシアン・コピュラ・アプローチでは、相関 ρ を持つ二次元標準正規分布に従う確率変数 X_i と X_j によって

$$\tau_i = G^{-1}(\Phi(X_i)), \quad \tau_j = G^{-1}(\Phi(X_j))$$

となるため、

$$E[\tau_i \tau_j] = E[G^{-1}(\Phi(X_i))G^{-1}(\Phi(X_j))] = \frac{1}{h_i h_j} E[\log(1 - \Phi(X_i)) \log(1 - \Phi(X_j))]$$

である。結局、デフォルト時刻の相関は

$$\begin{aligned} \text{Corr}(\tau_i, \tau_j) &= E[\log(1 - \Phi(X_i)) \log(1 - \Phi(X_j))] - 1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \log(1 - \Phi(x)) \log(1 - \Phi(y)) \phi(x, y; \rho) dx dy - 1 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\phi(x, y; \rho)$ は相関 ρ を持つ二次元標準正規分布の密度関数であり、

$$\phi(x, y; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right\}$$

である。

積分区間を $-4 \leq x \leq 4$ 、 $-4 \leq y \leq 4$ 、 dx と dy をそれぞれ 0.01 として数値積分を行った結果を図 12 に示す。状態変数間の相関係数である相関パラメータ ρ とデフォルト時刻間の相関係数は、 $\rho = 0.5$ の辺りでは相関パラメータ ρ の値に比べてデフォルト時刻間の相関係数がやや低くなり、2つの相関係数が一致しないことが見て取れる。

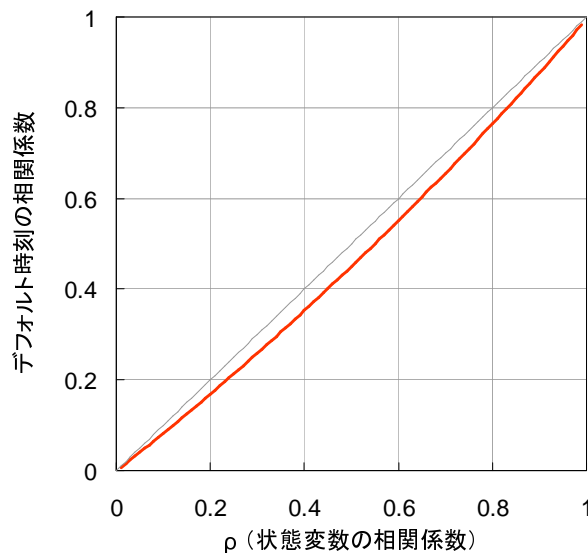


図 12: 相関パラメータ ρ とデフォルト時刻の相関の関係

(注) 図中に 45 度線を表示している。

参考文献

- [1] Ashcraft, Adam B. and Til Schuermann (2008), "Understanding the Securitization of Subprime Mortgage Credit," Federal Reserve Bank of New York Staff Reports.
- [2] Bank for International Settlements (2008), "Credit Risk Transfer."
- [3] Bank for International Settlements (2009), "Consultative Document, Proposed enhancements to the Basel II framework."
- [4] Das, Satyajit (2005), *Credit Derivatives, CDOs & Structured Credit Products 3rd Edition*, John Wiley & Sons.
- [5] Doornik, Jurgen A. (2001), *Ox 3.0 - An Object-Oriented Matrix Programming Language 4th ed.*, Timberlake Press.
- [6] Gorton, Gary (2009), "The Subprime Panic," *European Financial Management* 15, 10-46.
- [7] Greenlaw, David, Jan Hatzius, Anil K. Kashyap and Hyun Song Shin (2008), "Leveraged Losses: Lessons from the Mortgage Market Meltdown," presented at the U.S. Monetary Policy Forum 2008.
- [8] Heitfield, Erik (2008), "Securitization: a Post Mortem," presented at the Community Development and the Capital Markets.
(<http://www.frbsf.org/cdinvestments/conferences/0811/powerpoints/heitfield.pdf>)
- [9] International Monetary Fund (2008), "Global Financial Stability Report."
- [10] International Monetary Fund (2009), "Global Financial Stability Report Market Update."
- [11] Laurent, Jean-Paul and Jon Gregory (2005), "Basket default swaps, CDOs and factor copulas," *Journal of Risk* 7, 103-122.
- [12] Li, David Xianglin (2000), "On Default Correlation: A Copula Function Approach," *The Journal of Fixed Income* 9, 43-54.
- [13] Li, David Xianglin (2008), "An Overview on Copula Function Methods in Credit Portfolio Modelling," in *The Definitive Guide to CDOs* edited by Gunter Meissner, Incisive Media.
- [14] McNeil, Alexander J., Rudiger Frey, and Paul Embrechts (2005), *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*, Princeton University Press. (塚原英厚 他 (訳), 『定量的リスク管理 - 基礎概念と数理技法 - 』, 共立出版, 2008.)
- [15] Standard & Poor's (2002), "Global Cash Flow and Synthetic CDO Criteria," Standard & Poor's.

- [16] United States Securities and Exchange Commission (2008), "Summary Report of Issues Identified in the Commission Staff's Examinations of Select Credit Rating Agencies."
- [17] Whetten, Michiko and Mark Adelson (2005), "CDOs Squared Demystified," Nomura Fixed Income Research.