



FSA Institute

Discussion Paper Series

与信集中リスク管理の高度化に 向けた研究

室町幸雄

DP 2017-2

2017 年7月

金融庁金融研究センター
Financial Research Center (FSA Institute)
Financial Services Agency
Government of Japan

金融庁金融研究センターが刊行している論文等はホームページからダウンロードできます。

<http://www.fsa.go.jp/frtc/index.html>

本ディスカッションペーパーの内容や意見は、全て執筆者の個人的見解であり、金融庁あるいは金融研究センターの公式見解を示すものではありません。

与信集中リスク管理の高度化に向けた研究

室町 幸雄
首都大学東京

2017 年 6 月 29 日

和文概要 本稿では金融機関の与信ポートフォリオに内在する集中リスクについて検討する。近年、個別銀行の与信ポートフォリオにおける集中リスクを HHI (Herfindahl-Hirschman Index) を用いて評価しようとする動きが見られるが、そこには多くの問題点があることを指摘し、代わりにリスク寄与度 (risk contribution) に基づく視点からポートフォリオの最適性について考察し、最適ポートフォリオであるための必要条件を導出する。これらの議論は任意のポートフォリオに対して適用可能であり、例えば、日本の金融機関が直面する (i) 貸出, (ii) 国債投資, (iii) 国内有価証券投資, (iv) 海外有価証券投資等にどのように資金配分をすることが望ましいかという問題に対しても一つの方向性を与えるものである。また、分析対象は金融機関が保有するポートフォリオ全体でも、国内株式や債券など一部のサブ・ポートフォリオでも構わないので、資産クラスごとに議論を行うこともできる。さらに、導出した必要条件をもとに HHI の代替となる幾つかの指標を考案し、簡単な数値例により、HHI および提案指標のポートフォリオの最適性指標としての妥当性を検討する。結果として、提案された指標は必ずしも適切とは言えなかったが、HHI もまた適切な指標ではないことが示された。

キーワード：与信ポートフォリオ, 集中リスク, HHI, 最適ポートフォリオ, リスク寄与度

1. はじめに

1.1. 問題意識

金融機関が保有する与信ポートフォリオには信用リスク、プリペイメントリスク、ロールオーバーリスクなどさまざまなリスクが内在しているが、近年は特に与信集中リスクが注目されている。国際決済銀行 (BIS) ではバーゼルの本三本のうち第二の柱の中で特に重要なリスクとして取り上げ、銀行自身が自己管理し、監督当局が検証・評価するスキームとなっている。現在、海外当局の中には、集中度を表す一般的な指標の一つである Herfindahl-Hirschman Index (以下、HHI と略) を用いて、個別銀行の与信ポートフォリオにおける特定のネームや特定のセクターに対する与信集中リスクを評価し、その集中度に基づいて Capital-Add-on する方法を採用する事例が見られている¹。

金融機関の与信集中リスクの定量化とそれに伴う Capital-Add-on は、今後のリスク管理において望ましい方向性である。ところで、分散投資効果の働く与信ポートフォリオにおいて、HHI および既に提案されているその他の指標は集中リスクの適切な指標になっているのだろうか。さらに、それらの指標には銀行相互間の依存関係を反映させる必要はないだろうか。また、個別銀行の与信集中リスク管理の高度化は、銀行単体では集中リスクを分散させる方向に働くが、その行動はシンジケートローンなどを通じて市場型間接金融市場のネットワークを拡大し、多くの場合、各行のポートフォリオは多様性を失い、類似したものにな

¹EBA [2] の good practice の例として、オランダとスウェーデンにおける HHI の使用例が記載されている。また、英国については PRA [14] を参照。この資料からも信用集中リスクの評価において HHI が重視されていることがうかがえる。

と考えられないだろうか。その場合、この類似性は金融システムの安定という視点からみて望ましいことだろうか。例えば、ある特定のショックに対しては却って金融システムの脆弱性が高まる可能性が生じないだろうか。

このように、与信集中リスクの計測・管理とその影響に関しては、少し考えただけでもさまざまな疑問が発生する。今後、金融リスク管理に携わる実務者や研究者はこれらの議論に対して検討を繰り返し、順番に解答を与えていかねばならないが、まず喫緊に取り組むべき課題は既存指標、特に実務的な動きと直結している HHI などの指標が与信集中リスクの指標として適切であるかどうかを検討することであり、それが本稿の主要テーマである。

まず、与信集中リスクとは何かから考える。Lütkebohmert [11] によると、信用リスクの内在するポートフォリオにおける集中リスク、いわゆる与信集中リスクとは、個々の借主、あるいは産業セクターまたは地域セクターへの貸付額が等しくないことから生じるリスクであり、個々の借主への貸付額の不均等から生じるリスクを name concentration risk、産業セクターまたは地域セクターへの貸付額の不均等から生じるリスクを sector or country concentration risk と呼んでいる。また、異なる借主間のビジネス関係により直接的に、あるいは信用リスク軽減のための追加的な取引により間接的にポートフォリオの信用リスクは増加しうるが、この影響を default contagion と呼び、name concentration risk にも sector or country concentration risk にも関係すると述べている。

もちろん他にも与信集中リスクの定義はありうるが、以前から筆者は、Lütkebohmert [11] による前述の定義は現在の与信ポートフォリオのリスク管理においてある種のコンセンサスを得たものであらうと感じながらも、一方では大きな違和感を感じてきた。この定義を使えば与信集中度に関する定量的な議論は非常に進めやすくなり、実際、これに沿った集中度の定量的指標や議論は Lütkebohmert [11] にも紹介されている。それらの多くはある産業の集中度あるいは寡占性に関する議論を流用したもので、個々の企業による占有率の分布が中心的な議論の対象となっている。しかし、この問題は与信ポートフォリオにおける信用リスクの問題とは全く異なるのではないだろうか。

産業の集中に関する議論では、同じ占有率をもつ企業の役割に大差はないと考え、全企業が同じ比率になるのが最も分散化された状態と考えるのは自然なことである。しかし、同じ与信額を持つ企業に大差はなく、全企業に同額ずつ融資を行う状態が最もリスク分散された状態という考え方が信用リスクに通用するだろうか。貸付額が借主によって異なるのは、そもそもデフォルト（債務不履行）を生じる可能性もデフォルト時の損失率も借主によって異なるのでごく当たり前のことであり、それらの条件に応じて貸付額を変えるのはポートフォリオ全体の信用リスクを軽減し、期待リターンを高めるための当然の措置である。それにもかかわらず、貸付額が等しい状態を基準として、その状態からの乖離により生じるリスクを与信集中リスクと呼ぶのはいかなるものだろうか。もしこの定義を採用するならば、与信集中リスクが負になること、すなわち、一見すると集中した状態をとることによって与信ポートフォリオのリスク・リターンプロファイルが改善することも実際にはありうるが、そういうことはこれまで議論されてきただろうか。

筆者が感じる違和感の最大の原因は単純で、与信集中リスクに関する議論がポートフォリオに内在するリスクの定量的議論から始まっていないからであり、換言すると、ファイナンスにおける資産およびポートフォリオの評価の原則から乖離しているからである。そこで本稿では、ファイナンスにおける評価の原則に則り、ポートフォリオのリスク量から与信集中リスクについて議論を始めるとどうなるか、という最も基礎的な部分を最初に考え直して

みる。

もう一つ、これも根本的な考え方は同じであるが、HHIには抵抗感がある。金融機関のリスク計測は多方面におよびいろいろな精緻な議論を積み上げて構築されている。もちろん、必ずしもどれもがうまくいっているとは言えないし、それどころか後日否定的な指摘を受ける理論が使われることもあるが、それでも精緻な議論の積み上げを旨としており、今後も積み上げられていくはずである。その中で、HHIは別格ではないかと感じている。HHIの定義については後述するが、もともとファイナンスの議論の中で提案され使われ始めた指標ではない。それだけの理由でHHIを否定するわけではないが、これほど単純な指標がリスク計測の議論の中で中心的な地位を占めていることが筆者にはバランスが悪いように思えてならない。

与信集中リスクをポートフォリオ全体のリスク量から議論する場合、リスク寄与度 (risk contribution) という概念が非常に有効である。これはポートフォリオ全体のリスク量を部分ポートフォリオ (sub-portfolio) ごと、極端に言えば各構成資産ごとに振り分けた場合の、個々の資産が持つリスク量であり、その合計値はポートフォリオ全体のリスク量に一致するという加法性を持つ。広く知られているように、通常のリスク量、例えば標準偏差、VaR (Value at Risk), ES (Expected Shortfall, 期待ショートフォール) などにおいては、特殊な場合、具体的にはポートフォリオが共単調性 (comonotonicity) を持つ場合を除き、加法性は成立しない。このことから想像できるように、このリスク寄与度という量は通常のリスク量とは全く異質の概念で、まだ広く知られているとは言い難いが²、本稿の次節でわかるようにリスクの振り分けに関する議論では非常に有効なツールとなる。このリスク寄与度を使い、与信ポートフォリオにおける最適性とは何か、そして最適な状態からの乖離はどのように表現できるかを考えることで、与信集中度の指標を検討する。

上述した動機、問題認識、基本方針に従い、本論文を構成のように構成する。まず、次項では主な既存研究について簡単にまとめる。2節では、金融機関においてよく使われるリスク尺度と、リスク量を個々の資産に配分する概念であるリスク寄与度について説明する。3節ではリスク寄与度を用いてポートフォリオの最適性について議論する。最初はリスク最小化ポートフォリオについて考察し、次に、収益性指標も同時に考慮した場合の最適ポートフォリオについて考察し、それぞれについて最適性を特徴付ける条件式を導出する。さらに、得られた条件式をもとに最適性からの乖離の大きさを示す指標を提案する。そして4節では簡単なモンテカルロ・シミュレーションにより提案指標およびHHIの有効性について検討し、5節でまとめる。

1.2. 既存研究

既存研究は、与信集中度の指標に関する議論と、与信ポートフォリオのリスク評価の精度を高めて Capital-Add-on に反映させようとする研究に大別されている。

まず前者の与信集中度の指標に関してであるが、Lütkebohmert [11]³によると、最初に産業集中論に由来する指標をいくつか、具体的には集中度 (Concentration Ratio) とそれを一般化した集中度曲線 (Concentration Curve), ローレンツ曲線 (Lorenz curve), ジニ係数 (Gini Coefficient), HHI (Herfindahl-Hirschman Index) を挙げている。特に注目され

²一方で、BASELII以降で用いられている信用リスクのリスクウェイト関数は理論的に言えばリスク寄与度そのものなので、名称よりも先に結果だけ実務に深く浸透している、とも言える。詳細は室町 [18] を参照されたい。

³Lütkebohmert [11] はさまざまな話題を包括的にまとめているので参考になる。

ている HHI のみ定義を挙げておくと、 n 件の与信先への与信ポートフォリオにおける融資先 i の与信比率を x_i とすると、

$$HHI = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

である。他の指標の定義式および長所短所については Lütkebohmert [11] を参照されたい。Lütkebohmert [11] はこれらをアドホックな指標と呼んでいる。

Uberti and Figini [16] は、HHI にはポートフォリオ理論で重要なリスクファクター間の分散共分散構造が反映されていないことを指摘して、個々の与信先 i のリスクファクターの分散を σ_{ii} として、

$$I_{UF} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_{ii}$$

を指標とすることを提案し、この指標の特性を分析している。しかし、この指標では与信先 i, j 間の共分散 σ_{ij} を無視することになるので、与信先の信用リスクの関連性を評価に織り込むことはできない。さらに、彼らは σ_{ii} としてデフォルト確率を用いているので、指標の背後にある考え方はやや不明確である。

その後、Figini and Uberti [4] は、 I_{UF} で無視していた共分散の寄与を取り込むべく、与信比率ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ 、リスクファクターの分散共分散行列 M を用いて、与信ポートフォリオ全体の分散

$$I_{FU} = \mathbf{x}^\top M \mathbf{x}$$

を指標として提案した。彼らは M をリスクファクターからなる行列とすることで一般性を高めたとしているが、具体的には、 M の非対角成分には与信先の属するセクター間のリスクファクターの共分散としてアセット相関、対角成分にはデフォルト確率を用いている。 I_{FU} は共分散の寄与を考慮した点では I_{UF} より優れていると考えられるが、行列 M の意味が不明確であり、全体として分散 I_{FU} が何を示すことになるのか不明確である。また、Chen ら [1] は HHI の定義に市場リターンとセクターリターンのベータ項を加えることでセクター間の相関関係を取り込んだ risk-adjusted HHI という指標を提案した。彼らの考え方は定性的には理解できるが、リスク調整項をリターンのベータで表現する理由には触れておらず、曖昧なままである。

一方、後者の与信ポートフォリオのリスク評価の精度を高める研究としてはさまざまなものがあるが、特に Capital-Add-on を意識して進められている研究に Granularity Adjustment がある。

Granularity Adjustment はもともと Gordy [6] が BASELII の信用リスクウェイト算出の基礎として使われている ASRF モデル (Asymptotic Single Risk Factor モデル) を改良するために導入した考え方である。ASRF モデルでは、与信ポートフォリオに含まれる個々の貸付は無限に細かく細分化されているため、リスクのうち個々の貸付ごとの独立な成分は完全に分散され、1 ファクターのシステムティックリスクのみ残ると考える⁴。さらに、個々の

⁴システムティックリスクファクターが与えられたときの条件付損失額に対して大数の法則を適用し、条件付期待損失額で近似する。ASRF モデルおよび Granularity Adjustment についての簡単な解説は室町 [18] を参照されたい。

貸付の期待損失額は共単調であると仮定し、ポートフォリオの損失額をシステムティックリスクの単調関数として表現することで、損失額のパーセント点を解析的に表現する。これに対して Gordy [6] は、実際の損失額のパーセント点は ASRF モデルのパーセント点から乖離しているものとし、パーセント点を乖離幅でテイラー展開したときの二次項を解析的に評価した⁵。Granularity Adjustment とは、損失額のパーセント点を求める際に ASRF モデルから得られる値にこの二次の調整項（以下では GA 項と略）を加えることを指す。GA 項の具体的な式は Lütkebohmert [11] や室町 [18] などを参照されたい。

この GA 項は極限まで細分化されてシステムティックリスクのみを持つ与信ポートフォリオからの乖離の大きさを示すので、それを集中度の効果とみなし、さらに Capital-Add-on として適用しようというのが Lütkebohmert [11] の主張である。彼らは数値計算でさまざまな与信ポートフォリオの HHI と GA の関係を示し、大規模なポートフォリオで HHI が比較的低い（分散が十分に効いている）場合は HHI と GA はおよそ線形の関係にあるが、HHI が高くなるにつれてその関係は崩れることを示し、HHI は与信集中度の指標として適切とは言えないことを示した。さらに Gordy and Lütkebohmert [7] でも、Capital-Add-on を HHI とどのように関連付ければよいのか明確でないこと、granularity の影響はポートフォリオのクレジットの質に強く影響を受けるが、それを HHI に基づく数式に落とし込むことは難しいことなどを理由として挙げ、HHI の利用の不適切さを指摘している。なお、Gordy and Lütkebohmert [7] らのアプローチの一部には定式化に使うモデルの一貫性に欠けている点があったが、Emmer and Tasche [3] はモデルの一貫性を重視して GA を適用したところ、二次の GA 項の精度は狭い領域でのみ高く、広い範囲で有効ではないことがわかった。

Granularity Adjustment 以外で与信ポートフォリオのリスク評価の精度を高める研究としては、Lütkebohmert [11] の分類によると、Emmer and Tasche [3] による半漸近的アプローチ (semi-asymptotic approach) と、鞍点法 (saddlepoint method) を用いた研究がある。

Emmer and Tasche [3] は、バーゼルが基礎とする数理モデルに GA を適用しても良い精度の近似式が得られなかったのも、ポートフォリオを一つの貸付とその他に分け、その他の部分に ASRF モデルの考え方を適用した。

鞍点法を用いた研究では、まず損失額の分布関数のモーメント母関数を密度関数のラプラス変換とみなすことから始まる。すると密度関数は逆ラプラス変換すれば得られるが、一般にその表現は複雑である。そこで、その数値計算に鞍点法を用いた近似を使うことで、短時間で、かつ精度の良い値を得ることができる。ただし、鞍点法で直接得られるのは、ある与えられた損失額における密度関数あるいは分布関数の値なので、パーセント点を求めるには、分布関数の値がある確率になる損失額を数値計算により探索しなければならず、また、鞍点法による近似式が分布を適切に近似できていることを数学的に保証することは難しい⁶。鞍点法の詳細については室町 [18] に詳しいので、参照されたい。

このように、与信集中度の指標に関する既存研究は残念ながらやや迷走している感が否めない。一方、Capital Add-on への利用という実務的な視点からは後者の研究が重要で、Granularity Adjustment を中心に研究が進められているが、まだまだ議論の余地は残されているようである⁷。

⁵一次項がゼロになることは証明できる。

⁶もっとも、この点は Granularity Adjustment を含めた他の方法でも同様である。

⁷本稿執筆中に IMF から Grippa and Gornicka [8] が公開された。この論文で提案されている partial portfolio approach という方法は、与信ポートフォリオと与信額の大きい少数の貸付とその他に分割し、前者はモンテカルロ・シミュレーションを行って個別リスクを含む全リスクを算出し、後者は十分に分散されてい

2. リスク尺度とリスク寄与度

本節では、本稿の議論において中心的な役割を果たすリスク寄与度 (risk contribution) について説明する。簡単のため、以下では X は連続的な分布を持ち、離散分布のように確率が集中している点が存在しないことを仮定する。なお、本節の記述の多くは室町 [18] によるが、そこにはさらに一般的かつ詳細な説明や証明があるので参照されたい。

まず、ポートフォリオのリスク量を示す統計量 (リスク尺度) について述べる。時刻を t 、現在時刻を $t = 0$ 、リスク計測期間の最終時点 (リスクホライズン) を $t = T, T > 0$ とし、リスクホライズンにおける保有ポートフォリオの将来価値を確率変数 X で表わす。 X に内包されるリスクの大きさを示す尺度として、1990 年代から注目されてきたリスク指標の多くは、以下で定義されるパーセンタイルに基づくものである。

定義 2.1. X を確率変数、 $\alpha \in [0, 1]$ とする。 $P\{X \leq q\} = \alpha$ を満たす実数 q 、すなわち

$$q_X(\alpha) \equiv \{x \in \mathbb{R} | P\{X \leq x\} = \alpha\}$$

を 100α -パーセンタイルという。

定義 2.2. $\alpha \in [0, 1]$ とする。リスクホライズンにおけるポートフォリオの将来価値 X に対し、

$$\text{VaR}_X(\alpha) \equiv k - q_X(\alpha) \quad (2.1)$$

を信頼水準 $100(1 - \alpha)$ -パーセントのバリュエアットリスク (Value at Risk, VaR と略) という。ただし、 k は基準点を示す定数である。

定義 2.3. $E[X^-] < \infty$ を仮定する。 $\alpha \in (0, 1)$ に対して、 X の信頼水準 $100(1 - \alpha)\%$ の期待ショートフォール (expected shortfall) $\text{ES}_\alpha(X)$ を

$$\text{ES}_\alpha(X) \equiv k - \frac{E[X 1_{\{X \leq q_X(\alpha)\}}]}{\alpha} = k - E[X | X \leq q_X(\alpha)] \quad (2.2)$$

で定義する。ただし、 k は基準点を示す定数である。

ポートフォリオにおいて個別資産あるいは資産クラスの収益性管理を考えると、ポートフォリオ全体だけでなく個別資産あるいは部分ポートフォリオ (以下では個別資産という表現で統一する) ごとにリスクとリターンを評価する必要がある。その場合のリターンとしては、収益率の実績値や期待収益率、あるいは無リスク資産の収益を超過する分を考えるならば超過収益率や期待超過収益率などが考えられ、それらには線形性が成り立ち、ポートフォリオ全体のリターンは個別資産のリターンの加重平均として表現できるので、全体のリターンに対する個別資産の寄与を議論することができる。本稿では、リターンの持つこの性質を加法性 (additivity) と呼ぶ。これに対して、リスク尺度としてよく使われる収益率の標準偏差や VaR (Value at Risk) や ES (Expected Shortfall) では一般に線形性は成り立たず、ポートフォリオ全体のリスクは個別資産のリスクの加重平均として表現できない。つまり、一般にリスクは加法的でないため、そのままでは全体のリスクに対する個別資産の寄与

と考えると ASRF モデルを適用して損失額を条件付期待値で代替して、両者を合算することでポートフォリオ全体の信用リスクを算出する。考え方は肥後 [17] の分割モンテカルロ法と同じで、長所はフル・モンテカルロ・シミュレーションに比べて計算時間を圧倒的に短縮できる点である。

を議論しにくい．これに対して，Litterman [10] が提案したリスク尺度はある条件のもとで加法性の成立が数学的に保証される量で，この尺度を一般化した概念がリスク寄与度（risk contribution）である．

現在時刻を $t = 0$ ，リスクホライズンを $t = T$, $T > 0$ とする． n 個の資産からなるポートフォリオを考えて，そのポートフォリオにおける資産 j の保有量を a_j ， $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$ ，時刻 t における資産 j の一単位当たりの価格を $p_j(t)$ ， $\mathbf{p}(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))^\top$ とすると，時刻 t におけるポートフォリオの価値は $\pi(t, \mathbf{a}) \equiv \sum_{j=1}^n a_j p_j(t) = \mathbf{a}^\top \mathbf{p}(t)$ である．また，あるリスク尺度により計測したポートフォリオ全体のリスク量を $R(\mathbf{a})$ で表わす．以下では個別資産の寄与について述べるが，個別資産の代わりにサブポートフォリオを用いても全く同じ議論が成立する．

リスク寄与度は，ある緩やかな条件のもとで加法性を持つ，ポートフォリオ全体のリスク量 $R(\mathbf{a})$ に対する資産 j の寄与を示す量である．加法性の成立は次に示す同次関数におけるオイラーの定理により数学的に保証される．

定義 2.4. 関数 $z = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ が任意の定数 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lambda^\tau z = f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_N)$$

を満たすとき，関数 f は τ 次の同次関数（homogeneous function）であるという．

定理 2.1. 関数 $z = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ は連続微分可能であるとする．このとき， $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ が τ 次の同次関数であることと，

$$\tau f(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{j=1}^N x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

が成り立つことは同値である．

定理 2.1 を同次関数におけるオイラーの定理（Euler's theorem）という．

リスク量 $\rho(\mathbf{a})$ が 1 次の同次関数で連続微分可能ならば，定理 2.1 より，

$$\rho(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial \rho(\mathbf{a})}{\partial a_j} \quad (2.3)$$

が成り立つ．(2.3) は，資産 j のリスク尺度を $a_j \partial \rho(\mathbf{a}) / \partial a_j$ とみなせば加法性が成り立つことを示している．リスク量 $\rho(\mathbf{a})$ が 1 次の同次関数であるという条件は決して特別なものではない．具体的には，コヒーレントリスク尺度（coherent risk measure）ならば定義より $\rho(\mathbf{a})$ は正の（ $\lambda > 0$ ）1 次の同次関数である．コヒーレントリスク尺度については室町 [18] を参照されたい．なお，最近よく使われる凸リスク尺度（convex risk measure）では正の一次同次性は必要条件とされていないので，加法性が成り立つとは限らない．

以上のことを定義と定理としてまとめる．

定義 2.5. ポートフォリオのリスク量 $\rho(\mathbf{a})$ が連続微分可能な 1 次の同次関数であるとき，

$$\rho_j(\mathbf{a}) \equiv a_j \frac{\partial \rho(\mathbf{a})}{\partial a_j}$$

を資産 j の $\rho(\mathbf{a})$ に対するリスク寄与度（risk contribution）という．

定理 2.2. リスク量 $\rho(\mathbf{a})$ が連続微分可能な 1 次の同次関数であるとき、資産 j の $\rho(\mathbf{a})$ に対するリスク寄与度は加法性を満たす。すなわち、

$$\rho(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^n \rho_j(\mathbf{a}) \quad (2.4)$$

が成り立つ。

(2.4) は、ポートフォリオ全体のリスク量 $\rho(\mathbf{a})$ が個別資産のリスク寄与度 $\rho_j(\mathbf{a})$ に分解できることを示している。 $\rho(\mathbf{a})$ が連続微分可能ならば $\rho_j(\mathbf{a})$ は定義可能であり、さらに $\rho(\mathbf{a})$ が一次同次であれば加法性は必ず成立する。

例 2.1. ポートフォリオのリスク量が標準偏差、すなわち $\rho(\mathbf{a}) = \sigma[\pi(T, \mathbf{a})]$ のとき、資産 j のリスク寄与度は

$$\rho_j(\mathbf{a}) = a_j \frac{\text{Cov}(\pi(T, \mathbf{a}), p_j(T))}{\sigma[\pi(T, \mathbf{a})]} \quad (2.5)$$

で与えられる。ただし、 $\text{Cov}(X, Y)$ は確率変数 X, Y の共分散で、 $\sigma[\pi(T, \mathbf{a})] > 0$ とする。

例 2.2. ポートフォリオのリスク量が信頼水準 $100(1 - \alpha)$ -パーセントの VaR、すなわち $\rho(\mathbf{a}) = \text{VaR}_\alpha(\pi(T, \mathbf{a}))$ のとき、資産 j のリスク寄与度は

$$\rho_j(\mathbf{a}) = a_j \left(\frac{\partial k}{\partial a_j} - E[p_j(T) | \pi(T, \mathbf{a}) = q_\alpha(\pi(T, \mathbf{a}))] \right) \quad (2.6)$$

で与えられる。ただし、 $\mathbf{p}(T)$ の分布はある条件を満たすとする。

例 2.3. ポートフォリオのリスク量が信頼水準 $100(1 - \alpha)$ -パーセントの TCE、すなわち $\rho(\mathbf{a}) = \text{TCE}_\alpha(\pi(T, \mathbf{a}))$ のとき、資産 j のリスク寄与度は

$$\rho_j(\mathbf{a}) = a_j \left(\frac{\partial k}{\partial a_j} - E[p_j(T) | \pi(T, \mathbf{a}) \leq q_\alpha(\pi(T, \mathbf{a}))] \right) \quad (2.7)$$

で与えられる。ただし、 $\mathbf{p}(T)$ の分布はある条件を満たすとする。

例 2.4. Kalkbrener [9] によると、ポートフォリオのリスク量が $\rho(\mathbf{a}) = \text{ES}_\alpha(\pi(T, \mathbf{a}))$ のとき、資産 j のリスク寄与度は

$$\begin{aligned} \rho_j(\mathbf{a}) = a_j \left(\frac{\partial k}{\partial a_j} - \frac{1}{\alpha} \left\{ P\{\pi \leq q_\alpha(\pi)\} E[p_j(T) | \pi \leq q_\alpha(\pi)] \right. \right. \\ \left. \left. + (\alpha - P\{\pi \leq q_\alpha(\pi)\}) E[p_j(T) | \pi = q_\alpha(\pi)] \right\} \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

で与えられる ($\pi = \pi(T, \mathbf{a})$ と略)。ただし、 $\mathbf{p}(T)$ の分布はある条件を満たすものとする。(2.8) は、(2.6)、(2.7) と

$$\text{ES}_\alpha(\pi(T, \mathbf{a})) = k - \frac{1}{\alpha} \left\{ P\{\pi \leq q_\alpha(\pi)\} E[\pi | \pi \leq q_\alpha(\pi)] + (\alpha - P\{\pi \leq q_\alpha(\pi)\}) q_\alpha(\pi) \right\}$$

より明らかである。

例 2.5. 市場リスク計測モデルとして有名な分散共分散法では、リスク寄与度を解析的に算出できる。リスクホライズン T におけるポートフォリオ価格を $\pi = \mathbf{a}^\top \mathbf{p}(T)$ 、リスクファクター $x_i, i = 1, \dots, m$ に対する π の感応度を $E_i = \partial\pi/\partial x_i$ 、 $\mathbf{E} = (E_1, \dots, E_m)^\top$ とし、単位時間当たりのリスクファクター間の分散共分散行列を m 次正方行列 $\mathbf{\Omega} = (\Omega_{ij})_{1 \leq i, j \leq m} = (\text{Cov}[x_i, x_j])_{1 \leq i, j \leq m}$ 、標準正規分布における 100α パーセンタイルを z_α とする。分散共分散法では、リスクホライズン T におけるポートフォリオの標準偏差と信頼水準 $100(1-\alpha)$ パーセント VaR_α は、基準点 $k = 0$ とすると、それぞれ

$$\text{VaR}_\alpha = -z_\alpha \sigma_p, \quad \sigma_p = \sqrt{T \mathbf{E}^\top \mathbf{\Omega} \mathbf{E}}$$

で与えられる。これより、

$$\frac{\partial \text{VaR}_\alpha}{\partial a_j} = -z_\alpha \frac{\partial \sigma_p}{\partial a_j} = -\frac{z_\alpha T}{\sigma_p} \sum_{i=1}^m \frac{\partial p_j}{\partial x_i} \sum_{k=1}^m \Omega_{ik} E_k$$

が得られ、さらに

$$\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial \text{VaR}_\alpha}{\partial a_j} = -\frac{z_\alpha T}{\sigma_p} \sum_{i=1}^m \frac{\partial \pi}{\partial x_i} \sum_{k=1}^m \Omega_{ik} E_k = -\frac{z_\alpha T}{\sigma_p} \mathbf{E}^\top \mathbf{\Omega} \mathbf{E} = \text{VaR}_\alpha$$

が成り立つので、リスク寄与度の加法性が成立する。

注 2.1. 上述の例には $\partial k/\partial a_j$ という基準値 k への寄与を示す項が含まれているが、この項は定義可能と暗に仮定した。例えば、 k を現在価値とすると $\partial k/\partial a_j = p_j(0)$ 、 k を T における期待値とすると $\partial k/\partial a_j = E[p_j(T)]$ である。

注 2.2. (2.6) と (2.7) の導出や成立条件の詳細は Tasche [15] や付録 A を参照されたい。それらに見られる (2.6) と (2.7) の導出過程では、 $\mathbf{p}(T)$ の全成分が離散分布に従う場合は想定されていないので、厳密にはその場合のこれらの等式の成立は保証できない。実務でよく使われる信用リスク計測モデルは個々の資産の将来価値（または損失額）が離散分布に従う場合がほとんどなので、リスク寄与度を理論的に検討する際には注意を要する。

3. リスク寄与度と最適ポートフォリオ

2 節で説明したリスク寄与度を用いて、最適ポートフォリオが満たすべき条件式を表現し、その条件式をもとに最適状態からの乖離度を示す指標を提案する。はじめにリスク最小化のみ考察し、次に、リターン指標も考慮したリスク最小化について考察する。

3.1. リスク最小化ポートフォリオとリスク寄与度

時刻 $t = 0$ において、将来時刻 $t = T$ のリスク $\rho(T, \mathbf{a})$ が最小化された最適ポートフォリオを考える。このポートフォリオから資産 j を無限小の da_j 単位売却し、資産 k を無限小の da_k 単位購入するとき、 $d\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{j-1}, a_j - da_j, a_{j+1}, \dots, a_{k-1}, a_k + da_k, a_{k+1}, \dots, a_n)^\top$ とすると、予算制約から

$$p_j(0)da_j = p_k(0)da_k$$

が成り立つので、ポートフォリオ全体のリスク量は

$$\begin{aligned} d\rho(T, \mathbf{a}) &= \rho(T, \mathbf{a} + d\mathbf{a}) - \rho(T, \mathbf{a}) \\ &= -\frac{\partial\rho(T, \mathbf{a})}{\partial a_j} da_j + \frac{\partial\rho(T, \mathbf{a})}{\partial a_k} da_k = -\frac{\partial\rho(T, \mathbf{a})}{\partial a_j} da_j + \frac{\partial\rho(T, \mathbf{a})}{\partial a_k} \frac{p_j(0)}{p_k(0)} da_j \\ &= \left(\frac{\partial\rho(T, \mathbf{a})}{\partial a_k} \frac{p_j(0)}{p_k(0)} - \frac{\partial\rho(T, \mathbf{a})}{\partial a_j} \right) da_j \end{aligned}$$

だけ変化するが、最適性の条件 $d\rho(T, \mathbf{a}) = 0$ より、

$$\frac{1}{p_k(0)} \frac{\partial\rho(T, \mathbf{a})}{\partial a_k} = \frac{1}{p_j(0)} \frac{\partial\rho(T, \mathbf{a})}{\partial a_j} \quad (3.1)$$

または

$$\frac{\partial\rho(T, \mathbf{a})}{\partial(a_k p_k(0))} = \frac{\partial\rho(T, \mathbf{a})}{\partial(a_j p_j(0))} \equiv \lambda(T, \mathbf{a}) \quad (3.2)$$

でなければならない。(3.1) と (3.2) は単位金額当たりのリスク寄与度がどの資産でも等しいことを示しており、その定数を $\lambda(T, \mathbf{a})$ と置いている。このとき、(3.2) より、

$$\frac{\partial\rho(T, \mathbf{a})}{\partial a_j} = p_j(0) \lambda(T, \mathbf{a})$$

なので、

$$\rho(T, \mathbf{a}) = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial\rho(T, \mathbf{a})}{\partial a_j} = \lambda(T, \mathbf{a}) \sum_{j=1}^n a_j p_j(0) = \lambda(T, \mathbf{a}) \pi(0, \mathbf{a})$$

となる。したがって、

$$\lambda(T, \mathbf{a}) = \frac{\rho(T, \mathbf{a})}{\pi(0, \mathbf{a})}$$

であり、

$$\rho_j(T, \mathbf{a}) = a_j \frac{\partial\rho(T, \mathbf{a})}{\partial a_j} = \frac{a_j p_j(0)}{\pi(0, \mathbf{a})} \rho(T, \mathbf{a})$$

または

$$\frac{\rho_j(T, \mathbf{a})}{\rho(T, \mathbf{a})} = \frac{a_j p_j(0)}{\pi(0, \mathbf{a})} \equiv w_j(0, \mathbf{a}) \quad (3.3)$$

が得られる。(3.3) は、リスク最小化されたポートフォリオでは各資産のリスク寄与度のポートフォリオ全体のリスク量に対する比率（本稿ではこれをリスク寄与率と呼ぶ）が現時点 $t = 0$ における金額ベースの保有比率 $w_j(0, \mathbf{a})$ と等しいことを示している。

3.2. リスク最小化ポートフォリオからの乖離を示す指標

前節の結論によると、リスク最小化されたポートフォリオにおける個別資産のリスク寄与度は金額ベースの保有比率に比例する。そこで、 $X_j(t) = a_j p_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, 資産 j の金額ベースの保有比率を $w_j \equiv X_j(0)/\pi(0, \mathbf{a})$, リスク寄与度を ρ_j として、 $\rho_j/X_j(0)$ の小さい順（昇順）に並べて j 番目の資産を $[j]$ で表し、それぞれの累積値を

$$S_w(i) \equiv \sum_{j=1}^i w_{[j]}(0, \mathbf{a}) = \frac{1}{\pi(0, \mathbf{a})} \sum_{j=1}^i X_{[j]}(0) = \frac{1}{\pi(0, \mathbf{a})} \sum_{j=1}^i a_{[j]} p_{[j]}(0)$$

$$S_\rho(i) \equiv \frac{1}{\rho(T, \mathbf{a})} \sum_{j=1}^i \rho_{[j]}(T, \mathbf{a})$$

で表す。ただし、 $S_w(0) = S_\rho(0) = 0$ と定義する。

イメージを明確にするため、

$$S_w(i) > 0 \quad \text{かつ} \quad S_\rho(i) \geq 0$$

の場合を考える⁸。二次元平面上に $(S_w(i), S_\rho(i))_{i=0, \dots, n}$ をプロットしてカーブを描くと、リスク最小化されたポートフォリオならば、このカーブは $(0, 0)$ から $(1, 1)$ への対角線になる。一方、リスク最小化されていないポートフォリオのカーブの一般形は、原点付近で x 軸に沿って緩やかに立ち上がり、次第にカーブの傾きは急になり、最後は急角度になって $(1, 1)$ に達する。すると、このカーブと（リスク最小化ポートフォリオが描くカーブである）対角線の間の面積は、ポートフォリオ全体のリスク最小化という最適性からの乖離の大きさを示す指標になりうる。なお、個々の資産の寄与については該当部分のカーブの傾きをみればよく、傾きが大きいほど相対的にリスク寄与率は高く、傾きが小さいほど相対的にリスク寄与率は低い。ここで述べた面積を GI と書き、数式で示すと、

$$GI \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} (S_w(i) - S_w(i-1))(S_\rho(i) + S_\rho(i-1)) \right)$$

$$= 1 - \sum_{j=1}^n (S_w(i) - S_w(i-1))(S_\rho(i) + S_\rho(i-1))$$

となるが、これはジニ係数（Gini coefficient）そのものである。

上述の議論から、個々の資産を比較するにはカーブの部分的な傾きである

$$\frac{\rho_j(T, \mathbf{a})}{\rho(T, \mathbf{a}) w_j(0, \mathbf{a})}, \quad j = 1, \dots, n,$$

もしくは

$$\frac{\rho_j(T, \mathbf{a})}{\rho(T, \mathbf{a})} - w_j(0, \mathbf{a}), \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

が使えることもわかる。さらに、ポートフォリオ全体の乖離度として、(3.4) に基づく

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\rho_j(T, \mathbf{a})}{\rho(T, \mathbf{a})} - w_j(0, \mathbf{a}) \right)^2$$

も考えられる。

⁸一般的なポートフォリオでは、 $S_w(i) > 0$ はまだしも、 $S_\rho(i) \geq 0$ が必ずしも成立するとは限らない。

3.3. 収益性を考慮した最適ポートフォリオとリスク寄与度

3.1節の議論ではリスクの最小化のみ考えて、リターンに関しては考察しなかった。しかし、ファイナンスにおける評価の原則はリスクとリターンを用いた少なくとも二変量以上による評価である。そこで、ここではリターンも考慮に入れたリスク最小化について考える。個別資産のリターン評価の指標としては（超過）収益の実績値や期待（超過）収益などが考えられるが、ここでは特に期待超過収益率を考える⁹。もしも期待収益率を考える場合には、無リスク資産の収益率をゼロとみなせばよい。

時刻 t におけるポートフォリオ全体の収益率を $R_\pi(t, \mathbf{a})$ 、資産 j の収益率を $R_j(t)$ 、無リスク資産の収益率を $r_f(t)$ とし、リスクホライズンを $T > 0$ とする。すると、

$$\sum_{j=1}^n R_j(T) X_j(0) = R_\pi(T, \mathbf{a}) \pi(0, \mathbf{a}) \quad (3.5)$$

は常に成り立つので、 $r_f(T)$ を超える超過収益率に関しては、

$$\sum_{j=1}^n (\mu_j(T) - r_f(T)) X_j(0) = (\mu_\pi(T) - r_f(T)) \pi(0, \mathbf{a}) \equiv ER(T, \mathbf{a}) \quad (3.6)$$

という関係式が得られる。ただし、 $\mu_j(T) \equiv E[R_j(T)]$ 、 $\mu_\pi(T) \equiv E[R_\pi(T, \mathbf{a})]$ で、 $ER(T, \mathbf{a})$ はポートフォリオの超過収益である。(3.6)の左辺を、資産 j の超過リターン寄与度 (Excess Return Contribution)

$$ERC_j(T, \mathbf{a}) \equiv (\mu_j(T) - r_f(T)) X_j(0) = (\mu_j(T) - r_f(T)) a_j p_j(0) \quad (3.7)$$

の和とみなすと、(3.6) と (3.7) より、資産 j の超過リターン寄与率は

$$\frac{ERC_j(T, \mathbf{a})}{(\mu_\pi(T) - r_f(T)) \pi(0, \mathbf{a})} = \frac{(\mu_j(T) - r_f(T))}{(\mu_\pi(T) - r_f(T))} w_j(0)$$

となる。

ここで、ある期待超過収益率のもとにおけるリスク最小化ポートフォリオ、あるいは、あるリスク量のもとにおける期待超過収益率最大化ポートフォリオを最適ポートフォリオと考える。最適ポートフォリオでは、超過リターン寄与度とリスク寄与度の比は資産によらず等しくなることを示す。

リスク量が $\rho(T, \mathbf{a}) = C$ (C は定数) の期待超過収益率最大化ポートフォリオを考える。ラグランジュ関数を、未定乗数を λ として

$$L(T, \mathbf{a}) \equiv ER(T, \mathbf{a}) - \lambda(\rho(T, \mathbf{a}) - C)$$

と書くと、最適性の一階の条件より、

$$\frac{\partial L(T, \mathbf{a})}{\partial a_j} = \frac{1}{a_j} (ERC_j(T, \mathbf{a}) - \lambda \cdot \rho_j(T, \mathbf{a})) = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

⁹収益率には対数収益率と算術収益率があるが、ここでは後者を考える。リターンやリスクの各資産への分解を考えるには、(3.5) のような単純な関係式が成立する算術収益率の方が適している。

なので,

$$\lambda = \frac{ERC_j(T, \mathbf{a})}{\rho_j(T, \mathbf{a})}, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.8)$$

すなわち, $ERC_j(T, \mathbf{a})/\rho_j(T, \mathbf{a})$ は資産によらず一定でなければならない. さらに, (3.8) より,

$$\lambda \sum_{j=1}^n \rho_j(T, \mathbf{a}) = \sum_{j=1}^n ERC_j(T, \mathbf{a})$$

となるので,

$$\lambda = \frac{ER(T, \mathbf{a})}{\rho(T, \mathbf{a})}$$

であり, (3.8) とあわせて,

$$\lambda = \frac{ER(T, \mathbf{a})}{\rho(T, \mathbf{a})} = \frac{ERC_j(T, \mathbf{a})}{\rho_j(T, \mathbf{a})}, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.9)$$

が得られる.

例 3.1. リスク量として標準偏差を選択すると, $\rho(T, \mathbf{a}) = \sigma_\pi(T) = \sigma[\pi(T, \mathbf{a})]$ なので, (2.5) より, リスク寄与度は

$$\rho_j(T, \mathbf{a}) = \frac{\text{Cov}(\pi(T, \mathbf{a}), a_j p_j(T))}{\sigma[\pi(T, \mathbf{a})]} = \rho_j(T) \sigma_j(T) \quad (3.10)$$

で与えられる. ただし, $\text{Cor}(X, Y)$ を確率変数 X, Y の相関係数として, $\rho_j(t) \equiv \text{Cor}(\pi(t, \mathbf{a}), X_j(t))$, $\sigma_j(t) \equiv \sigma[X_j(t)]$ である. 一方, リターン寄与度は (3.7) で与えられるので, (3.9) より,

$$\lambda = \frac{(\mu_\pi(T) - r_f(T)) \pi(0, \mathbf{a})}{\sigma[\pi(T, \mathbf{a})]} = \frac{(\mu_j(T) - r_f(T)) X_j(0)}{\rho_j(T) \sigma_j(T)}, \quad j = 1, \dots, n.$$

よって,

$$\lambda = \frac{\mu_\pi(T) - r_f(T)}{\sigma[\frac{\pi(T, \mathbf{a})}{\pi(0, \mathbf{a})}]} = \frac{\mu_j(T) - r_f(T)}{\rho_j(T) \sigma[\frac{X_j(T)}{X_j(0)}]}, \quad j = 1, \dots, n$$

すなわち,

$$\lambda = \frac{\mu_\pi(T) - r_f(T)}{\sigma[R_\pi(T)]} = \frac{\mu_j(T) - r_f(T)}{\rho_j(T) \sigma[R_j(T)]}, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.11)$$

が得られる.

(3.11) は CAPM (Capital Asset Pricing Model, 資本資産評価モデル) において成立する関係式である. 逆に, (3.9) は CAPM における関係式 (3.11) を任意のリスク量¹⁰ に対して一般化したものとも考えることもできる.

¹⁰ただし, 関係式 (2.4) は成立しなければならない.

3.4. 収益性を考慮した最適ポートフォリオからの乖離を示す指標

3.3節の結論によると、リスク量一定のもとで期待超過収益を最大化するポートフォリオは(3.8)を満たす、すなわち、超過リターン寄与度とリスク寄与度の比は資産によらず等しくなる。この結論をもとに、リスクとリターンを同時に考慮したときの最適ポートフォリオからの乖離を示す指標を考える。

まず、3.2節と同様に、ジニ係数

$$\begin{aligned} GI &\equiv \frac{1}{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (x_i - x_{i-1})(y_i + y_{i-1}) \right) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})(y_i + y_{i-1}) \end{aligned}$$

が考えられる。ただし、 $[i]$ は $ERC_i(T, \mathbf{a})/\rho_i(T, \mathbf{a})$ を小さい順（昇順）に並べたときの i 番目の資産の番号で、 $x_0 = y_0 = 0$,

$$x_i = \sum_{j=1}^i \frac{\rho_{[j]}(T, \mathbf{a})}{\rho(T, \mathbf{a})}, \quad y_i = \sum_{j=1}^i \frac{ERC_{[j]}(T, \mathbf{a})}{ERC(T, \mathbf{a})}, \quad i = 1, \dots, n$$

とする。また、個々の資産を比較するには、(3.9)より、

$$\frac{ERC_j(T, \mathbf{a})}{\rho_j(T, \mathbf{a})} - \frac{ERC(T, \mathbf{a})}{\rho(T, \mathbf{a})}, \quad j = 1, \dots, n$$

が考えられる。他には、ポートフォリオ全体の乖離度を示す指標として、

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{ERC_j(T, \mathbf{a})}{\rho_j(T, \mathbf{a})} - \frac{ERC(T, \mathbf{a})}{\rho(T, \mathbf{a})} \right)^2$$

あるいは

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{ERC_j(T, \mathbf{a})}{\rho_j(T, \mathbf{a})}$$

も考えられる。

3.5. 備考：CAPMにおける β の一般化

本稿のテーマからは脱線するが、3.3節の議論からCAPMにおける β を一般化する式が得られることを示す。

超過収益の部分を具体化する。そのためにまず(2.1)および(2.2)の k を特定するが、ここでは

$$k \equiv (1 + r_f(T))\pi(0, \mathbf{a}) = (1 + r_f(T)) \sum_{j=1}^n a_j p_j(0)$$

を考える。このとき、

$$\frac{\partial k}{\partial a_j} = (1 + r_f(T))p_j(0)$$

なので、信頼水準 $100(1 - \alpha)$ -パーセントの VaR のリスク寄与度は、(2.7) より、

$$\rho_j(\mathbf{a}) = (1 + r_f(T))X_j(0) - E[X_j(T)|\pi(T, \mathbf{a}) = q_\alpha(\pi(T, \mathbf{a}))] \quad (3.12)$$

信頼水準 $100(1 - \alpha)$ -パーセントの TCE のリスク寄与度は、(2.8) より、

$$\rho_j(\mathbf{a}) = (1 + r_f(T))X_j(0) - E[X_j(T)|\pi(T, \mathbf{a}) \leq q_\alpha(\pi(T, \mathbf{a}))] \quad (3.13)$$

で与えられる。

ここで (3.12) と (3.13) の一般化を考える。一般に、ある特定のストレス的な事象 A を想定したとき、リスク寄与度が

$$\rho_j^A(\mathbf{a}) \equiv (1 + r_f(T))X_j(0) - E[X_j(T)|A] \quad (3.14)$$

で表現できるとすると¹¹、(3.9)、(3.7)、(3.14) より、最適ポートフォリオにおける λ は、

$$\lambda = \frac{ERC_j(T, \mathbf{a})}{\rho_j(T, \mathbf{a})} = \frac{(\mu_j(T) - r_f(T))X_j(0)}{(1 + r_f(T))X_j(0) - E[X_j(T)|A]} = \frac{\mu_j(T) - r_f(T)}{r_f(T) - E[R_j(T)|A]} \quad (3.15)$$

と表現できる。一方、(3.9)、(3.6)、(3.14) より、

$$\lambda = \frac{ER(T, \mathbf{a})}{R(T, \mathbf{a})} = \frac{(\mu_\pi(T) - r_f(T))\pi(0, \mathbf{a})}{(1 + r_f(T))\pi(0, \mathbf{a}) - E[\pi(T, \mathbf{a})|A]} = \frac{\mu_\pi(T) - r_f(T)}{r_f(T) - E[R_\pi(T)|A]} \quad (3.16)$$

のように、(3.15) と同じ形式で表現できて、

$$\mu_j(T) - r_f(T) = \beta_j^A (\mu_\pi(T) - r_f(T)) \quad (3.17)$$

ただし、

$$\beta_j^A \equiv \frac{r_f(T) - E[R_j(T)|A]}{r_f(T) - E[R_\pi(T)|A]}$$

である。(3.17) より β_j^A はストレス事象 A におけるベータと呼べる量で、通常の CAPM の β は $A = \Omega$ (Ω は全事象) の場合に相当する。

注 3.1. 基準点を $k = \pi(0, \mathbf{a})$ とする場合、超過収益でなく収益で考えるべきなので、(3.17) で $r_f(T) = 0$ とおくことにより、

$$\mu_j(T) = \frac{E[R_j(T)|A]}{E[R_\pi(T)|A]} \mu_\pi(T)$$

となる。

注 3.2. (3.15) と (3.16) より、

$$\frac{\rho_j(T, \mathbf{a})}{\rho(T, \mathbf{a})} = \frac{ERC_j(T, \mathbf{a})}{ER(T, \mathbf{a})} = \frac{(\mu_j(T) - r_f(T))X_j(0)}{(\mu_\pi(T) - r_f(T))\pi(0, \mathbf{a})} = \frac{\mu_j(T) - r_f(T)}{\mu_\pi(T) - r_f(T)} w_j(0). \quad (3.18)$$

すなわち、最適ポートフォリオにおけるリスク寄与率は (3.18) で与えられる。

¹¹ VaR は $A = \{\pi(T, \mathbf{a}) = q_\alpha(\pi(T, \mathbf{a}))\}$ 、ES は $A = \{\pi(T, \mathbf{a}) \leq q_\alpha(\pi(T, \mathbf{a}))\}$ に相当する。残念ながら、標準偏差はこの形で表現できない。

4. 数値例：与信ポートフォリオの信用リスクと提案指標

本節では、単純なモデルを用いてさまざまな与信ポートフォリオの信用リスクを計測し、理論上の最適ポートフォリオからの乖離の大きさとさまざまな提案指標の関係を数値的に調べる。デフォルト（債務不履行）のモデリングには one-factor Gaussian copula model（以下では OFGCM と略）を使用する。このモデルはポートフォリオの信用リスク計測モデルとして有名な CreditMetricsTM から派生的に提案されたもので、その後、証券化商品の一つである CDO（債務担保証券, Collateralized Debt Obligations）の標準的な価格付けモデルとなり、また BASELII における信用リスクウェイトのフォーミュラの原型にもなっている。このモデルをもとに、モンテカルロ法で生成したさまざまなポートフォリオにおいて提案指標を計算するとともに最適ポートフォリオを求め、個々のポートフォリオの最適ポートフォリオからの乖離の大きさと提案指標の関係を調べる。

本節ではリスク尺度として収益率の標準偏差を使用する。その理由は、1) 理解しやすい尺度であるため、2) リスク量およびリスク寄与度の計算を解析的に扱うことが可能で正確に算出できるため¹²、3) VaR や ES のように信頼水準の設定が不要なので、信頼水準に関する議論を避けられるため、4) 本節で扱うモデルではポートフォリオの将来価値分布は離散的なのでリスク寄与度の議論が複雑になり、3.1 節までの議論を正確に適用できないため¹³である。標準偏差を選択することによる問題点もあるが、今回のように初歩的な検討を行う際には標準偏差という選択肢が適していると考えている。もちろん、VaR や ESなどをリスク尺度として採用すれば、本稿で得られた結果が変わりえることに注意されたい。

4.1. 設定

現時点を時刻 $t = 0$ として、 n 件の融資の満期 $T = 1$ 年後の価値を考える。与信ポートフォリオのリスク計測には潜在損失額が用いられることが多いが、リスクとリターンの同時評価を行うには将来価値で考える必要があるためである。第 j , $j = 1, \dots, n$ 番目の融資の元本を m_j 、年利率を a_j 、デフォルト時刻を正の確率変数 $\tau_j > 0$ 、デフォルト確率を $q_j(T) = E[1_{\{\tau_j \leq T\}}]$ 、回収率を δ_j とする。将来時点の価値 P_j は、単純化して、

$$P_j = m_j(1 + a_j)1_{\{\tau_j > T\}} + m_j(1 + a_j)\delta_j 1_{\{\tau_j \leq T\}} = m_j(1 + a_j)(\delta_j + (1 - \delta_j)1_{\{\tau_j > T\}})$$

すなわち、非デフォルト時の将来価値は $P_j = m_j(1 + a_j)$ 、デフォルト発生時の将来価値は $P_j = \delta_j m_j(1 + a_j)$ で与えられると仮定する。このとき、将来価値の期待値は

$$E[P_j] = m_j(1 + a_j)(\delta_j + (1 - \delta_j)q_j(T))$$

分散は

$$V[P_j] = E[P_j^2] - (E[P_j])^2 = m_j^2(1 + a_j)^2(1 - \delta_j)^2q_j(T)(1 - q_j(T))$$

となる。収益率は

$$R_j = \frac{P_j}{m_j} - 1 = (1 + a_j)(\delta_j + (1 - \delta_j)1_{\{\tau_j > T\}}) - 1$$

¹²VaR および ES のリスク寄与度を高精度で数値計算することは難しい。この点に関しては Glasserman [5], Muromachi [12, 13], 室町 [18] を参照されたい。

¹³Tasche [15] や室町 [18] を参照されたい。

で定義し，期待収益率は

$$E[R_j] = (1 + a_j)(\delta_j + (1 - \delta_j)(1 - q_j(T))) - 1$$

収益率の分散は

$$V[R_j] = E[R_j^2] - (E[R_j])^2 = (1 + a_j)^2(1 - \delta_j)^2 q_j(T)(1 - q_j(T))$$

共分散は

$$\begin{aligned} \text{Cov}[R_j, R_k] &= E[R_j R_k] - E[R_j] E[R_k] \\ &= (1 + a_j)(1 + a_k)(1 - \delta_j)(1 - \delta_k) (E[1_{\{\tau_j \leq T, \tau_k \leq T\}}] - q_j(T)q_k(T)) \end{aligned} \quad (4.1)$$

で与えられる．

OFGCM では，デフォルト時刻を表す確率変数 τ_j の代わりに，標準正規分布に従う確率変数

$$X_j \equiv \Phi^{-1}(F_j(\tau_j)) = \rho_j V + \sqrt{1 - \rho_j^2} \epsilon_j, \quad j = 1, \dots, n$$

を考えて，デフォルト事象を $\{\tau_j \leq T\} = \{X_j \leq \Phi^{-1}(F_j(T))\}$ で定義する¹⁴．ここで， $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数で $\Phi^{-1}(\cdot)$ はその逆関数， $F_j(t)$ は融資 j の累積デフォルト確率， V と ϵ_j , $j = 1, \dots, n$ は互いに独立な標準正規分布に従う確率変数で， ρ_j , $j = 1, \dots, n$ はファクターローディングである．OFGCM を用いると，

$$E[1_{\{\tau_j \leq T, \tau_k \leq T\}}] = E[1_{\{X_j \leq \Phi^{-1}(F_j(T)), X_k \leq \Phi^{-1}(F_k(T))\}}] = \Phi_2(\Phi^{-1}(F_j(T)), \Phi^{-1}(F_k(T)), \rho_j \rho_k) \quad (4.2)$$

と表現できる．ここで， $\Phi_2(\cdot, \cdot, \rho)$ は相関係数 ρ の 2 変量標準正規分布の同時分布関数である．証明は室町 [18] を参照されたい．(4.2) より，収益率の共分散 (4.1) は

$$\begin{aligned} \text{Cov}[R_j, R_k] &= (1 + a_j)(1 + a_k)(1 - \delta_j)(1 - \delta_k) \\ &\quad \times (\Phi_2(\Phi^{-1}(q_j(T)), \Phi^{-1}(q_k(T)), \rho_j \rho_k) - q_j(T)q_k(T)) \end{aligned} \quad (4.3)$$

と表現できるので，与信ポートフォリオのリスクを期待収益率の標準偏差で考える場合には，(4.3) を収益率の共分散として用いてこれまでの議論を展開すればよい．なお， $j = k$ のとき，(4.3) は

$$\text{Cov}[R_j, R_j] = (1 + a_j)^2(1 - \delta_j)^2 q_j(T)(1 - q_j(T)) = V[R_j]$$

となる．

¹⁴確率論では，議論の対象とする事象の確率分布さえ等しければ，数理的に取り扱いやすい他の確率変数にすり替えて議論を展開することができる．今の場合，確率分布とは今後 1 年間のデフォルト確率のことなので， τ_j を用いたモデルと X_j を用いたモデルで今後 1 年間のデフォルト確率が一致していれば，確率変数をすり替えた議論は可能である．

4.2. 計算条件

信用格付けは4段階とし、それぞれ格付 A, B, C, D とする。各格付のデフォルト確率と年利率は表 1（設定 A）または表 2（設定 B）を使用する。設定 A はデフォルトに対するリスクプレミアムが小さい場合、設定 B はリスクプレミアムがある程度の大きさの場合であるが、特に実際のデータから推定を行ったものではない。回収率は融資によらず一定で $\delta_j = 0$ とし、ファクターローディング ρ も融資によらず一定とし、 $\rho = 0, 0.5, 0.8$ の 3 種類を使用する。また、与信ポートフォリオを想定しているため、モンテカルロ法で発生させるポートフォリオ組成において空売りは禁止する。簡単のため、無リスク金利は $r_f = 0$ とする。

	A	B	C	D
デフォルト確率	0.1 %	1.0 %	2.0 %	5.0 %
年利率	0.101 %	1.011 %	2.05 %	5.27 %

表 1: 格付別デフォルト確率と年利率（設定 A）

	A	B	C	D
デフォルト確率	0.1 %	1.0 %	2.0 %	5.0 %
年利率	0.5 %	4.0 %	6.0 %	10.0 %

表 2: 格付別デフォルト確率と年利率（設定 B）

4.3. 計算する指標

モンテカルロ・シミュレーションで生成した各ポートフォリオごとに算出する指標は以下である。

- $\mu_p(T, \mathbf{a})$: ポートフォリオの期待収益率,
- $\sigma_p(T, \mathbf{a})$: ポートフォリオの収益率の標準偏差（トータルリスクと呼ぶ）,
- $\lambda_p(T, \mathbf{a})$: ポートフォリオ- λ

$$\lambda_p(T, \mathbf{a}) \equiv \frac{ER(T, \mathbf{a})}{\rho(T, \mathbf{a})}, \quad (4.4)$$

- HHI

$$HHI \equiv \sum_{j=1}^n w_j^2(0, \mathbf{a}), \quad (4.5)$$

- $DA(T, \mathbf{a})$: Deviated Area

$$DA(T, \mathbf{a}) \equiv \sum_{j=1}^n \Delta X_j(T, \mathbf{a}) \times \text{Deviate} Y_j(T, \mathbf{a}), \quad (4.6)$$

$$\Delta X_j(T, \mathbf{a}) = \frac{\rho_j(T, \mathbf{a})}{\rho(T, \mathbf{a})}, \quad (4.7)$$

$$\text{Deviate} Y_j(T, \mathbf{a}) = \frac{ERC_j(T, \mathbf{a})}{ER(T, \mathbf{a})} - \Delta X_j(T, \mathbf{a}), \quad (4.8)$$

- $GI(T, \mathbf{a})$: ジニ係数

$$GI(T, \mathbf{a}) \equiv 1 - \sum_{j=1}^n (x_i - x_{i-1})(y_i + y_{i-1}), \quad (4.9)$$

ただし, $[i]$ は $ERC_i(T, \mathbf{a})/\rho_i(T, \mathbf{a})$ を小さい順 (昇順) に並べたときの i 番目の資産の番号で, $x_0 = y_0 = 0$,

$$x_i = \sum_{j=1}^i \frac{\rho_{[j]}(T, \mathbf{a})}{\rho(T, \mathbf{a})}, \quad y_i = \sum_{j=1}^i \frac{ERC_{[j]}(T, \mathbf{a})}{ERC(T, \mathbf{a})}, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.10)$$

とする. ジニ係数の図形的意味は付録 B を参照されたい.

- $\sigma_\lambda(T, \mathbf{a})$: Deviation

$$\sigma_\lambda \equiv \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{ERC_j(T, \mathbf{a})}{\rho_j(T, \mathbf{a})} - \lambda_p(T, \mathbf{a}) \right)^2}, \quad (4.11)$$

- $D_R(T, \mathbf{a})$: Risk Difference

$$D_R \equiv \sigma_p(T, \mathbf{a}) - \sigma_{optimal-p}(T, \mathbf{a}), \quad (4.12)$$

ただし, $\sigma_{optimal-p}$ は当該ポートフォリオと同じ期待収益率 μ_p でリスク最小の最適ポートフォリオのリスク量.

以下ではトータルリスク $\sigma_p(T, \mathbf{a})$ を真のリスク量とみなす.

4.4. 4 資産のケース

ここではリスク性資産としてそれぞれの格付けから 1 資産ずつ, 計 4 資産からなるポートフォリオの結果について述べる.

設定 A による結果を図 1-図 6 に示す. 図 1 は縦軸がポートフォリオ- λ で横軸が HHI, 図 2 は縦軸がトータルリスク (σ_p) で横軸が HHI, 図 3 は縦軸がポートフォリオ- λ で横軸が Deviated Area, 図 4 は縦軸がポートフォリオ- λ で横軸が Gini 係数, 図 5 は縦軸がポートフォリオ- λ で横軸が Deviation, 図 6 は縦軸がポートフォリオ- λ で横軸が Risk Difference である. また, それぞれの図で, (a) は $\rho = 0$, すなわち個々のデフォルトが独立な場合, (b) は $\rho = 0.5$ の場合, (c) は $\rho = 0.8$ の場合で, (d) は格付け D の資産のみ $\rho = -0.8$ で他は $\rho = 0.8$ の場合であり, 10 資産のケースでも同様とする. ただし, 10 資産のケースでは (a)-(c) のみ考える.

この計算では収益率 r_f の無リスク資産が存在するときの最適化を考えているので, リスク性資産の最適な組み合わせは λ_p (ポートフォリオ- λ) を最大化するポートフォリオである. そのため, λ_p はポートフォリオの最適性を示す指標とみなせるので, この値を多くの図で使用している. 以下では, λ_p (ポートフォリオ- λ) が高いほどより最適ポートフォリオに近いと考える.

これらの図から, 以下のことがわかる.

1. 図 1 より, HHI はポートフォリオの最適性からの乖離を示す指標とは言えない. すなわち, HHI が小さいこととポートフォリオが最適ポートフォリオに近いことの間には明確な対応関係は見られない. また, 縦軸方向の広がりが多いため, HHI と最適性の関係は低いと言わざるを得ない.

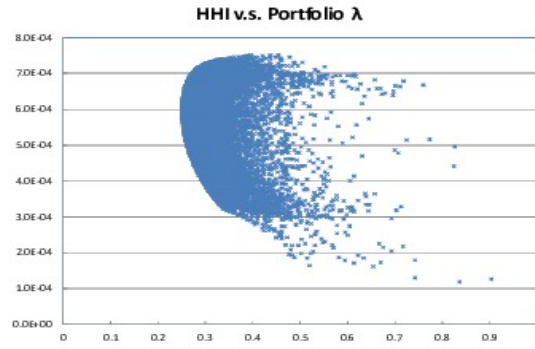


図 1: (a) HHI (x-軸) v.s. portfolio- λ (y-軸), $\rho = 0$, 4 assets, Setting A

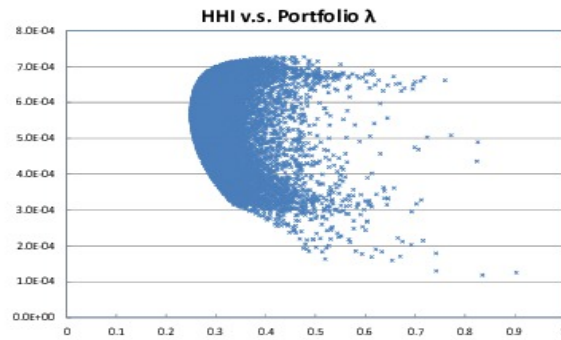


図 1: (b) HHI (x-軸) v.s. portfolio- λ (y-軸), $\rho = 0.5$, 4 assets, Setting A

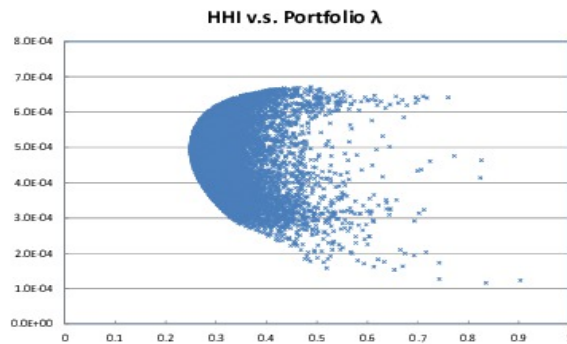


図 1: (c) HHI (x-軸) v.s. portfolio- λ (y-軸), $\rho = 0.8$, 4 assets, Setting A

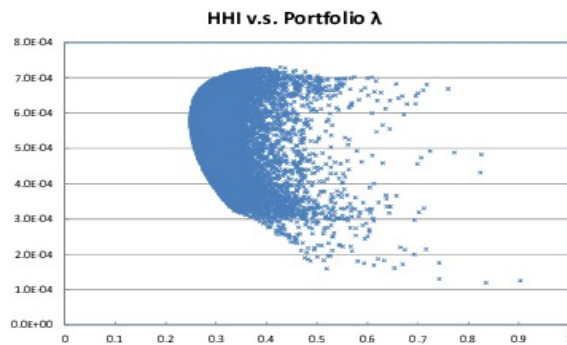


図 1: (d) HHI (x-軸) v.s. portfolio- λ (y-軸), 4 assets, Setting A

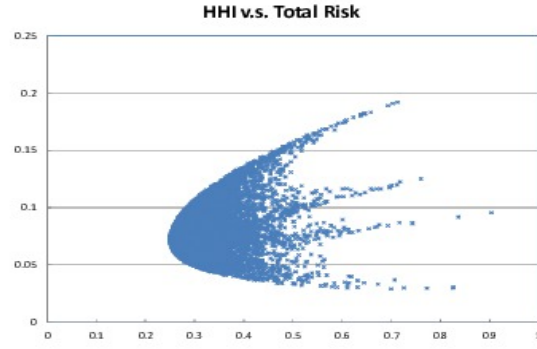


図 2: (a) HHI (x-軸) v.s. total risk σ_v (y-軸), $\rho = 0$, 4 assets, Setting A

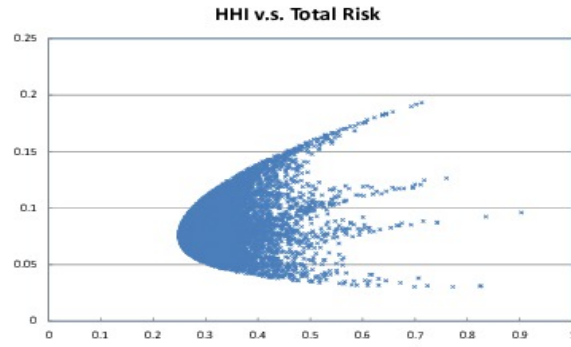


図 2: (b) HHI (x-軸) v.s. total risk σ_v (y-軸), $\rho = 0.5$, 4 assets, Setting A

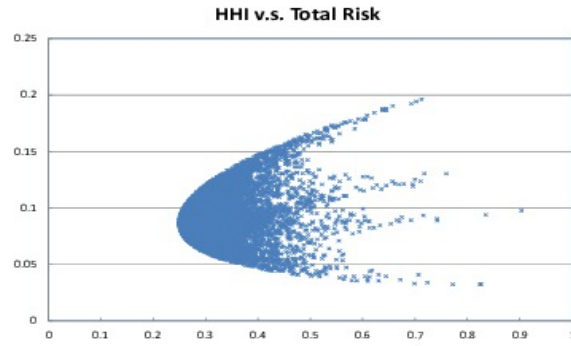


図 2: (c) HHI (x-軸) v.s. total risk σ_n (y-軸), $\rho = 0.8$, 4 assets, Setting A

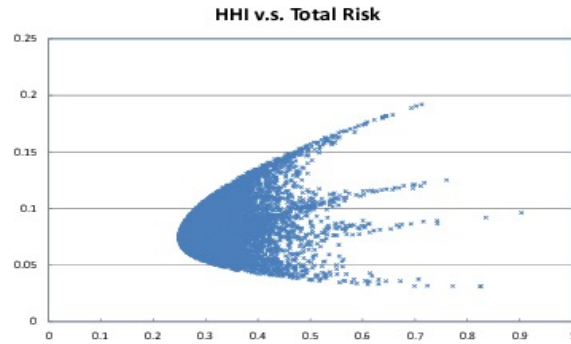


図 2: (d) HHI (x-軸) v.s. total risk σ_p (y-軸), 4 assets, Setting A

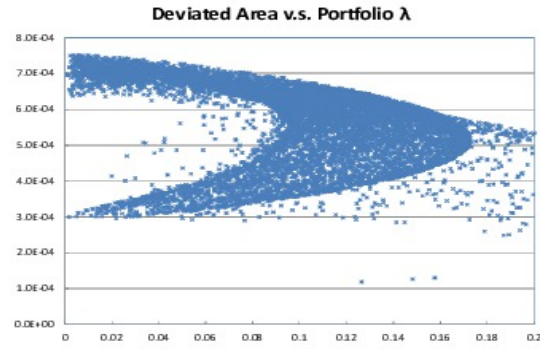


図 3: (a) Deviated Area (x-軸) v.s. portfolio- λ (y-軸), $\rho = 0$, 4 assets, Setting A

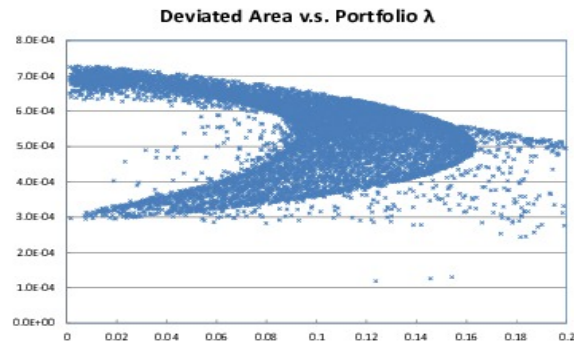


図 3: (b) Deviated Area (x-軸) v.s. portfolio- λ (y-軸), $\rho = 0.5$, 4 assets, Setting A

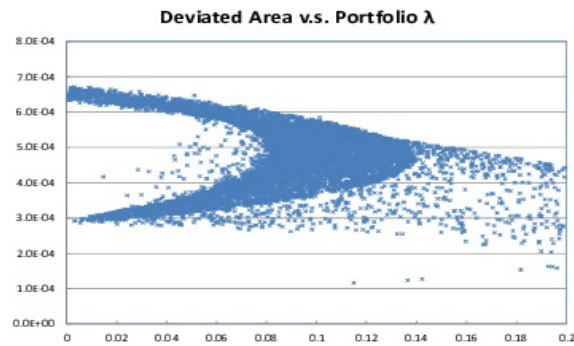


図 3: (c) Deviated Area (x-軸) v.s. portfolio- λ (y-軸), $\rho = 0.8$, 4 assets, Setting A

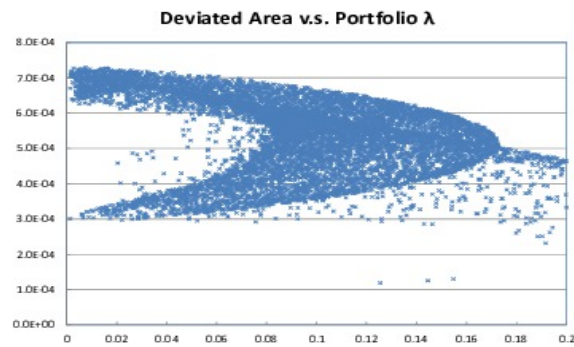


図 3: (d) Deviated Area (x-軸) v.s. portfolio- λ (y-軸), 4 assets, Setting A

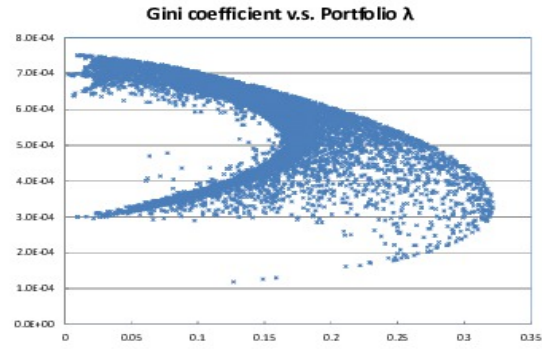


図 4: (a) Gini coefficient (x-軸) v.s. portfolio- λ (y-軸), $\rho = 0$, 4 assets, Setting A

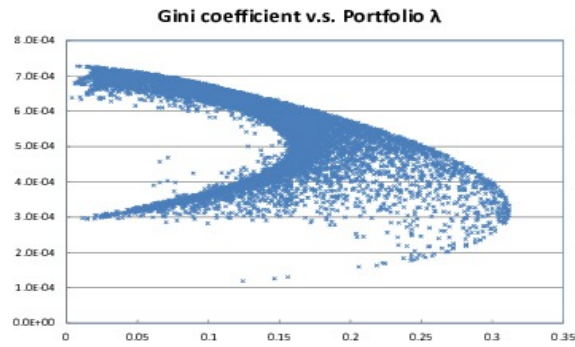


図 4: (b) Gini coefficient (x-軸) v.s. portfolio- λ (y-軸), $\rho = 0.5$, 4 assets, Setting A

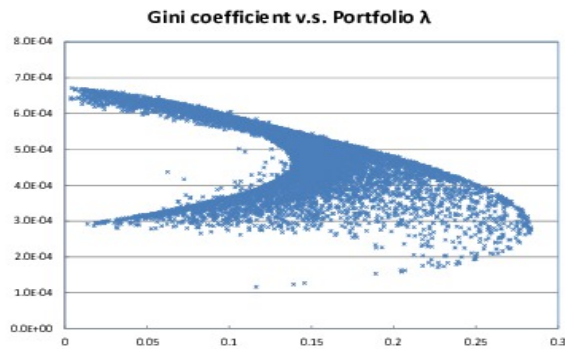


図 4: (c) Gini coefficient (x-軸) v.s. portfolio- λ (y-軸), $\rho = 0.8$, 4 assets, Setting A

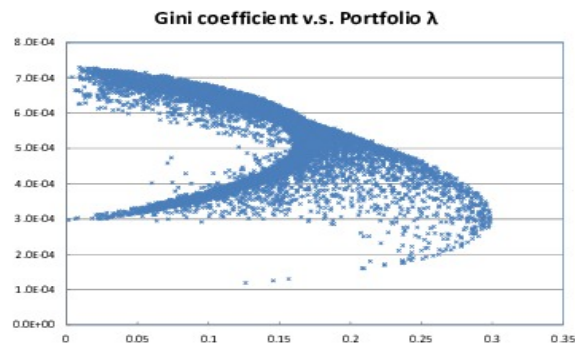


図 4: (d) Gini coefficient (x-軸) v.s. portfolio- λ (y-軸), 4 assets, Setting A

2. 同様に、図2より、HHIが小さいこととポートフォリオのリスク最小化にも明確な対応関係は見られない。
3. 図3より、最適に近いポートフォリオのDeviation Areaの値（以下、DAと略）は小さいが、DAの小さいポートフォリオが最適に近いとは限らない。つまり、DAの値が小さいことは最適ポートフォリオに近いことの必要条件ではあるが、十分条件ではない。
4. 図4より、ジニ係数についてもDeviation Areaと同様のことが言える。すなわち、ジニ係数の値が小さいことは最適ポートフォリオに近いことの必要条件ではあるが、十分条件ではない。
5. 図5より、最適に近いポートフォリオのDeviationの値は小さく、値が小さくなるほど最適ポートフォリオに近づく傾向は見られる。つまり、Deviationの値が小さいことは最適ポートフォリオに近いことの必要条件になっているようである。ただし、この図において縦軸方向、つまり、あるDeviationの値に対してとりうる λ_p の範囲は広い。ため、Deviationの値がある程度以上小さくならないと、Deviation値と最適性の明確な関係は見られない。
6. 図6より、 R_D ではDeviationと類似した傾向がより顕著に見られる。つまり、 R_D が小さいことは最適ポートフォリオに近いことの必要条件であり、縦軸方向、つまり、ある R_D 値に対してとりうる λ_p の範囲はDeviationに比べると狭まっている。
7. また、それぞれの図で(a)–(d)を比較すると、ファクターローディング ρ の値が変わってもグラフの概形や上述の傾向はそれほど変わらないが、 ρ の値が高いほど分布が狭くなる傾向は見られる。さらに、逆相関の資産があると((d)のケース)、分布はやや広がる傾向が見られる。

図3や図4では、ポートフォリオ λ が低く（最適状態から遠く）、かつDeviated Areaやジニ係数が非常に低い値を示すものも存在するが、これらは4資産中1つまたは2つの資産をほぼ含まないポートフォリオであり、含まれている資産だけで考える範囲においては最適に近い状態になっている。このように、明らかに最適でないポートフォリオでもDeviated Areaやジニ係数は小さい値になりうる。ので、これらの値の利用には問題があると考えられる。

一方、図5と図6にはそのような現象は見られないので、Deviationと R_D には最適性との間に必要十分条件が成り立ちうると考えられる。しかし実際には、分布の幅が広く、明確な対応関係が顕著になるのは両者の値がともに小さい、狭い領域に限られている。

次に、設定Bにおける結果であるが、それぞれの散布図の形状は多少変化するものの、上述の指摘事項は基本的には変わらない。そこで、設定Bで図1–6に対応する図（図7–11）は別ファイルにまとめ、本稿では掲載を省略する。

4.5. 10資産のケース

次に10資産のケースであるが、4資産に比べて散布図が広く拡散するため、その概形を描き出すためにシミュレーションの回数を増やし、10万シナリオで計算を行った。図13–18は設定Aにおける図1–6に対応する結果で、図19–24は設定Bにおける結果である。

結果であるが、どの変数の散布図も形状は変化した。が、4資産の場合で指摘した傾向はおよそ同様であった。しかしHHIに関しては、設定Aでは最適性との関係は明確でなかったが、設定Bではこれまでにない最適性との関係性が見られるようになった（図13および図19を参照）。設定Aに比べると、設定Bは信用リスクに対してより多くのプレミアムが盛

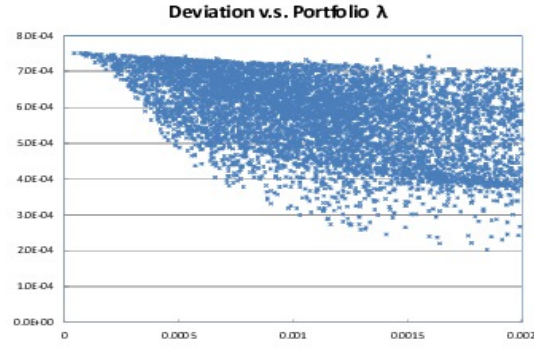


図 5: (a) Deviation (x-軸) v.s. portfolio- λ (y-軸), $\rho = 0$, 4 assets, Setting A

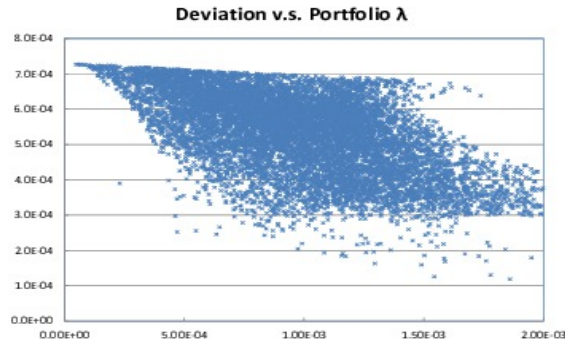


図 5: (b) Deviation (x-軸) v.s. portfolio- λ (y-軸), $\rho = 0.5$, 4 assets, Setting A

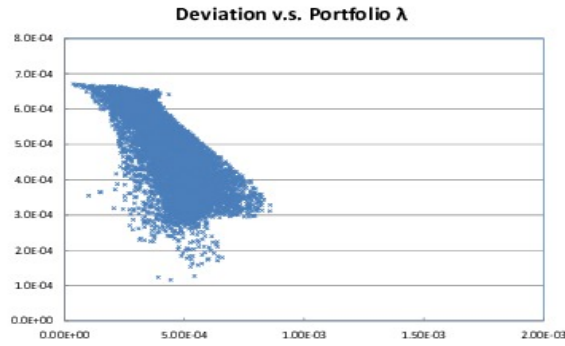


図 5: (c) Deviation (x-軸) v.s. portfolio- λ (y-軸), $\rho = 0.8$, 4 assets, Setting A

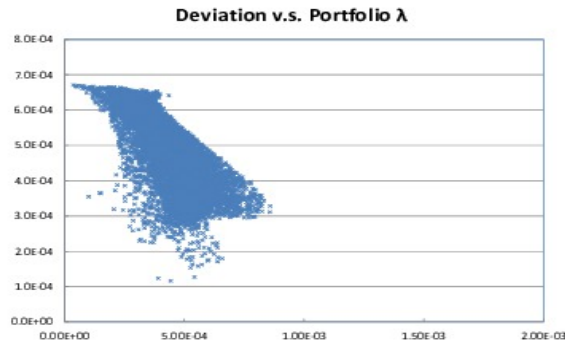


図 5: (d) Deviation (x-軸) v.s. portfolio- λ (y-軸), 4 assets, Setting A

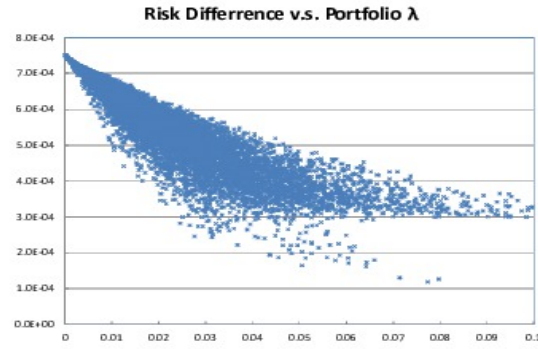


図 6: (a) Risk Difference R_D (x-軸) v.s. portfolio- λ (y-軸), $\rho = 0$, 4 assets, Setting A

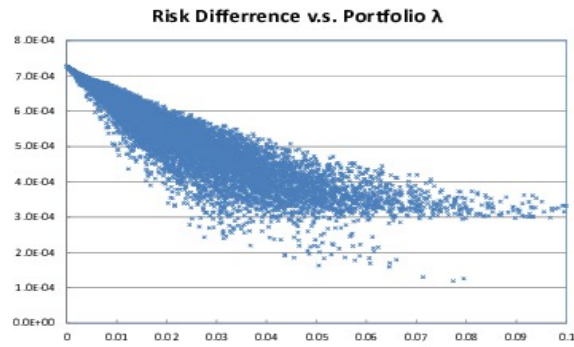


図 6: (b) Risk Difference R_D (x-軸) v.s. portfolio- λ (y 軸), $\rho = 0.5$, 4 assets, Setting A

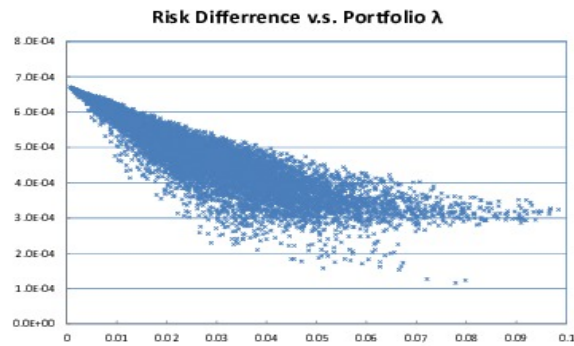


図 6: (c) Risk Difference R_D (x-軸) v.s. portfolio- λ (y 軸), $\rho = 0.8$, 4 assets, Setting A

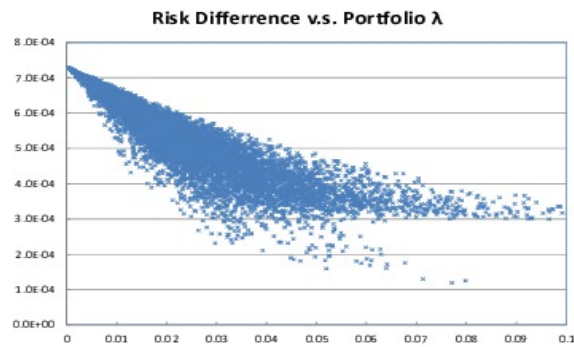


図 6: (d) Risk Difference R_D (x-軸) v.s. portfolio- λ (y-軸), 4 assets, Setting A

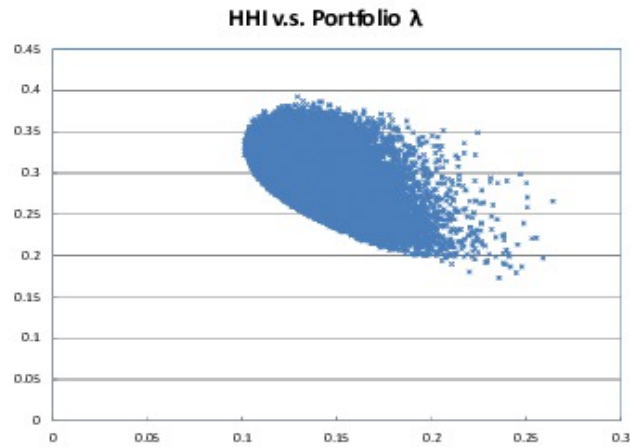


図 13: (a) HHI (x-軸) v.s. portfolio- λ (y 軸), $\rho = 0$, 10 assets, Setting A

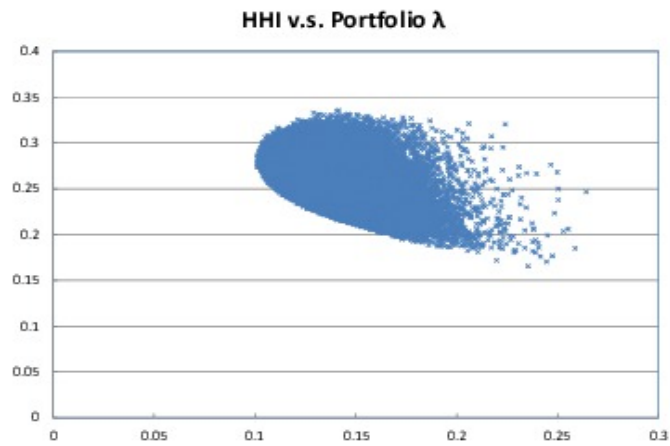


図 13: (b) HHI (x-軸) v.s. portfolio- λ (y 軸), $\rho = 0.5$, 10 assets, Setting A

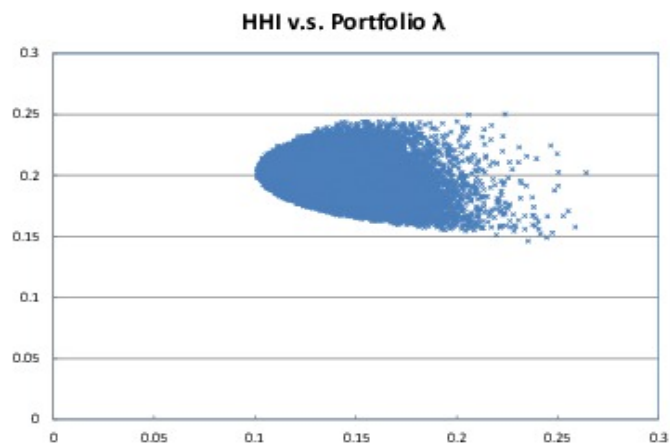


図 13: (c) HHI (x-軸) v.s. portfolio- λ (y 軸), $\rho = 0.8$, 10 assets, Setting A

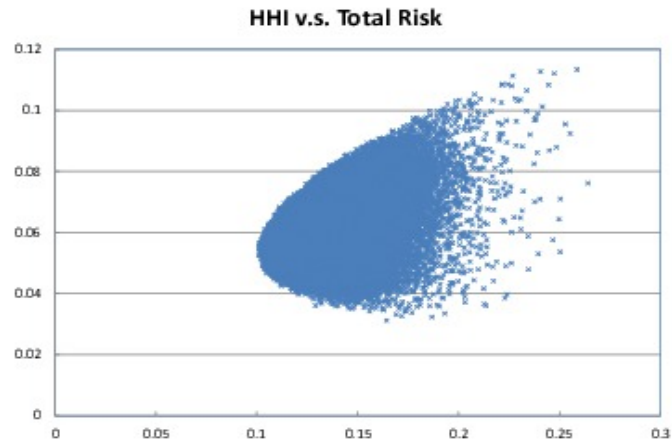


図 14: (a) HHI (x-軸) v.s. total risk σ_p (y 軸), $\rho = 0$, 10 assets, Setting A

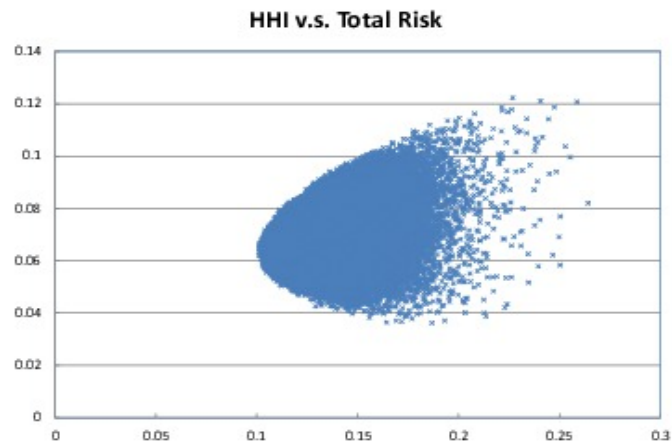


図 14: (b) HHI (x-軸) v.s. total risk σ_p (y 軸), $\rho = 0.5$, 10 assets, Setting A

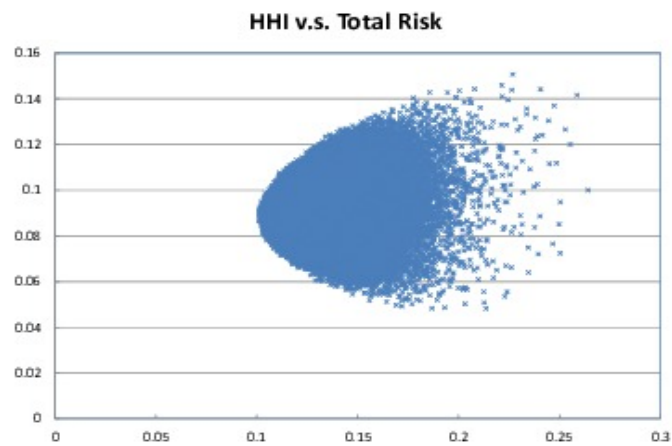


図 14: (c) HHI (x-軸) v.s. total risk σ_p (y 軸), $\rho = 0.8$, 10 assets, Setting A

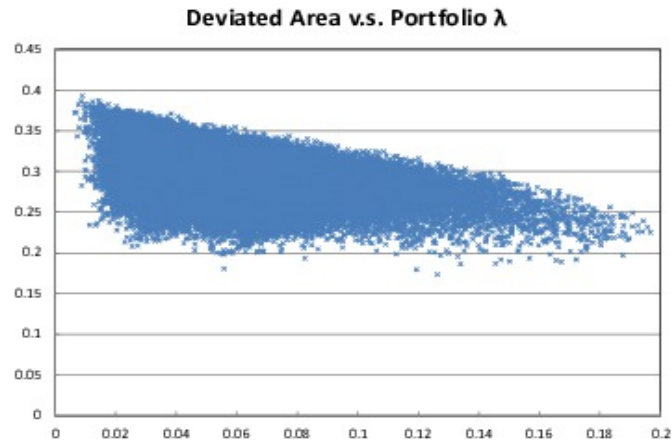


図 15: (a) Deviated Area (x-軸) v.s. portfolio- λ (y 軸), $\rho = 0$, 10 assets, Setting A

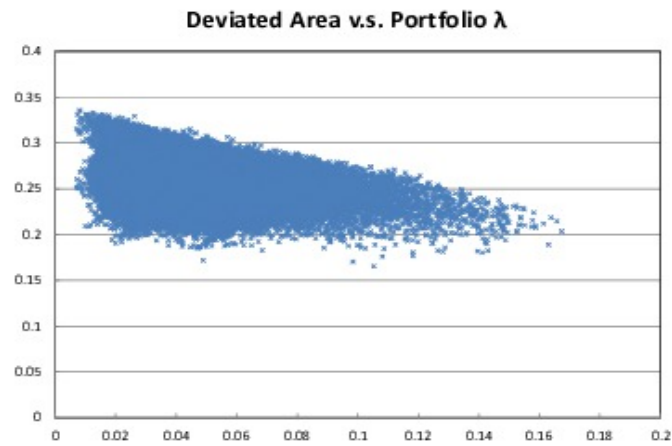


図 15: (b) Deviated Area (x-軸) v.s. portfolio- λ (y 軸), $\rho = 0.5$, 10 assets, Setting A

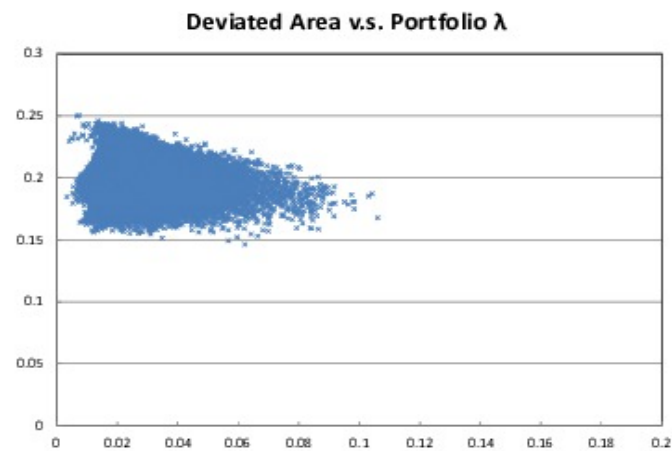


図 15: (c) Deviated Area (x-軸) v.s. portfolio- λ (y 軸), $\rho = 0.8$, 10 assets, Setting A

り込まれているので、このような場合には HHI が有効になることもあるようだが、要するに設定次第ということなので、一般性はない。

また、Deviation Area とジニ係数の散布は稠密になり、その結果、最適性の必要条件であること自体は変わらないが、対応関係は非常に不明確になった（図 15, 16, 21, 22 を参照）。Deviation も同様であったが、相関が高い場合には散布の広がり狭くなるため、最適性との関連は明確になる傾向が見られた（図 17 および図 23 を参照）。さらに R_D に関しては Deviation よりも明確に最適性との関連性が見られた（図 18 および図 24 を参照）。

5. おわりに

本稿では、金融機関の与信ポートフォリオに内在する集中リスクについて検討した。具体的には、リスク寄与度の概念を用いてポートフォリオの最適性について考察して最適ポートフォリオを特徴付ける条件を導出し、それをもとに最適性からの乖離を示す指標を提案し、簡単な数値例でその有効性を検討した。

本稿で導出したポートフォリオの最適性の条件は、標準偏差だけでなく VaR や ES などの任意のリスク尺度、正確にはリスク寄与度を適切に定義可能なリスク尺度に対して適用可能である。まず、リスク最小化ポートフォリオにおいては、各資産のリスク寄与率（＝リスク寄与度／ポートフォリオのリスク量）が現時点における当該資産の金額ベースの保有比率に等しくなければならない。一方、期待超過収益率（無リスク資産の収益率を超過する収益率の期待値）を収益性の指標としたときに最適ポートフォリオが満たすべき条件は、各資産のリスク寄与率が期待超過収益に関する寄与率と等しくなること、あるいは、各資産の期待超過収益率とリスク寄与度の比が、ポートフォリオ全体の期待収益とリスク量の比に等しくなることである。

これらの議論は任意のポートフォリオに対して適用可能であり、例えば、日本の金融機関が直面する (i) 貸出、(ii) 国債投資、(iii) 国内有価証券投資、(iv) 海外有価証券投資等にどのように資金配分をすることが望ましいかという問題に対しても一つの方向性を与えるものである。また、分析対象は金融機関が保有するポートフォリオ全体でも、国内株式や債券など一部のサブ・ポートフォリオでも構わないので、資産クラスごとに個別に議論を行うこともできる。ただし、個々のサブ・ポートフォリオにおける最適ポートフォリオの集合体は、全ポートフォリオにおける最適ポートフォリオと一般に一致しないことに注意されたい。

次に、前述した最適性条件をもとに最適ポートフォリオからの乖離の大きさを示すいくつかの指標を提案し、簡単な数値例によりその妥当性を検討した。数値例の結果からは、提案指標が必ずしも適切な指標にはならないことが示唆されたが、同時に、与信ポートフォリオにおいて集中度を示す指標として使われる HHI もまた適切な指標とは言えないことも示された。否定的な結論ではあるが、HHI が金融規制において重要な役割を担おうとしている現状を考慮すると、HHI の不適切さを事例で示した点は実務的に重要であると考えられる。

本稿では与信集中度を示す指標について検討してきたが、ここで提案したどの指標も、HHI と同様にどのように Capital-Add-on と関連付けるかという実務的な課題が残されている。もしも国内の与信市場全体のデータを入手できるならば、銀行各行を部分ポートフォリオとみなしてリスク寄与度の考え方を適用すれば、その値は各行が国内与信市場の全リスクに対して寄与する与信リスクを示すことになるので、Capital-Add-on に適用できるかもしれない。その場合は極めて大規模な計算になるが、リスク寄与度を標準偏差以外の指標に適用し、しかもリスクファクターが高次元になる場合、信頼できる数値計算を行うためにはモデ

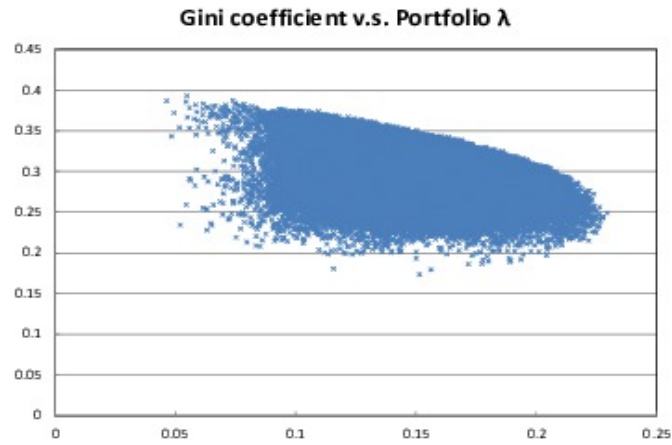


図 16: (a) Gini coefficient (x-軸) v.s. portfolio- λ (y 軸), $\rho = 0$, 10 assets, Setting A

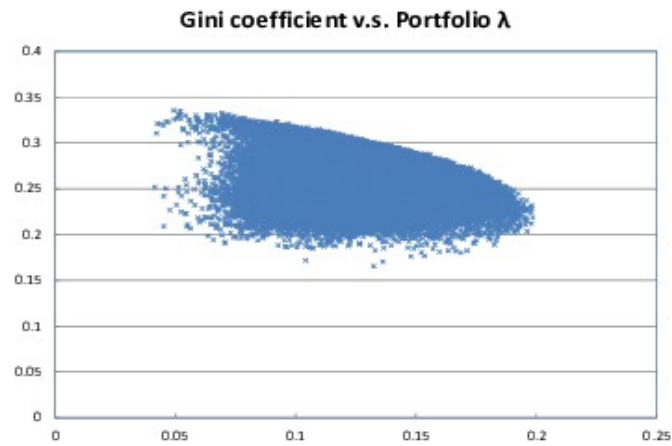


図 16: (b) Gini coefficient (x-軸) v.s. portfolio- λ (y 軸), $\rho = 0.5$, 10 assets, Setting A

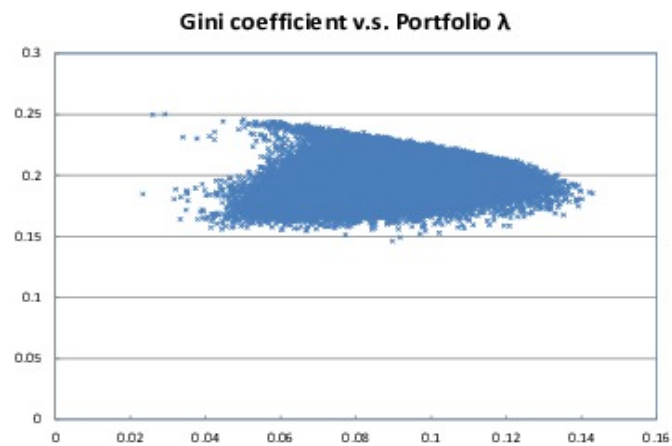


図 16: (c) Gini coefficient (x-軸) v.s. portfolio- λ (y 軸), $\rho = 0.8$, 10 assets, Setting A

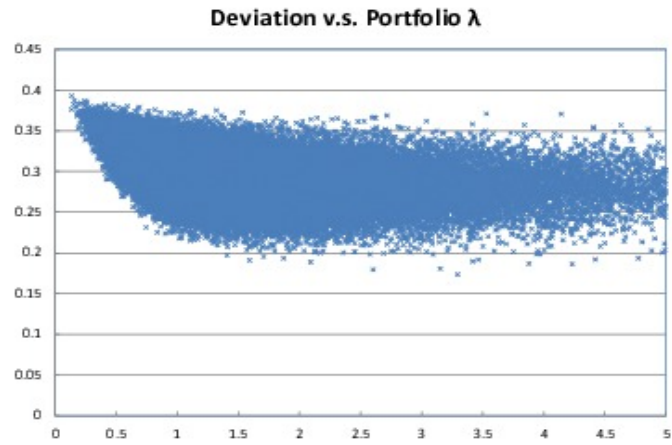


図 17: (a) Deviation (x-軸) v.s. portfolio- λ (y 軸), $\rho = 0$, 10 assets, Setting A

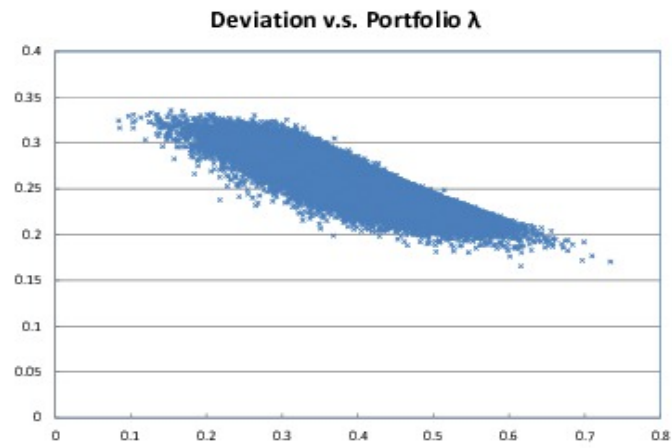


図 17: (b) Deviation (x-軸) v.s. portfolio- λ (y 軸), $\rho = 0.5$, 10 assets, Setting A

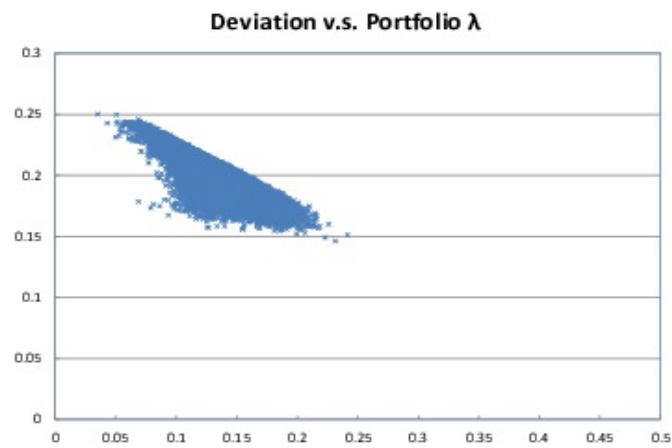


図 17: (c) Deviation (x-軸) v.s. portfolio- λ (y 軸), $\rho = 0.8$, 10 assets, Setting A

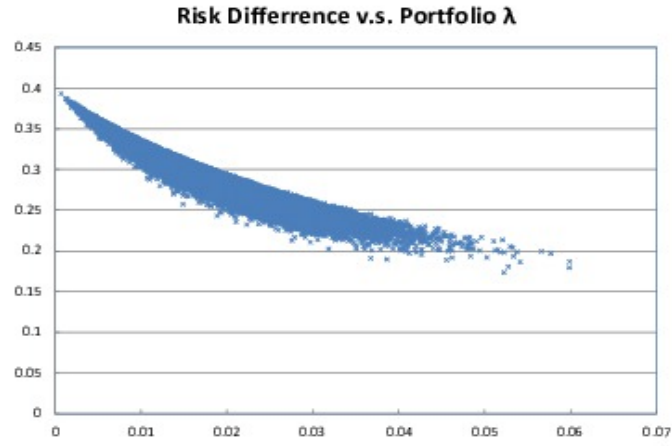


図 18: (a) Risk Difference R_D (x-軸) v.s. portfolio- λ (y 軸), $\rho = 0$, 10 assets, Setting A

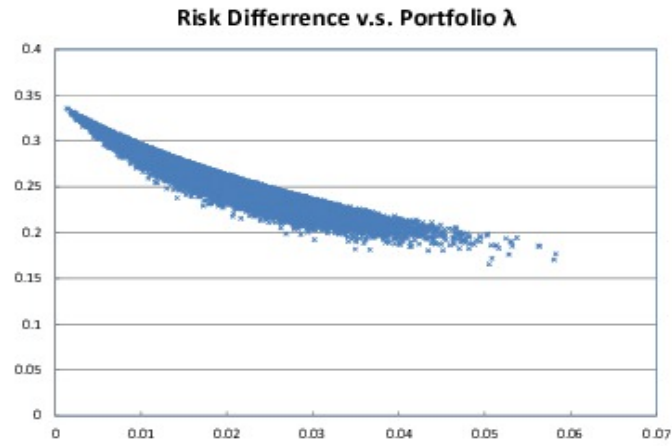


図 18: (b) Risk Difference R_D (x-軸) v.s. portfolio- λ (y 軸), $\rho = 0.5$, 10 assets, Setting A

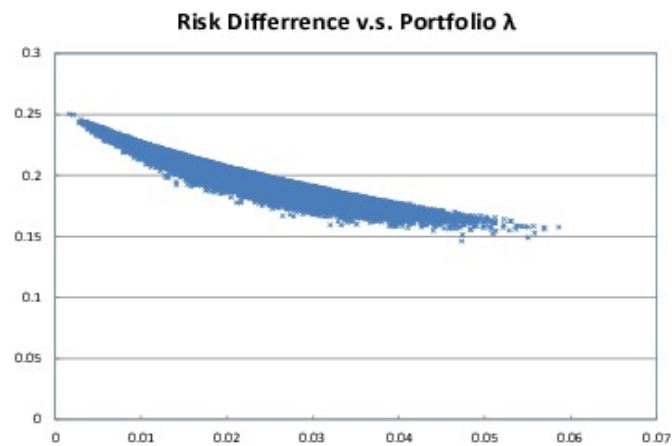


図 18: (c) Risk Difference R_D (x-軸) v.s. portfolio- λ (y 軸), $\rho = 0.8$, 10 assets, Setting A

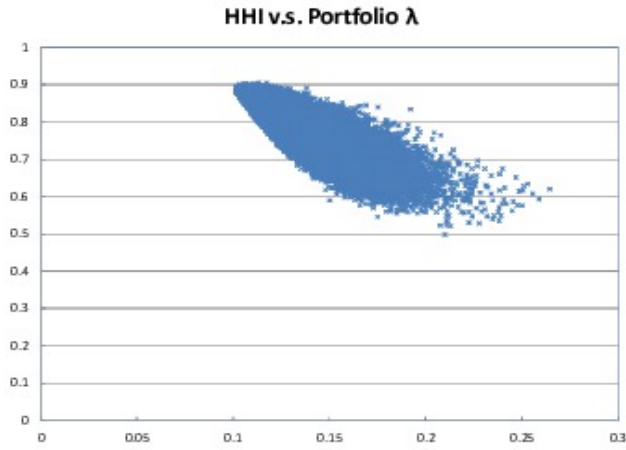


図 19: (a) HHI (x-軸) v.s. portfolio- λ (y 軸), $\rho = 0$, 10 assets, Setting B

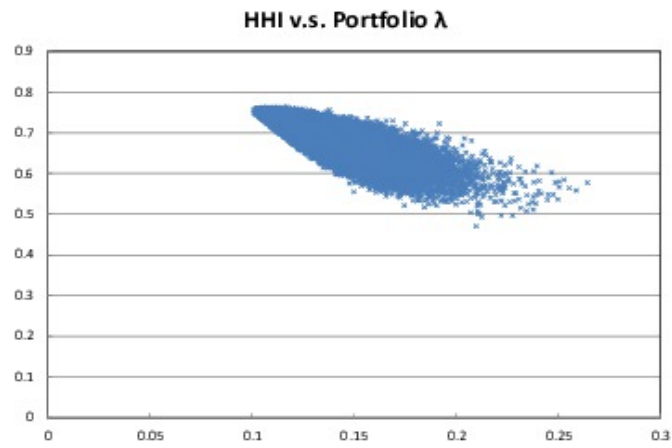


図 19: (b) HHI (x-軸) v.s. portfolio- λ (y 軸), $\rho = 0.5$, 10 assets, Setting B

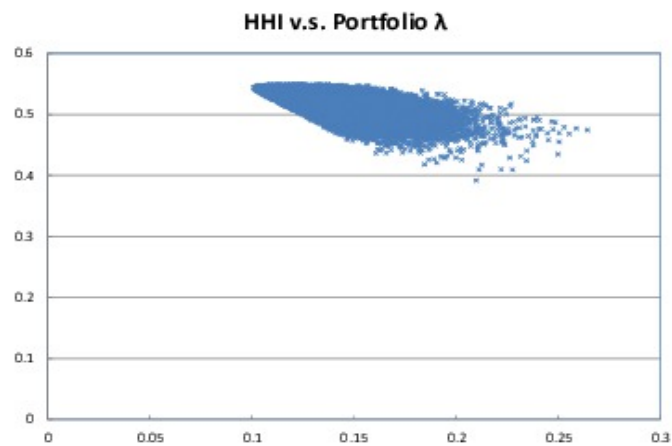


図 19: (c) HHI (x-軸) v.s. portfolio- λ (y-軸), $\rho = 0.8$, 10 assets, Setting B

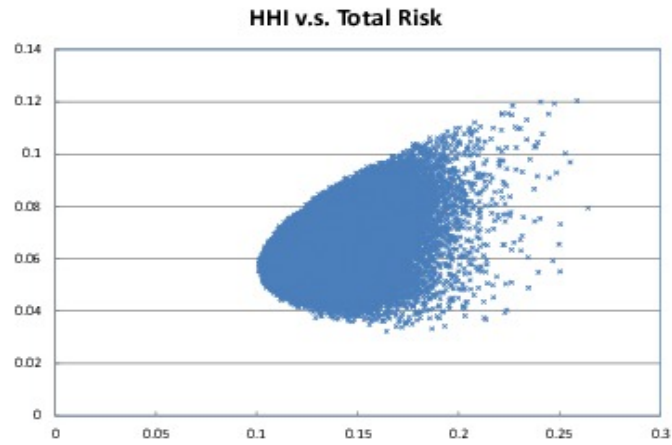


図 20: (a) HHI (x-軸) v.s. total risk σ_p (y-軸), $\rho = 0$, 10 assets, Setting B

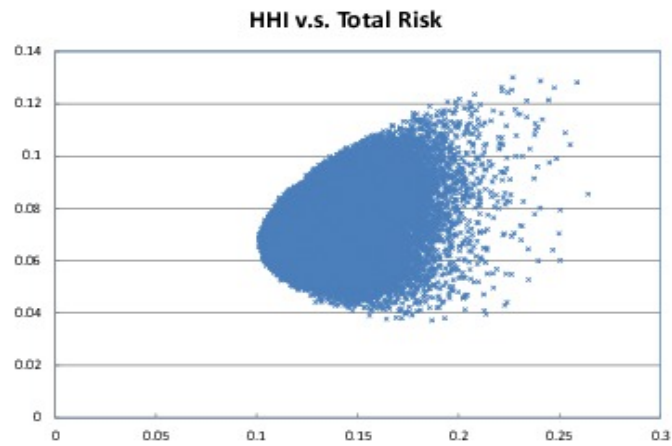


図 20: (b) HHI (x-軸) v.s. total risk σ_p (y-軸), $\rho = 0.5$, 10 assets, Setting B

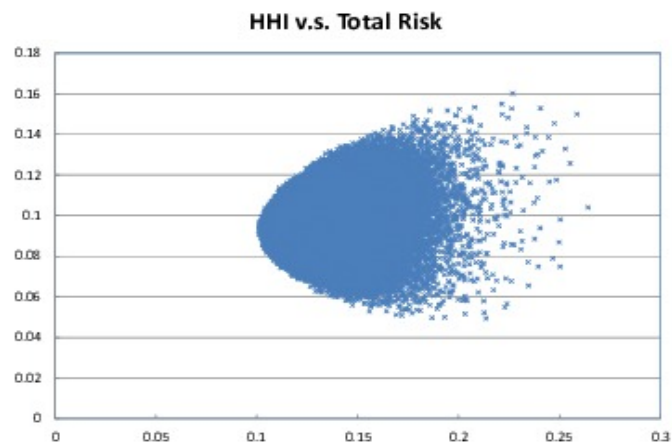


図 20: (c) HHI (x-軸) v.s. total risk σ_p (y-軸), $\rho = 0.8$, 10 assets, Setting B

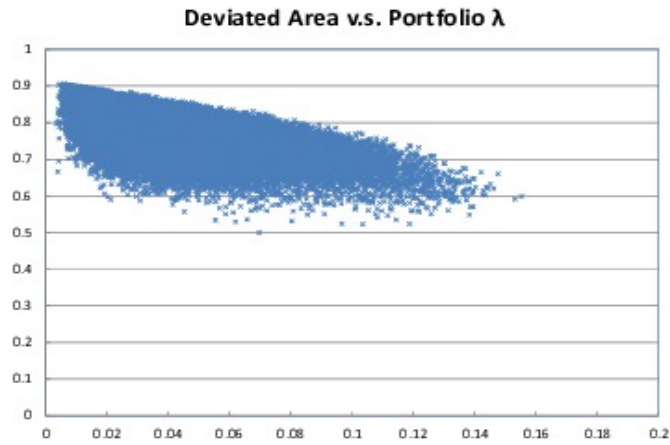


図 21: (a) Deviated Area (x-軸) v.s. portfolio- λ (y-軸), $\rho = 0$, 10 assets, Setting B

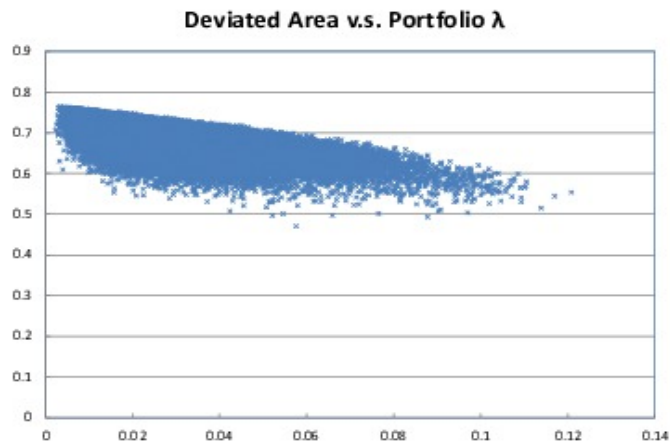


図 21: (b) Deviated Area (x-軸) v.s. portfolio- λ (y-軸), $\rho = 0.5$, 10 assets, Setting B

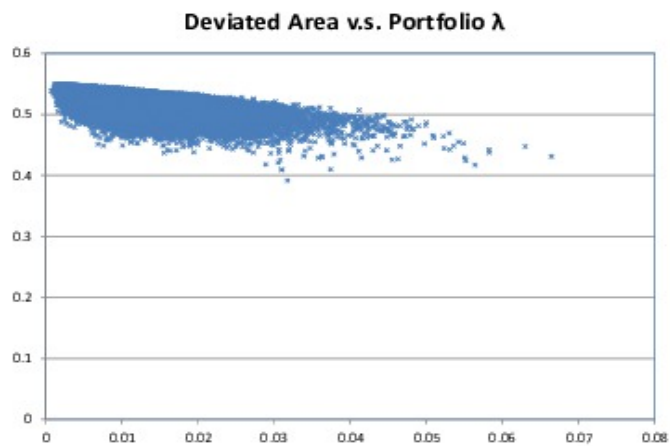


図 21: (c) Deviated Area (x-軸) v.s. portfolio- λ (y-軸), $\rho = 0.8$, 10 assets, Setting B

ルの簡素化が必要不可欠であり，例えば何らかの形の条件付独立モデルがその候補となりそうである．

付録

A. 標準偏差, VaR, TCE に対するリスク寄与度の導出

この付録では, 標準偏差, VaR, TCE に対するリスク寄与度を与える式を導出する.

$n, n \geq 2$ 個の資産を考える. ただし, どの資産も他の資産の組合せによって複製できないものとする. ポートフォリオにおける資産 $j, j = 1, \dots, n$ の保有量を定数 a_j , ポートフォリオ全体のポジションを示すベクトルを $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$ とし, リスクホライズン T における資産 $j, j = 1, \dots, n$ の単位量あたりの価格を P_j , $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n)^\top$ とすると, 時刻 T における当該ポートフォリオの価値は

$$\pi(T, \mathbf{a}) = \sum_{j=1}^n a_j P_j \quad (\text{A.1})$$

である.

A.1. 標準偏差の偏微分

リスクホライズン T におけるポートフォリオ価値 $\pi(T, \mathbf{a})$ が従う分布の標準偏差を $\sigma(T, \mathbf{a})$ とすると,

$$\frac{\partial \sigma^2(T, \mathbf{a})}{\partial a_j} = 2\sigma(T, \mathbf{a}) \frac{\partial \sigma(T, \mathbf{a})}{\partial a_j}$$

が成立する. 一方,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^2(T, \mathbf{a})}{\partial a_j} &= \frac{\partial}{\partial a_j} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j a_k \text{Cov}(P_j(T), P_k(T)) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n a_k \text{Cov}(P_j(T), P_k(T)) = 2\text{Cov}(\pi(T, \mathbf{a}), P_j(T)) \end{aligned}$$

なので, $\sigma(T, \mathbf{a}) > 0$ ならば,

$$\frac{\partial \sigma(T, \mathbf{a})}{\partial a_j} = \frac{\text{Cov}(\pi(T, \mathbf{a}), P_j(T))}{\sigma(T, \mathbf{a})}$$

が成り立つ. これより, $\sigma(T, \mathbf{a}) > 0$ のとき,

$$\rho_j(\mathbf{a}) = a_j \frac{\text{Cov}(\pi(T, \mathbf{a}), P_j(T))}{\sigma(T, \mathbf{a})}$$

が得られる.

A.2. パーセンタイルの偏微分

資産 j の保有量 a_j によるポートフォリオの VaR の偏微分を算出するには, パーセンタイルの a_j による偏微分が得られれば十分である. 以下では Tashe [15] を参考に, リスクホライズン T におけるポートフォリオの分布のパーセンタイルの偏微分を導出する. なお, 将来価値分布でも損失額分布でも本節の議論は同じなので, ただ単に分布と記す.

まず, 次の仮定をおく.

仮定 **A.1.** $\mathbf{P} \in \mathcal{R}^n$, $n \geq 2$ に対して, $(P_2, \dots, P_n)$ が与えられたときの P_1 の条件付密度関数を

$$\phi : \mathcal{R} \times \mathcal{R}^{n-1} \rightarrow [0, \infty), \quad (t, p_2, \dots, p_n) \mapsto \phi(t, p_2, \dots, p_n)$$

とすると, $\phi(\cdot)$ は以下の条件を満たす.

- 1) $(p_2, \dots, p_n)$ が与えられたとき, 関数 $t \mapsto \phi(t, p_2, \dots, p_n)$ は t に関して連続である.
- 2) 写像

$$(t, \mathbf{a}) \mapsto E \left[\phi \left(\frac{1}{a_1} \left(t - \sum_{j=2}^n a_j P_j \right), P_2, \dots, P_n \right) \right], \quad \mathcal{R} \times (\mathcal{R} \setminus \{0\}) \times \mathcal{R}^{n-1} \rightarrow [0, \infty)$$

は有界で連続である.

- 3) $\mathbf{a} \in (\mathcal{R} \setminus \{0\}) \times \mathcal{R}^{n-1}$ に対して,

$$0 < E \left[\phi \left(\frac{1}{a_1} \left(Q_\alpha(T, \mathbf{a}) - \sum_{j=2}^n a_j P_j \right), P_2, \dots, P_n \right) \right]$$

が成立する. ただし, $\alpha \in (0, 1)$ に対して, $\pi(T, \mathbf{a})$ の 100α -パーセンタイルは

$$Q_\alpha(T, \mathbf{a}) = \inf \{ z \mid P\{\pi(T, \mathbf{a}) \leq z\} \geq \alpha, z \in \mathcal{R} \}, \quad \mathbf{a} \in \mathcal{R}^n$$

で定義される.

- 4) $j = 2, \dots, n$ に対して, 写像

$$(t, \mathbf{a}) \mapsto E \left[P_j \phi \left(\frac{1}{a_1} \left(t - \sum_{j=2}^n a_j P_j \right), P_2, \dots, P_n \right) \right], \quad \mathcal{R} \times (\mathcal{R} \setminus \{0\}) \times \mathcal{R}^{n-1} \rightarrow \mathcal{R}$$

は有界で連続である.

以下では, $a_1 > 0$ のときの $Q_\alpha(T, \mathbf{a})$ の偏微分を導出する. $a_1 < 0$ のときは $(P'_1, P'_2, \dots, P'_n) = (-P_1, P_2, \dots, P_n)$ に対して同様の議論を展開すればよい.

関数 F と G を

$$\begin{aligned} F(y, \mathbf{a}) &= P\{\pi(T, \mathbf{a}) \leq y\} \\ G(y, \mathbf{a}, p_2, \dots, p_n) &= \int_{-\infty}^{\frac{1}{a_1}(y - \sum_{j=2}^n a_j p_j)} \phi(t, p_2, \dots, p_n) dt \\ &= P\{\pi(T, \mathbf{a}) \leq y \mid P_2 = p_2, \dots, P_n = p_n\} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

で定義する. 全確率の公式より,

$$F(y, \mathbf{a}) = E[G(y, \mathbf{a}, P_2, \dots, P_n)] \quad (\text{A.3})$$

が得られる.

まず, $F(y, \mathbf{a})$ が偏微分可能で,

$$\frac{\partial F(y, \mathbf{a})}{\partial a_j} = E \left[\frac{\partial G(y, \mathbf{a}, P_2, \dots, P_n)}{\partial a_j} \right], \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial F(y, \mathbf{a})}{\partial y} = E \left[\frac{\partial G(y, \mathbf{a}, P_2, \dots, P_n)}{\partial y} \right] \quad (\text{A.5})$$

が成り立つことを示す. そのためには, $F(y, \mathbf{a})$ の定義域 $\mathcal{D}$ において以下の (a)–(d) が成り立てば十分である.

- (a) $G(y, \mathbf{a}, p_2, \dots, p_n)$ が連続である.
- (b) $\frac{\partial G(y, \mathbf{a}, p_2, \dots, p_n)}{\partial a_j}, j = 1, 2, \dots, n$ と $\frac{\partial G(y, \mathbf{a}, p_2, \dots, p_n)}{\partial y}$ が連続である.
- (c) $E[G(y, \mathbf{a}, p_2, \dots, p_n)]$ が存在する.
- (d) $E \left[\frac{\partial G}{\partial a_j}(y, \mathbf{a}, P_2, \dots, P_n) \right], j = 1, 2, \dots, n$ と $E \left[\frac{\partial G}{\partial y}(y, \mathbf{a}, P_2, \dots, P_n) \right]$ が有界で連続である.

(a)–(d) を証明する. まず,

(a) (A.2) と仮定 A.1 の 1) から, $G(y, \mathbf{a}, p_2, \dots, p_n)$ は $(y, \mathbf{a})$ 上で連続である.

(b) (A.2) より,

$$\frac{\partial G}{\partial y}(y, \mathbf{a}, p_2, \dots, p_n) = \frac{1}{a_1} \phi \left(\frac{1}{a_1} \left(y - \sum_{j=2}^n a_j p_j \right), p_2, \dots, p_n \right) \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial G}{\partial a_1}(y, \mathbf{a}, p_2, \dots, p_n) = -\frac{1}{a_1^2} \left(y - \sum_{j=2}^n a_j p_j \right) \phi \left(\frac{1}{a_1} \left(y - \sum_{j=2}^n a_j p_j \right), p_2, \dots, p_n \right) \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial G}{\partial a_j}(y, \mathbf{a}, p_2, \dots, p_n) = -\frac{p_j}{a_1} \phi \left(\frac{1}{a_1} \left(y - \sum_{j=2}^n a_j p_j \right), p_2, \dots, p_n \right), \quad j = 2, \dots, n \quad (\text{A.8})$$

なので, 仮定 A.1 の 1) よりこれらは $(y, \mathbf{a})$ 上で連続である.

(c) $E[G(y, \mathbf{a}, P_2, \dots, P_n)] = F(y, \mathbf{a})$ は $\pi(T, \mathbf{a})$ の分布関数なので, 明らかに存在する.

(d) (A.6)–(A.8) と仮定 A.1 の 2) と 4) より,

$$E \left[\frac{\partial G}{\partial a_j}(y, \mathbf{a}, P_2, \dots, P_n) \right], \quad j = 1, \dots, n; \quad E \left[\frac{\partial G}{\partial y}(y, \mathbf{a}, P_2, \dots, P_n) \right]$$

は $(y, \mathbf{a})$ 上で有界で連続である.

以上より, 仮定 A.1 が成り立つとき, (A.4) と (A.5) が成り立つ.

仮定 A.1 の 2) より (A.5) は有界なので $\pi(T, \mathbf{a})$ は連続分布であり,

$$F(Q_\alpha(T, \mathbf{a}), \mathbf{a}) = \alpha, \quad \mathbf{a} \in (0, \infty) \times \mathcal{R}^{n-1} \quad (\text{A.9})$$

が成り立つ。仮定 A.1 の 3) より $\frac{\partial F}{\partial y}(Q_\alpha(T, \mathbf{a}), \mathbf{a}) \neq 0$ なので, (A.9) に陰関数定理を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial a_j}(T, \mathbf{a}) &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial a_j}(Q_\alpha(T, \mathbf{a}), \mathbf{a})}{\frac{\partial F}{\partial y}(Q_\alpha(T, \mathbf{a}), \mathbf{a})} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{a_1} \left(Q_\alpha(T, \mathbf{a}) - \frac{E\left[\left(\sum_{j=2}^n a_j P_j\right) \phi\left(\frac{1}{a_1}(Q_\alpha(T, \mathbf{a}) - \sum_{j=2}^n a_j P_j), P_2, \dots, P_n\right)\right]}{E\left[\phi\left(\frac{1}{a_1}(Q_\alpha(T, \mathbf{a}) - \sum_{j=2}^n a_j P_j), P_2, \dots, P_n\right)\right]} \right), & j = 1 \\ \frac{E\left[P_j \phi\left(\frac{1}{a_1}(Q_\alpha(T, \mathbf{a}) - \sum_{j=2}^n a_j P_j), P_2, \dots, P_n\right)\right]}{E\left[\phi\left(\frac{1}{a_1}(Q_\alpha(T, \mathbf{a}) - \sum_{j=2}^n a_j P_j), P_2, \dots, P_n\right)\right]}, & j = 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

が得られる。

ここで, $\mathbf{a} \in (\mathcal{R} \setminus \{0\}) \times \mathcal{R}^{n-1}$, $z \in \mathcal{R}$ に対して

$$g(z; \mathbf{a}) = E \left[\phi \left(\frac{1}{a_1} \left(z - \sum_{j=2}^n a_j P_j \right), P_2, \dots, P_n \right) \right]$$

を定義すると, (A.5) と (A.6) より, $g(z; \mathbf{a})/a_1$ は $\pi(T, \mathbf{a})$ の密度関数である。そこで, $j = 2, \dots, n$ に対して

$$h^{(j)}(z; \mathbf{a}) = \begin{cases} 0, & \text{if } g(z; \mathbf{a}) = 0 \\ \frac{1}{g(z; \mathbf{a})} E \left[P_j \phi \left(\frac{1}{a_1} \left(z - \sum_{j=2}^n a_j P_j \right), P_2, \dots, P_n \right) \right], & \text{if } g(z; \mathbf{a}) \neq 0 \end{cases}$$

を定義してその意味を考えると, $h^{(j)}(z; \mathbf{a}) = E [P_j | \pi(T, \mathbf{a}) = z]$ なので,

$$\frac{\partial Q_\alpha}{\partial a_j}(T, \mathbf{a}) = E [P_j | \pi(T, \mathbf{a}) = Q_\alpha(T, \mathbf{a})], \quad j = 2, \dots, n$$

である。また, (A.1) より

$$E [P_1 | \pi(T, \mathbf{a}) = z] = \frac{1}{a_1} \left(z - \sum_{j=2}^n a_j h^{(j)}(z; \mathbf{a}) \right) \quad (\text{A.11})$$

なので, (A.11) で $z = Q_\alpha(T, \mathbf{a})$ とおいたものは (A.10) の $j = 1$ に相当する。

以上より,

$$\frac{\partial Q_\alpha}{\partial a_j}(T, \mathbf{a}) = E [P_j | \pi(T, \mathbf{a}) = Q_\alpha(T, \mathbf{a})], \quad j = 1, \dots, n$$

が得られる。

A.3. TCE の偏微分

資産 j の保有量 a_j によるポートフォリオの TCE の偏微分を算出するには, 以下で定義される関数 $K_{\alpha, m}$ の a_j による偏微分が得られれば十分である。ここでも仮定 A.1 を設定し, さらに仮定 A.2 を追加する。

仮定 A.2. P_j の m 次のモーメントが存在する．すなわち，

$$E[|P_j|^m] < \infty, \quad m \geq 1, \quad j = 1, \dots, n$$

が成り立つ．

100α -パーセンタイル $Q_\alpha(T, \mathbf{a})$ に対して，関数

$$K_{\alpha,m}(T, \mathbf{a}) = E[\pi(T, \mathbf{a})^m | \pi(T, \mathbf{a}) \geq Q_\alpha(T, \mathbf{a})], \quad m \in \mathcal{N}$$

($\mathcal{N}$ は自然数の集合) を定義すると¹⁵，

$$K_{\alpha,m}(T, \mathbf{a}) = \frac{E[\pi(T, \mathbf{a})^m 1_{\{\pi(T, \mathbf{a}) \geq Q_\alpha(T, \mathbf{a})\}}]}{E[1_{\{\pi(T, \mathbf{a}) \geq Q_\alpha(T, \mathbf{a})\}}]} = \frac{E[\pi(T, \mathbf{a})^m 1_{\{\pi(T, \mathbf{a}) \geq Q_\alpha(T, \mathbf{a})\}}]}{1 - \alpha}$$

と書ける．

$$H(y, \mathbf{a}) = P\{\pi(T, \mathbf{a}) > y\} = 1 - P\{\pi(T, \mathbf{a}) \leq y\} = 1 - F(y, \mathbf{a})$$

とおくと，A.2 節より $F(y, \mathbf{a})$ はすべての引数で偏微分可能であり，しかもその偏微分は $F(y, \mathbf{a})$ の定義域 $\mathcal{D}$ で連続なので $F(y, \mathbf{a})$ は微分可能，したがって $H(y, \mathbf{a})$ も微分可能である．よって，

$$\begin{aligned} E[\pi(T, \mathbf{a})^m 1_{\{\pi(T, \mathbf{a}) \geq Q_\alpha(T, \mathbf{a})\}}] &= \int_{Q_\alpha(T, \mathbf{a})}^{\infty} t^m dF(t, \mathbf{a}) = - \int_{Q_\alpha(T, \mathbf{a})}^{\infty} t^m dH(t, \mathbf{a}) \\ &= m \int_{Q_\alpha(T, \mathbf{a})}^{\infty} t^{m-1} H(t, \mathbf{a}) dt \\ &\quad + Q_\alpha(T, \mathbf{a})^m H(Q_\alpha(T, \mathbf{a}), \mathbf{a}) - \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

が得られる．ただし $A(t) = t^m H(t, \mathbf{a})$ である．関数 $K_{\alpha,m}(T, \mathbf{a})$ の a_j に関する偏微分を以下のように分割し，各項について考える．

$$\left. \frac{\partial K_{\alpha,m}(T, \mathbf{a})}{\partial a_j} \right|_{\alpha, m, a_k} = \frac{mB + C - D}{1 - \alpha} \quad (\text{A.13})$$

ただし，

$$B = \left[\frac{\partial}{\partial a_j} \int_{Q_\alpha(T, \mathbf{a})}^{\infty} t^{m-1} H(t, \mathbf{a}) dt \right]_{\alpha, m, a_k} \quad (\text{A.14})$$

$$C = \left[\frac{\partial}{\partial a_j} Q_\alpha(T, \mathbf{a})^m H(Q_\alpha(T, \mathbf{a}), \mathbf{a}) \right]_{\alpha, m, a_k} \quad (\text{A.15})$$

$$D = \left. \frac{\partial}{\partial a_j} \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) \right|_{\alpha, m, a_k}$$

であり， $|_{\alpha, m, a_k (k \neq j): \text{const}}$ を $|_{\alpha, m, a_k}$ と略記した．

¹⁵ここでは損失額分布を扱うことを前提にして定義した．将来価値分布を扱うときは条件の部分の符号を逆にすれば同様に議論できる．

C について考える．A.2 節より $Q_\alpha(T, \mathbf{a})$ は a_j で偏微分可能なので，(A.15) は

$$C = m(1 - \alpha)Q_\alpha(T, \mathbf{a})^{m-1} \frac{\partial Q_\alpha(T, \mathbf{a})}{\partial a_j} \Big|_{\alpha, m, a_k} \quad (\text{A.16})$$

と表現できる．

D に関しては，まず，

$$0 \leq A(t) = t^m H(t, \mathbf{a}) \leq \int_t^\infty |s|^m dF(s, \mathbf{a}) \quad (\text{A.17})$$

が成り立つ．ここで

$$A'(t) = \int_t^\infty |s|^m dF(s, \mathbf{a})$$

とおくと，仮定 A.2 より $E[|\pi(T, \mathbf{a})|^m]$ は存在するので，

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A'(t) = 0$$

したがって，(A.17) より $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = 0$ となるので，

$$D = 0 \quad (\text{A.18})$$

が得られる．

最後に B について考える．まず，次を仮定する．

仮定 A.3. (A.14) 右辺において，偏微分と積分の順序交換が可能である．

仮定 A.3 より，

$$B = \left[\int_{Q_\alpha(T, \mathbf{a})}^\infty t^{m-1} \frac{\partial H(t, \mathbf{a})}{\partial a_j} dt \right]_{\alpha, m, a_k} - (1 - \alpha)Q_\alpha(T, \mathbf{a})^{m-1} \frac{\partial Q_\alpha(T, \mathbf{a})}{\partial a_j} \Big|_{\alpha, m, a_k} \quad (\text{A.19})$$

が得られる．(A.2) と (A.3) より，

$$F(y, \mathbf{a}) = E \left[\int_{-\infty}^{\frac{1}{a_1}(y - \sum_{j=2}^n a_j P_j)} \phi(t, P_2, \dots, P_n) dt \right]$$

であるので，A.2 節の結果を使うと， $j = 2, \dots, n$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(y, \mathbf{a})}{\partial a_j} &= -\frac{\partial F(y, \mathbf{a})}{\partial a_j} = -\frac{\partial}{\partial a_j} E \left[\int_{-\infty}^{\frac{1}{a_1}(y - \sum_{j=2}^n a_j P_j)} \phi(t, P_2, \dots, P_n) dt \right] \\ &= -E \left[\frac{\partial}{\partial a_j} \int_{-\infty}^{\frac{1}{a_1}(y - \sum_{j=2}^n a_j P_j)} \phi(t, P_2, \dots, P_n) dt \right] \\ &= \frac{1}{a_1} E \left[P_j \phi \left(\frac{1}{a_1} \left(y - \sum_{j=2}^n a_j P_j \right), P_2, \dots, P_n \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

が得られる．(A.20) を (A.19) に代入すると，

$$B = E \left[\int_{Q_\alpha(T, \mathbf{a})}^{\infty} t^{m-1} \frac{1}{a_1} P_j \phi \left(\frac{1}{a_1} \left(t - \sum_{j=2}^n a_j P_j \right), P_2, \dots, P_n \right) dt \right] \\ - (1 - \alpha) Q_\alpha(T, \mathbf{a})^{m-1} \frac{\partial Q_\alpha(T, \mathbf{a})}{\partial a_j} \Big|_{\alpha, m, a_k}$$

となり，さらに $v = \frac{1}{a_1} \left(t - \sum_{j=2}^n a_j P_j \right)$ で変数変換すると， $j = 2, \dots, n$ に対して

$$B = E \left[\int_{\frac{1}{a_1} (Q_\alpha(T, \mathbf{a}) - \sum_{j=2}^n a_j P_j)}^{\infty} \left(a_1 v + \sum_{j=2}^n a_j P_j \right)^{m-1} P_j \phi(v, P_2, \dots, P_n) dv \right] \\ - (1 - \alpha) Q_\alpha(T, \mathbf{a})^{m-1} \frac{\partial Q_\alpha(T, \mathbf{a})}{\partial a_j} \Big|_{\alpha, m, a_k} \\ = E \left[P_j \pi(T, \mathbf{a})^{m-1} 1_{\{\pi(T, \mathbf{a}) \geq Q_\alpha(T, \mathbf{a})\}} \right] - (1 - \alpha) Q_\alpha(T, \mathbf{a})^{m-1} \frac{\partial Q_\alpha(T, \mathbf{a})}{\partial a_j} \Big|_{\alpha, m, a_k} \quad (\text{A.21})$$

が得られる． $j = 1$ に対しても，A.2 節の結果を使うと，

$$\frac{\partial H(y, \mathbf{a})}{\partial a_1} = - \frac{\partial F(y, \mathbf{a})}{\partial a_1} = - \frac{\partial}{\partial a_1} E \left[\int_{-\infty}^{\frac{1}{a_1} (y - \sum_{j=2}^n a_j P_j)} \phi(t, P_2, \dots, P_n) dt \right] \\ = - E \left[\frac{\partial}{\partial a_1} \int_{-\infty}^{\frac{1}{a_1} (y - \sum_{j=2}^n a_j P_j)} \phi(t, P_2, \dots, P_n) dt \right] \\ = \frac{1}{a_1^2} E \left[\left(y - \sum_{j=2}^n a_j P_j \right) \phi \left(\frac{1}{a_1} \left(y - \sum_{j=2}^n a_j P_j \right), P_2, \dots, P_n \right) \right] \quad (\text{A.22})$$

となるので，(A.22) を (A.19) に代入すると，

$$B = E \left[\int_{Q_\alpha(T, \mathbf{a})}^{\infty} t^{m-1} \frac{1}{a_1^2} \left(t - \sum_{j=2}^n a_j P_j \right) \phi \left(\frac{1}{a_1} \left(t - \sum_{j=2}^n a_j P_j \right), P_2, \dots, P_n \right) dt \right] \\ - (1 - \alpha) Q_\alpha(T, \mathbf{a})^{m-1} \frac{\partial Q_\alpha(T, \mathbf{a})}{\partial a_j} \Big|_{\alpha, m, a_k}$$

と書ける．ここでも $v = \frac{1}{a_1} \left(t - \sum_{j=2}^n a_j P_j \right)$ で変数変換すると，

$$B = E \left[\int_{\frac{1}{a_1} (Q_\alpha(T, \mathbf{a}) - \sum_{j=2}^n a_j P_j)}^{\infty} \left(a_1 v + \sum_{j=2}^n a_j P_j \right)^{m-1} v \phi(v, P_2, \dots, P_n) dv \right] \\ - (1 - \alpha) Q_\alpha(T, \mathbf{a})^{m-1} \frac{\partial Q_\alpha(T, \mathbf{a})}{\partial a_j} \Big|_{\alpha, m, a_k} \\ = E \left[P_1 \pi(T, \mathbf{a})^{m-1} 1_{\{\pi(T, \mathbf{a}) \geq Q_\alpha(T, \mathbf{a})\}} \right] - (1 - \alpha) Q_\alpha(T, \mathbf{a})^{m-1} \frac{\partial Q_\alpha(T, \mathbf{a})}{\partial a_j} \Big|_{\alpha, m, a_k} \quad (\text{A.23})$$

が得られる. (A.21) と (A.23) をまとめると, $j = 1, \dots, n$ に対して

$$B = E \left[P_j \pi(T, \mathbf{a})^{m-1} 1_{\{\pi(T, \mathbf{a}) \geq Q_\alpha(T, \mathbf{a})\}} \right] - (1 - \alpha) Q_\alpha(T, \mathbf{a})^{m-1} \frac{\partial Q_\alpha(T, \mathbf{a})}{\partial a_j} \Big|_{\alpha, m, a_k} \quad (\text{A.24})$$

が得られる.

(A.16), (A.18), (A.24) を (A.13) に代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{\alpha, m}(T, \mathbf{a})}{\partial a_j} \Big|_{\alpha, m, a_k} &= \frac{m E \left[P_j \pi(T, \mathbf{a})^{m-1} 1_{\{\pi(T, \mathbf{a}) \geq Q_\alpha(T, \mathbf{a})\}} \right]}{1 - \alpha} \\ &= \frac{m E \left[P_j \pi(T, \mathbf{a})^{m-1} 1_{\{\pi(T, \mathbf{a}) \geq Q_\alpha(T, \mathbf{a})\}} \right]}{E \left[1_{\{\pi(T, \mathbf{a}) \geq Q_\alpha(T, \mathbf{a})\}} \right]} \\ &= m E \left[P_j \pi(T, \mathbf{a})^{m-1} | \pi(T, \mathbf{a}) \geq Q_\alpha(T, \mathbf{a}) \right], \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

が得られる.

ところで, 仮定 A.3 が成り立つための十分条件は, $F(y, \mathbf{a})$ の定義域 $\mathcal{D}$ において

(e) $t^{m-1} H(t, \mathbf{a})$ が連続である.

(f) $t^{m-1} \frac{\partial H(t, \mathbf{a})}{\partial a_j} \Big|_{\alpha, m, a_k}, j = 1, \dots, n$ が連続である.

(g) $\int_{Q_\alpha(T, \mathbf{a})}^\infty t^{m-1} H(t, \mathbf{a}) dt$ が収束する.

(h) $\int_{Q_\alpha(T, \mathbf{a})}^\infty t^{m-1} \frac{\partial H(t, \mathbf{a})}{\partial a_j} \Big|_{\alpha, m, a_k} dt, j = 1, \dots, n$ が一様収束する.

が成立することである. 仮定 A.1 と仮定 A.2 のもとで (e)~(h) が成り立つことを示す.

(e) A.2 節より $F(t, \mathbf{a})$ は $\mathcal{D}$ で連続なので, $t^{m-1} H(t, \mathbf{a})$ も連続である.

(f) (A.20) と仮定 A.1 の 4) より, $\frac{\partial H(t, \mathbf{a})}{\partial a_j}, j = 2, \dots, n$ は $\mathcal{D}$ で有界で連続である. また, (A.22) と仮定 A.1 の 2) と 4) より, $\frac{\partial H(t, \mathbf{a})}{\partial a_1}$ も $\mathcal{D}$ で有界で連続である. したがって, $t^{m-1} \frac{\partial H(t, \mathbf{a})}{\partial a_j}, j = 1, \dots, n$ は $\mathcal{D}$ で連続である.

(g) 仮定 A.2 より $E[\pi(T, \mathbf{a})^m]$ が存在するので, $E[\pi(T, \mathbf{a})^m 1_{\{\pi(T, \mathbf{a}) \geq Q_\alpha(T, \mathbf{a})\}}]$ も存在する. したがって, (A.12) より $\int_{Q_\alpha(T, \mathbf{a})}^\infty t^{m-1} H(t, \mathbf{a}) dt$ も存在する.

(h) (A.19) と (A.21) より, $j = 2, \dots, n$ に対して

$$\begin{aligned} J_j(\mathbf{a}) &= \int_{Q_\alpha(T, \mathbf{a})}^\infty t^{m-1} \frac{\partial H(t, \mathbf{a})}{\partial a_j} \Big|_{\alpha, m, a_k} dt \\ &= E \left[P_j \pi(T, \mathbf{a})^{m-1} 1_{\{\pi(T, \mathbf{a}) \geq Q_\alpha(T, \mathbf{a})\}} \right] \\ &= E \left[\int_{\frac{1}{a_1}(Q_\alpha(T, \mathbf{a}) - \sum_{j=2}^n a_j P_j)}^\infty \left(a_1 v + \sum_{j=2}^n a_j P_j \right)^{m-1} P_j \phi(v, P_2, \dots, P_n) dv \right] \end{aligned}$$

が得られる．ここで， $\bar{a}_j \geq |a_j|$ ， $Y(\mathbf{a}) = |\sum_{k \neq j} a_k P_k| + \bar{a}_j |P_j| \geq \pi(T, \mathbf{a})$ とすると，

$$\begin{aligned} J_j(\mathbf{a}) &\leq E \left[\int_{\frac{1}{a_1}(Q_\alpha(T, \mathbf{a}) - \sum_{j=2}^n a_j P_j)}^{\infty} \left(\left| a_1 v + \sum_{k \neq j} a_k P_k \right| + \bar{a}_j |P_j| \right)^{m-1} |P_j| \phi(v, P_2, \dots, P_n) dv \right] \\ &= E \left[|P_j Y(\mathbf{a})|^{m-1} 1_{\{\pi(T, \mathbf{a}) \geq Q_\alpha(T, \mathbf{a})\}} \right] \\ &< \infty \end{aligned}$$

となる．最後の不等式では，仮定 A.2 より $E[|P_j Y(\mathbf{a})|^{m-1}]$ が存在することを用いた．したがって $\bar{a}_j \geq |a_j|$ で $J_j(\mathbf{a})$ は一様収束するが， $\bar{a}_j$ は任意なので， $J_j(\mathbf{a})$ は $a_j \in \mathcal{R}$ でも一様収束する． $J_1(\mathbf{a})$ に関しても同様の議論ができて， $J_1(\mathbf{a})$ は $a_1 \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$ で一様収束する．

以上より，仮定 A.1 と仮定 A.2 のもとでは仮定 A.3 が成り立つので，(A.25) も成り立つ．

注 A.1. 仮定 A.1 に関して以下のことが言える．

- 1) すべての $P_j, j = 1, \dots, n$ が離散分布に従うならば，仮定 A.1 は成立しない．
- 2) $\mathbf{P}$ の同時密度関数が正で連続ならば，任意の信頼水準 α において仮定 A.1 が成立する．
- 3) P_1 が $(P_2, \dots, P_n)$ と独立で， $|P_j| < \infty, j = 2, \dots, n$ であり， P_1 の密度関数が正で連続ならば，任意の信頼水準 α において仮定 A.1 が成立する．

ポートフォリオの信用リスク計測では，周辺分布には離散分布が使われることが多い．注 A.1 の 1) より，その場合には厳密に言えば (2.7) は成立しないと考えべきなので，注意されたい．

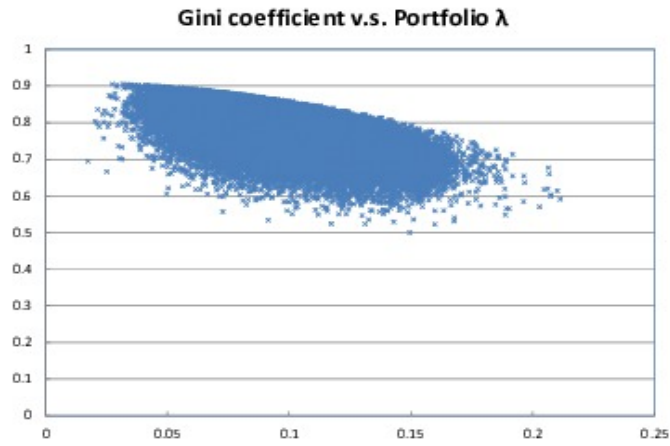


図 22: (a) Gini coefficient (x-軸) v.s. portfolio- λ (y-軸), $\rho = 0$, 10 assets, Setting B

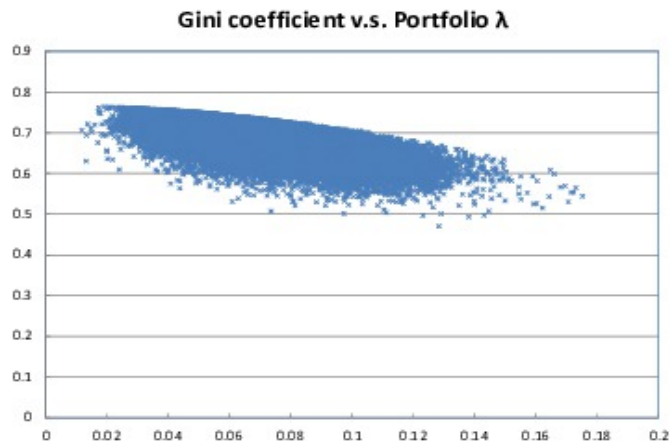


図 22: (b) Gini coefficient (x-軸) v.s. portfolio- λ (y-軸), $\rho = 0.5$, 10 assets, Setting B

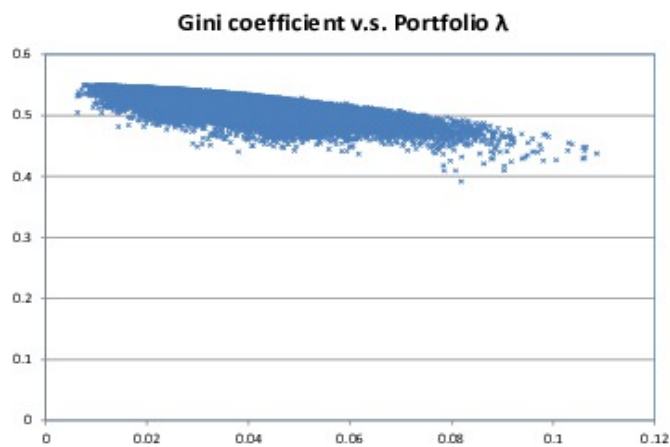


図 22: (c) Gini coefficient (x-軸) v.s. portfolio- λ (y-軸), $\rho = 0.8$, 10 assets, Setting B

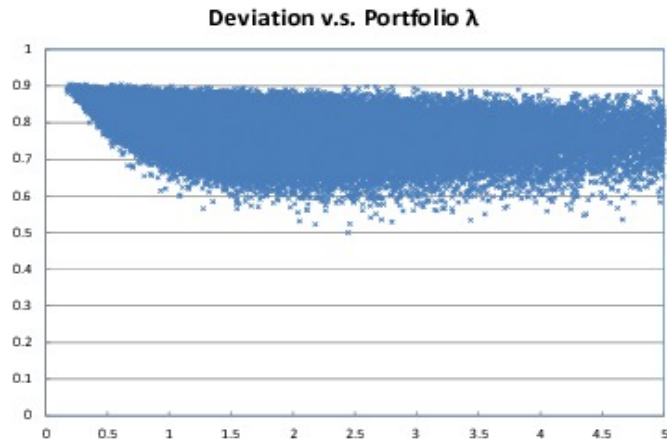


図 23: (a) Deviation (x-軸) v.s. portfolio- λ (y-軸), $\rho = 0$, 10 assets, Setting B

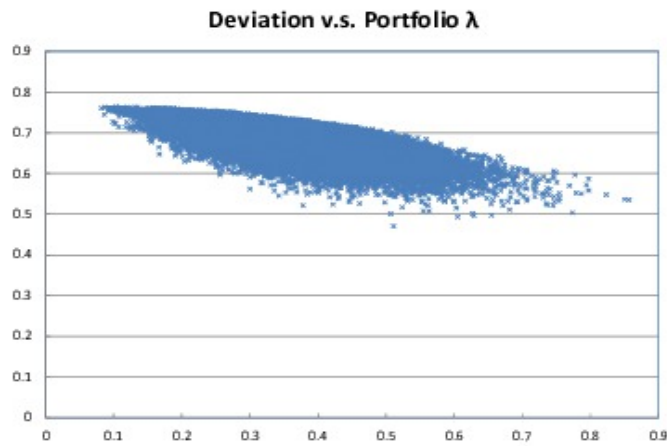


図 23: (b) Deviation (x-軸) v.s. portfolio- λ , $\rho = 0.5$ (y-軸), 10 assets, Setting B

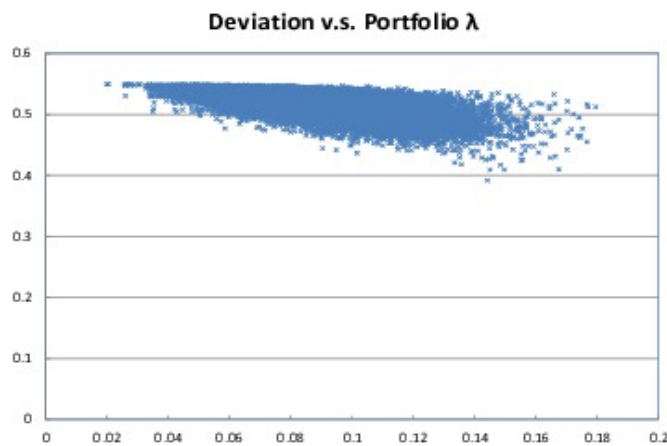


図 23: (c) Deviation (x-軸) v.s. portfolio- λ , $\rho = 0.8$ (y-軸), 10 assets, Setting B

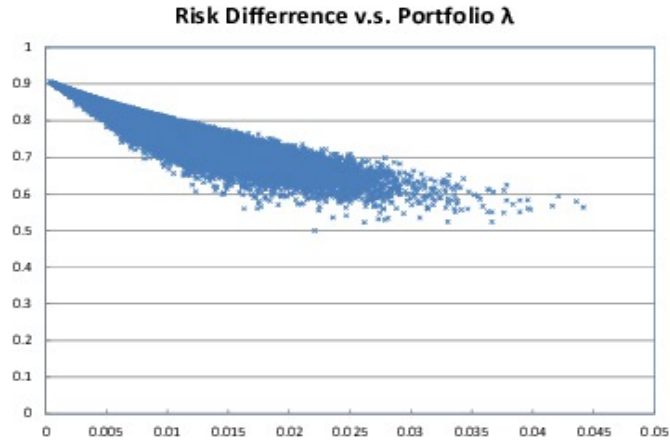


図 24: (a) Risk Difference R_D (x-軸) v.s. portfolio- λ (y-軸), $\rho = 0$, 10 assets, Setting B

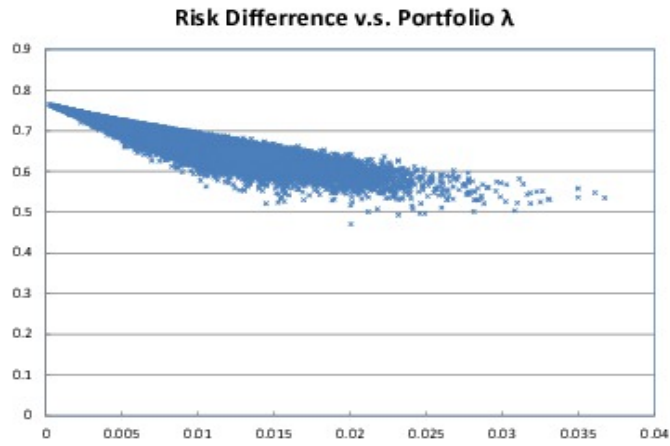


図 24: (b) Risk Difference R_D (x-軸) v.s. portfolio- λ (y-軸), $\rho = 0.5$, 10 assets, Setting B

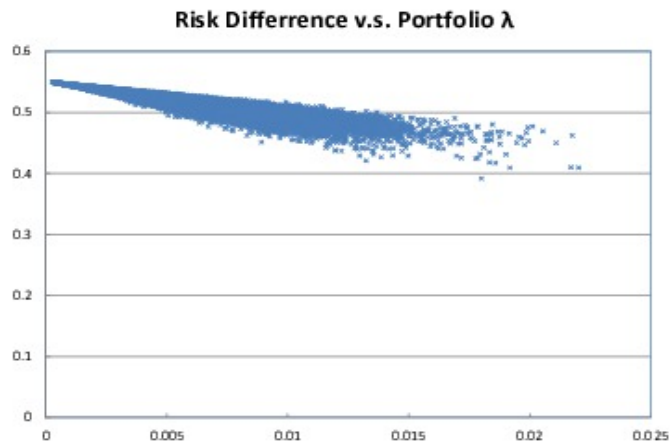


図 24: (c) Risk Difference R_D (x-軸) v.s. portfolio- λ (y-軸), $\rho = 0.8$, 10 assets, Setting B

B. ジニ係数

ジニ係数の図形的な意味を図 25 に示す．図 25 で，カーブは (4.10) の (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, n$ を順に結んだ線である． $(0, 0)$ と $(1, 1)$ を結ぶ対角線とカーブの間の面積を面積 A，カーブの下側の面積を面積 B とすると，ジニ係数は (面積 A)/(面積 A+面積 B) を意味する．(3.9) より，最適なポートフォリオではカーブは $(0, 0)$ と $(1, 1)$ を結ぶ対角線と一致するのでジニ係数の値はゼロであり，ジニ係数の大きさは最適なポートフォリオからの乖離を示すことになる．

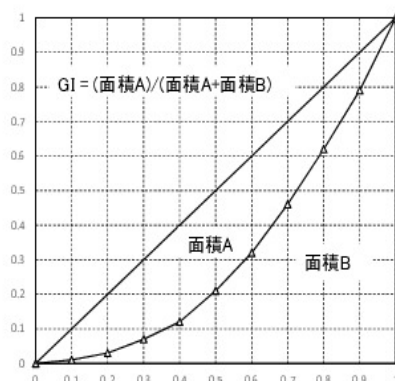


図 25: ジニ係数

謝辞

本論文の作成において，金融庁金融研究センター顧問（アジア開発銀行研究所・所長／慶応義塾大学名誉教授）吉野直行様には論文をお読みいただき，多くの有益なコメントを頂戴しました．また，金融庁内田善彦様，久保福一郎様，榎本雄一郎様，越川剛様，千家倫彦様（現財務省）には打ち合わせのたびに多くの有益なコメントを頂戴しました．論文の最後になりましたが，厚く御礼申し上げます．

参考文献

- [1] Chen, Y., X. Wei and L. Zhang (2013), “A new measurement of sectorial concentration of credit portfolio,” *Procedia Computer Science*, **17**, 1231–1240.
- [2] European Banking Authority (2014), “Report on the peer review of the EBA Guidelines on the management of concentration risk under the supervisory review process (GL31),” *European Banking Authority*, July.
- [3] Emmer, S. and D. Tasche (2004), “Calculating credit risk capital charges with the one-factor model,” *Journal of Risk*, **7**(2), 85–101.
- [4] Figini, S. and P. Uberti (2013), “Concentration measures in risk management,” *Journal of Operational Research Society*, **64**(5), 718–723.
- [5] Glasserman, P. (2005), “Measuring marginal risk contributions in credit portfolio,” *Journal of Computational Finance*, **9** (2), 1–41.

- [6] Gorday, M. B. (2003), “A risk-factor model foundation for rating-based bank capital rules,” *Journal of Financial Intermediation*, **12**(3), 199–232.
- [7] Gorday, M. B. and E. Lütkebohmert (2013), “Granularity adjustment for regulatory capital assessment,” *International Journal of Central Banking*, September, 33–71.
- [8] Grippa, P. and L. Gornicka (2016), “Measuring concentration risk – a partial portfolio approach,” *IMF Working Paper*, International Monetary Fund.
- [9] Kalkbrener M. (2005), “An axiomatic approach to capital allocation,” *Mathematical Finance*, **15**, (3), 425–437.
- [10] Litterman, R. (1997), “Hot spots and hedges (I),” *RISK*, March, 42–45.
- [11] Lütkebohmert, E. (2009), *Concentration Risk in Credit Portfolio*, EAA Lecture Notes, Springer.
- [12] Muromachi, Y. (2015), “Improved estimation methods for value-at-risk, expected short-fall and risk contributions with high precision,” *Journal of Risk*, **17** (5), 1–27.
- [13] Muromachi, Y. (2004), “A conditional independence approach for portfolio risk evaluation,” *Journal of Risk*, **7** (1), 27–53.
- [14] Prudential Regulation Authority (2015), “The PRA’s methodologies for setting Pillar 2 capital,” *Bank of England*, July, 2015.
- [15] Tasche, D. (1999), “Risk contributions and performance measurement,” Working paper.
- [16] Uberti, P. and S. Figini (2010), “How to measure single-name credit risk concentrations,” *European Journal of Operational Research*, **202** (1), 232–238.
- [17] 肥後秀明 (2006), 不均一な与信ポートフォリオのリスク計量におけるモンテカルロ・シミュレーションの効率化, 日本銀行ワーキングペーパーシリーズ, No.06-J-18.
- [18] 室町幸雄: 信用リスク計測とCDOの価格付け, 朝倉書店, (2007).



金融庁金融研究センター

〒100-8967 東京都千代田区霞ヶ関 3-2-1
中央合同庁舎 7 号館 金融庁 15 階

TEL: 03-3506-6000 (内線 3293)

FAX: 03-3506-6716

URL: <http://www.fsa.go.jp/frtc/index.html>